MATH-
STAT.
LIBRARY

MATH-
STAT.

William Ashburner

PROBLÈMES ET EXERCICES
D'ARITHMÉTIQUE
ET D'ALGÈBRE

DEUXIÈME PARTIE

SOLUTIONS RAISONNÉES

TYPOGRAPHIE DE CH. LAHURE ET Cie
Imprimeurs du Sénat et de la Cour de Cassation
rue de Vaugirard, 9

PROBLÈMES ET EXERCICES

D'ARITHMÉTIQUE

ET D'ALGÈBRE

SUR LES PRINCIPALES QUESTIONS USUELLES

RELATIVES

AU COMMERCE, A LA BANQUE
AUX FONDS PUBLICS, AUX ÉTABLISSEMENTS DE PRÉVOYANCE
A L'INDUSTRIE, AUX SCIENCES APPLIQUÉES, ETC.

PAR H. SONNET
Docteur ès sciences, Inspecteur de l'Académie de Paris
Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures

DEUXIÈME PARTIE

SOLUTIONS RAISONNÉES

PARIS
LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 14
(Près de l'École de médecine)

1858

QA102
S58
v. 2
Math.
dept.

I. M.
Irving Stringham
Math. Dept.

MATH. STAT. LIBRARY

PROBLÈMES

ET EXERCICES

D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE.

SECONDE PARTIE : SOLUTIONS RAISONNÉES.

CHAPITRE PREMIER.

PROBLÈMES SUR LE PRIX DES DENRÉES.

§ 1. Farines.

1. Le poids d'un sac étant 157 kilogrammes, on aura le poids des 1821 sacs en multipliant 157 kilog. par 1821, ce qui donne 285897 kilog. Pour avoir le nombre de quintaux demandé, il faut diviser le nombre de kilog. par 100; on obtient ainsi 2858 quintaux et 97 kilogrammes.

2. Les 3000 quintaux équivalent à 3000 fois 100 kilog., ou à 300000 kilog.; pour obtenir le nombre de sacs demandé, il faut diviser ces 300000 kilog. par 157, ce qui donne 1910 sacs et $\frac{130}{157}$, ou environ $\frac{5}{6}$ de sac.

3. Le prix du quintal étant $65^f,33$, le prix du kilog. est 100 fois moindre, c'est-à-dire $0^f,6533$; pour obtenir le prix du sac, il faut multiplier ce nombre par 157, ce qui donne $102^f,5681$, ou $102^f,57$.

La méthode employée pour résoudre ce problème revient, comme on voit, à multiplier le prix du quintal par $\frac{157}{100}$, ou par 1,57.

812298

4. Le prix de 157 kilog. étant 100 fr., le prix du kilog. est 157 fois moindre, ou $\frac{100^f}{157}$; le prix du quintal est 100 fois plus grand, c'est-à-dire $\frac{100^f \times 100}{157}$, ce qui revient, en effectuant la division, à $63^f,694...$, ou $63^f,69$.

La méthode employée revient, comme on voit, à multiplier le prix du sac par $\frac{100}{157}$, ou par 0,63694....

5. Pour obtenir le prix demandé, il suffit de multiplier $63^f,87$ par 108,66, ce qui donne $6940^f,1142$ ou $6940^f,11$.

6. Les 83 sacs pèsent 83 fois 157 kilog., c'est-à-dire 13 031 kilog. Le quintal valant $63^f,87$, le kilogr. vaut 100 fois moins, ou $0^f,6387$. Pour obtenir le prix demandé, il faut donc multiplier $0^f,6387$ par 13031, ce qui donne $8322^f,8997...$, ou $8322^f,90$.

7. Pour obtenir le prix demandé, il suffit de multiplier $102^f,57$ par 98, ce qui donne $10051^f,86$.

8. Le prix du sac étant 102,57, celui du kilog. est 157 fois moindre, ou $\frac{102^f,57}{157}$. Les 246 quintaux valent 24600 kilog., le prix demandé s'obtiendra donc en multipliant le prix du kilogr. par 24 600, ce qui donne

$$\frac{102^f,57 \times 24600}{157} \quad \text{ou} \quad \frac{2523222^f}{157},$$

ou $16\,071^f,477...$, ou enfin $16\,071^f,48$.

9. Le prix de $258^q,45$, ou de 25845 kilog. étant $16545^f,97$, le prix d'un kilog. est $\frac{16545^f,97}{25845}$. Un sac pesant 157 kilog., les 175 sacs pèsent $157^k \times 175$, ou 27475 kilog. Le prix demandé est donc

$$\frac{16545^f,97 \times 27475}{25\,845}, \quad \text{ou} \quad \frac{454600525^f,75}{25845},$$

ou enfin $17589^f,49$.

10. Les 215 sacs représentent 215 fois 157 kilog., c'est-à-dire 33755 kilog. Le prix de ces 33755 kilog. étant 21758 fr., le prix d'un kilog. est $\frac{21758^f}{33755}$. Le prix des $310^q,65$ ou des 31065 kilog. serait donc

$$\frac{21758 \times 31065}{33755}, \quad \text{ou} \quad \frac{675912270^f}{33755},$$

ou enfin $20024^f,06$.

11. Les	15q,70	à	66f,85	valent	1049f,55
	3 ,14		66 ,25		208 ,03
	63 ,07		65 ,60		4137 ,39
	111 ,06		65 ,30		7252 ,22
Total....	192q,97			valant.	12647f,19

Le prix moyen du quintal de première qualité est donc le quotient de 12647f,19 par 192,97, c'est-à-dire 65f,539..., ou 65f,54.

Les	334q,19	à	64f,95	valent	21705f,64
	39 ,25		64 ,65		2537 ,51
	499 ,66		64 ,35		32153 ,12
	31 ,40		63 ,70		2000 ,18
	100 ,00		63 ,05		6305 ,00
	73 ,79		62 ,40		4604 ,50
Total....	1078q,29			valant.	69305f,95

Le prix moyen du quintal de seconde qualité est donc le quotient de 69305f,95 par 1078,29, c'est-à-dire 64f,088..., ou 64f,09.

Pour obtenir le prix moyen du jour, il faut d'abord faire la somme des nombres de quintaux vendus :

Première qualité.....	192q,97
Seconde qualité.....	1078 ,29
Total...	1271q,26

Il faut en second lieu additionner les valeurs totales des quantités vendues :

Première qualité.....	12647f,19
Seconde qualité.....	69305 ,95
Total...	81953 ,14

On aura le prix moyen du jour en divisant 81953f,14 par 1271q,26, ce qui donne 64f,466..., ou 64f,47. Telle est, en effet, le prix donné par le *Bulletin des Halles* à la date indiquée.

12. On aura la somme demandée en multipliant 0f,80 par le nombre total de quintaux vendus, c'est-à-dire par 1271q,26, ce qui donne 1017f,0080, ou 1017 fr.

13. En opérant comme au n° **1**, on trouvera que le dépôt de garantie doit être de 3180 kilog., ou 31q,80.

On trouvera ensuite pour l'approvisionnement de chaque classe de boulangers, les nombres suivants :

Première classe.....	$219^q,80$
Deuxième classe.....	172 ,70
Troisième classe.....	125 ,60
Quatrième classe.....	47 ,10

En multipliant $65^f,54$ par ces différents nombres, on trouvera que la valeur de chaque approvisionnement serait :

Pour la première classe.....	$14405^f,69$
— deuxième classe.....	11318 ,76
— troisième classe.....	8231 ,82
— quatrième classe.....	3086 ,93

Quant au dépôt de garantie, on ne doit, pour calculer sa valeur, avoir égard qu'au poids net du sac, qui est de 157 kilog., soit pour 20 sacs un poids total de 3140 kilog., ou $31^q,40$. Au prix de $65^f,54$, ce poids représente une valeur de $2057^f,96$.

14. En opérant comme au numéro précédent, on trouvera pour la valeur de chaque approvisionnement :

Première classe.....	$12880^f,28$
Deuxième classe.....	10120 ,22
Troisième classe.....	7360 ,16
Quatrième classe.....	2760 ,06
Et pour celle du dépôt de garantie...	1840 ,04.

15. Les 221 sacs pèsent 221 fois 157 kilog., c'est-à-dire 34697 kilog., ou $346^q,97$. En divisant $22657^f,14$ par ce nombre, on aura le prix du quintal; on trouve ainsi $65^f,30$. Le prix de revente étant $67^f,80$, la différence $2^f,50$ exprime le gain brut par quintal; mais pour avoir le gain net, il faut en retrancher $0^f,80$, prix de la commission par quintal (voy. le n° **12**); il reste ainsi $1^f,70$ par quintal. Pour $346^q,97$, le gain total sera

$$1^f,70 \times 346,97, \text{ c'est-à-dire } 589^f,849, \text{ ou } 589^f,85.$$

Le gain étant de $1^f,70$ pour $65^f,30$, serait de $\frac{1^f,50}{65,30}$ pour 1 fr.; il est donc de $\frac{1^f,50 \times 100}{65,30}$ pour 100, c'est-à-dire de $2^f,297...$, ou d'environ $2^f,30$ pour 100.

16. En divisant $8973^f,50$ par 138,16, on obtient pour le prix du quintal au moment de l'achat, $64^f,95$. Il faut ajouter à ce

nombre $0^f,80$ pour les frais de commission, ce qui donne pour le prix de revient $65^f,75$. Le prix du sac étant 98 fr. au moment de la revente, on obtiendra pour le prix correspondant du quintal $\frac{98^f \times 100}{157}$, ou $98^f \times 0,63994...$ (voy. le n° 4), c'est-à-dire $62^f,42$. La différence entre $65^f,75$ et $62^f,42$, c'est-à-dire $3^f,33$, exprime la perte par quintal. La perte sur les $138^q,16$ est donc $3^f,33 \times 138,16$, ou $460^f,07$.

La perte étant $3^f,33$ sur $62^f,42$, serait de $\frac{3^f,33}{62,42}$ sur 1 fr.; elle sera donc de $\frac{3^f,33 \times 100}{62,42}$ sur 100 fr., c'est-à-dire de $5^f,334...$, ou $5^f,33$ pour 100.

17. Les 319 demi-quintaux à $31^f,50$ valent $10048^f,50$

287	—	31,00	—	8897,00
106	—	31,00	—	3286,00
277	—	30,25	—	8379,25
139	—	30,00	—	4170,00
Total 1128 demi-quintaux		.....	valant	34780,75

Le prix moyen du demi-quintal est le quotient de $34780^f,75$ par 1128, c'est-à-dire $30^f,834...$ ou $30^f,83$.

18. On pourrait recommencer la solution du problème précédent en modifiant les prix conformément à l'énoncé; mais il sera plus simple d'opérer de la manière suivante.

La baisse sera pour les farines de Nérac..		$0^f,50 \times 319$	ou $159^f,50$
—	— du Lot.....	$0,75 \times 287$	ou 215,25
—	— de Ville....	$0,80 \times 106$	ou 84,80
—	— de Couture	$1,25 \times 416$	ou 520,00
Baisse totale.....			$979^f,55$

La baisse par demi-quintal sera le quotient de $979^f,55$ par le nombre total des demi-quintaux, qui est 1128; on trouve ainsi $0^f,868$ ..., ou $0^f,87$. Retranchant cette baisse du prix moyen $30^f,83$ obtenu au numéro précédent, on trouve $29^f,96$ pour le prix moyen demandé.

19. Les 2200 sacs pèsent 2200 fois 157 kilog., c'est-à-dire 345400 kilog. ou 3454 quintaux. Au prix de $64^f,50$, ils représentent une dépense de 3454 fois $64^f,50$, c'est-à-dire de 222783 fr.

20. L'économie serait de 3454 fois 1 fr., c'est-à-dire de 3454 fr.

21. L'économie serait de 2200 fois $2^f,50$, c'est-à-dire de 5500 fr.

22. La consommation totale a été de 365 fois 3454 quintaux, c'est-à-dire de 1260710 quintaux.

Pour obtenir la dépense totale, on peut adopter la marche suivante :

En réduisant d'abord la consommation journalière à 1 quintal, on voit qu'on aura :

Pour Février 1855,	15 quintaux	à	52f,28	valant	784f,20
Id.,	13	—	52,55	—	683,15
Mars,	15	—	52,13	—	781,95
Id.,	16	—	51,05	—	816,80
Avril,	15	—	50,61	—	759,15
Id.,	15	—	50,23	—	753,45
Mai,	15	—	50,37	—	755,55
Id.,	16	—	50,26	—	804,16
Juin,	15	—	52,56	—	788,40
Id.,	15	—	55,32	—	829,80
Juillet,	15	—	58,34	—	875,10
Id.,	16	—	57,96	—	927,36
Août,	15	—	57,48	—	862,20
Id.,	16	—	56,58	—	905,28
Septembre,	15	—	59,32	—	889,80
Id.,	15	—	64,61	—	969,15
Octobre,	15	—	71,04	—	1065,60
Id.,	16	—	68,98	—	1103,68
Novembre,	15	—	68,37	—	1025,55
Id.,	15	—	66,88	—	1003,20
Décembre,	15	—	67,41	—	1011,15
Id.,	16	—	67,77	—	1084,32
Janvier 1856,	15	—	66,92	—	1003,80
Id.,	16	—	65,10	—	1041,60
Total.....	365 quintaux	...		valant	21524f,40

Pour avoir la dépense annuelle, il reste à multiplier ce nombre par le nombre réel de quintaux représentant la consommation journalière, c'est-à-dire par 3454, ce qui donne 74345277f,60.

Quant au prix moyen du quintal, il s'obtiendra simplement en divisant 21524f,40 par 365, ce qui donne 58f,97.

23. Puisque 157 kilog. de farine donnent 102 pains de 2 kilog. ou 204 kilog. de pain, 100 sacs ou 157 quintaux fourniraient

100 fois 204 kilog. ou 20400 kilog. de pain; donc un seul quintal en donnera 157 fois moins, ou $\frac{20400^k}{157}$, c'est-à-dire $129^k,93$ ou environ 130 kilog. de pain. C'est le chiffre admis par l'arrêté du 12 juillet 1842.

24. Si, au prix du quintal de farine, soit $64^f,50$, on ajoute 7 fr. pour les frais de manutention, ce qui donne $71^f,50$, on obtient, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, le prix de 130 kilog. de pain. Pour avoir le prix du kilogramme, il faut donc diviser $71^f,50$ par 130, ce qui donne $0^f,55$.

25. En opérant comme au numéro précédent, on aura à diviser $52^f,55 + 7^f$, ou $59^f,55$ par 130, ce qui donne $0^f,458...$, ou $0^f,46$.

26*. Les résultats du calcul qu'on vient de faire dans les deux numéros précédents peuvent être renfermés dans une formule générale. On voit, en effet, que pour obtenir le prix demandé, il faut ajouter 7 au prix moyen du quintal de farine, et diviser la somme par 130. En appelant donc x le prix du kilogramme de pain de première qualité et y le prix moyen du quintal de farine, on aura la relation

$$x = \frac{y+7}{130}.$$

27. On a trouvé au n° **24** que le prix du kilogramme de pain de première qualité serait $0^f,55$. Le nombre 55 étant impair, on doit en retrancher 7, ce qui donne 48 centimes ou $0^f,48$ pour le prix correspondant du kilogramme de pain de seconde qualité.

28. On a trouvé au n° **25** que le prix du kilogramme de pain de première qualité serait $0^f,46$. Le nombre 46 étant pair, on doit en retrancher 8, ce qui donne 38 centimes, ou $0^f,38$ pour le prix du kilogramme de pain de seconde qualité.

On remarquera que, d'après la règle qui vient d'être appliquée dans ce numéro et dans le numéro précédent, le prix du kilogramme de pain de seconde qualité est toujours exprimé par un nombre pair de centimes; car, si d'un nombre impair on retranche 7 qui est impair, la différence sera un nombre pair; et si d'un nombre pair on retranche 8 qui est pair, la différence sera encore un nombre pair.

29. Puisqu'on obtient le prix du kilogramme de pain de première qualité en ajoutant 7 au prix moyen du quintal de farine

et en divisant la somme par 130, on obtiendra au contraire le prix du quintal de farine en multipliant le prix du kilogramme de pain par 130 et en retranchant 7 du produit.

C'est ce qu'indique, en effet, la formule du n° **26**, qui donne

$$y = 130\,x - 7.$$

Cela posé, si l'on diminue et si l'on augmente le nombre $0^f,49$ d'un demi-centime, ou de $0^f,005$, on obtient les nombres $0^f,485$ et $0^f,495$.

Le premier de ces nombres, multiplié par 130, donne $63^f,05$; et en retranchant 7, il reste $56^f,05$.

Le second nombre $0^f,495$, multiplié par 130, donne $64^f,35$; et en en retranchant 7, il reste $57^f,35$.

Ainsi, pour que le prix du kilogramme de pain de première qualité soit $0^f,49$, il faut que le prix moyen du quintal de farine soit compris entre $56^f,05$ et $57^f,35$; c'est-à-dire qu'il peut varier entre ces limites depuis $56^f,06$ jusqu'à $57^f,35$ inclusivement.

En opérant de même pour les autres valeurs du prix du kilogramme de pain, on pourra former le tableau suivant :

Prix du kilog. de pain de 1re qualité.	Prix moyen du quintal de farine.	
$0^f,49$	de $56^f,06$	à $57^f,35$
0,50	57,36	58,65
0,51	58,66	59,95
0,52	59,96	61,25
0,53	61,26	62,55
0,54	62,56	63,85
0,55	63,86	65,15
0,56	65,16	66,45
0,57	66,46	67,75
0,58	67,76	69,05
0,59	69,06	70,35
0,60	70,36	71,65

Ce tableau est, en effet, celui que l'on trouve dans le *Bulletin des Halles*.

Mais pour le former il n'est pas nécessaire de recommencer les calculs pour chacune des valeurs du prix du kilogramme de pain. On remarquera, en effet, que les nombres de chacune des deux dernières colonnes forment une progression arithmétique

dont la raison est $1^f,30$; et c'est ce qu'il était facile de prévoir; car si, dans la relation trouvée au n° **29**

$$y = 130x - 7,$$

on fait croître x de $0^f,01$, la valeur de y croîtra de 130 fois $0^f,01$, c'est-à-dire de $1^f,30$.

30. Le prix du kilogramme de pain de seconde qualité étant $0^f,42$, celui du kilogramme de pain de première qualité peut être $0^f,42 + 0^f,07$ ou $0^f,42 + 0^f,08$ c'est-à-dire $0^f,49$ ou $0^f,50$.

Dans le premier cas le prix moyen du quintal de farine serait compris, comme on vient de le voir, entre $56^f,05$ et $57^f,35$; dans le second cas il serait compris entre $57^f,35$ et $58^f,65$. Ce prix peut donc varier de $56^f,06$ à $58^f,65$ inclusivement.

En opérant de même pour les autres valeurs données du prix du kilogramme de pain de seconde qualité, on pourra former le tableau suivant :

$0^f,42$	de $56^f,06$	à $58^f,65$
0 ,44	58 ,66	61 ,25
0 ,46	61 ,26	63 ,85
0 ,48	63 ,86	66 ,45
0 ,50	66 ,46	69 ,05
0 ,52	69 ,06	71 ,65

Pour former ce tableau il n'est pas nécessaire de recommencer les calculs à chaque valeur du prix du pain. On remarquera que les nombres de chacune des deux dernières colonnes sont en progression arithmétique dont la raison est $2^f,60$; ce qu'on pouvait prévoir, car, d'après la manière dont ils sont obtenus, ils ne sont autre chose que les nombres du tableau du n° **29**, pris de deux en deux.

31. Si l'on écarte d'abord les 18000 quintaux de première marque à $68^f,50$, on trouvera, en opérant comme au n° **11**, un nombre total de 16590 quintaux, valant $1068367^f,50$; d'où résulte un prix moyen de $64^f,398...$, ou $64^f,40$

Si on tient compte, en second lieu, des 18000 quintaux qui, au prix de $68^f,50$, valent 1233000 fr., on obtient un nombre total de 34590 quintaux valant $2301367^f,75$; d'où résulte un prix moyen de $66^f,53$.

La hausse factice sur le prix moyen est la différence des nombres $66^f,53$ et $64^f,40$, c'est-à-dire $2^f,13$.

32. En adoptant $64^f,40$ pour le prix du quintal de farine, on trouve, en opérant comme au n° **24**, que le prix du kilogramme de pain est $0^f,549...$, ou $0^f,55$.

En prenant au contraire $66^f,53$ pour le prix du quintal de farine, on trouve $0^f,5656...$ ou $0^f,57$ pour le prix du kilogramme de pain.

La hausse factice sur le prix du pain serait donc de 2 centimes.

33. Puisque le sac de farine fournit 204 kilogrammes de pain, les 3 sacs en fournissent 612; le bénéfice illicite par jour serait donc de 612 fois 2 centimes, c'est-à-dire de 1224 centimes ou $12^f,24$.

Pour la quinzaine, le bénéfice serait de 15 fois $12^f,24$, c'est-à-dire de $183^f,60$.

34. Il gagnerait 365 fois $12^f,24$, c'est-à-dire $4467^f,60$.

35. La consommation journalière étant de 2200 sacs, dont chacun produit 204 kilog. de pain, cette consommation équivaut à 2200 fois 204 kilog., c'est-à-dire à 448800 kilog. Le tort causé par jour à la population de Paris serait donc de 448800 fois 2 centimes, c'est-à-dire de 8976 fr.

36. Il serait de 365 fois 8976 fr., c'est-à-dire de 3276240 fr.

§ 2. Céréales.

37. Les $15^{tt}\ 2^s$ reviennent à $15^{tt}\ \frac{2}{20}$ puisque la livre valait 20 sous; ce prix peut encore s'écrire $15^{tt},1$ en réduisant $\frac{2}{20}$ en décimales. Puisque la livre est les $\frac{80}{81}$ du franc, pour convertir un nombre de livres en francs, il faut le multiplier par $\frac{80}{81}$, ce qui revient à le multiplier par 80 et à diviser le produit par 81. Le produit de 15,1 par 80 est 1208; et le quotient de ce nombre par 81 est 14,913. Le prix de 156 litres ou de $1^{hect},56$ était donc de $14^f,91$ environ. Pour obtenir le prix de l'hectolitre, il faut diviser $14^f,91$ par 1,56 ce qui donne $9^f,558$, ou environ $9^f,56$.

38. L'augmentation est la différence entre 35 fr. et $9^f,56$, c'est-à-dire $25^f,44$. Le rapport du prix nouveau à l'ancien est le quotient de 35 par 9,56, c'est-à-dire 3,66.... Ainsi le prix du blé a plus que triplé dans cet intervalle d'un siècle.

39. La production totale est la somme des nombres :

8683043	hectolitres
18287731	
10633223	
7686204	
5164842	
6116655	
5669072	
5098850	
3810664	
547200	
c'est-à-dire 71697484	hectolitres.

En multipliant 30 fr. par ce nombre, on obtient la valeur demandée ; on trouve ainsi : 2150924520 fr.

40. Pour obtenir la moyenne demandée, il faut faire la somme des huit nombres donnés, et la diviser par 8. La somme de ces huit nombres est $599^k,55$; et le quotient de ce nombre par 8 est $74^k,94$... ou environ 75 kilog.

41. Le poids demandé est le produit de 75 kilog. par le nombre 71697484, c'est-à-dire 5377311300 kilog. ou environ 5377311 tonneaux métriques.

42. Puisque le poids moyen de l'hectolitre de blé est 75 kilog., les $3^{hect},12$ pèsent $75^k \times 3,12$ c'est-à-dire 234 kilog. Or le sac de farine pèse 157 kilog.; on peut donc dire :

Puisque, pour obtenir 157 kilog. de farine, il faut 234 kilog. de blé, pour obtenir 1 kilog. de farine, il faut 157 fois moins de blé, c'est-à-dire $\frac{234^k}{157}$; pour obtenir 100 kilog. de farine, il faudra 100 fois plus de blé, ou $\frac{23400^k}{157}$, c'est-à-dire $149^k,04$..., ou simplement 149 kilog.

43. Ce poids est de 2200 fois 234 kilog., puisque, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, ce dernier nombre est le poids de blé qui donne un sac de farine. En faisant la multiplication, on obtient 514800 kilog.

44. Puisque 234 kilog. de blé donnent 157 kilog. de farine, la perte de poids sur 234 kilog. est la différence entre 234 kilog.

et 157 kilog., c'est-à-dire 77 kilog.; la perte sur 1 kilog. serait 234 fois moindre, ou $\frac{77^k}{234}$; la perte sur 100 kilog. serait 100 fois plus grande, ou $\frac{7700^k}{234}$, c'est-à-dire 32,9. Ainsi la perte est un peu moins de 33 pour 100.

45. On vient de voir que 234 kilog. de blé donnent 157 kilog. de farine. Or on a vu, au n° **23**, qu'un sac de farine de 157 kilog. donne 102 pains de 2 kilog. On aura donc le poids de blé nécessaire pour faire un pain de 2 kilog., en divisant 234 kilog. par 102, ce qui donne $2^k,294$.

Si l'on veut exprimer la même quantité en mesures de capacité, on se rappellera que l'hectolitre de blé pèse 75 kilog.; 1 kilog. de blé représente donc la 75e partie d'un hectolitre, c'est-à-dire $1^{lit},333$.... En multipliant ce nombre par 2,294, on aura la quantité cherchée; on trouve ainsi : $3^{lit},05859$ ou environ $3^{lit},059$.

En se contentant d'une approximation moindre, on peut dire qu'il faut 3 litres de blé pour faire un pain de 2 kilog.

46. 1° Le nombre d'hectolitres de blé récoltés par hectare pour l'une quelconque des cinq années s'obtiendra en divisant le nombre total d'hectolitres récoltés dans cette année par le nombre d'hectares ensemencés.

Pour l'année 1815, par exemple, on aura à diviser 34960971 hectolitres par 4591677, ce qui donne $7^h,61$.

En opérant de même pour les autres années, on formera le tableau suivant :

1815.....	$7^{hectol},61$
1820.....	9 ,47
1825.....	12 ,57
1830.....	10 ,53
1835.....	13 ,43

2° Pour l'ensemble des cinq années on fera un calcul analogue, en opérant sur la somme totale des nombres d'hectolitres récoltés et sur la somme totale des nombres d'hectares ensemencés.

On trouve pour le nombre total d'hectolitres,

264823360 hectol.

et pour le nombre total d'hectares,

24479381 hectares.

En divisant le premier de ces nombres par le second, on ob-

tient pour le nombre moyen d'hectolitres produit par un hectare de terres ensemencées.... $10^h,818$.... ou environ $10^h,82$.

47. On a vu, au n° **42**, qu'il faut en moyenne $3^h,12$ de blé pour donner un sac de farine; et l'on vient de voir qu'il faut 1 hectare ou 10000 mètres carrés de terre ensemencée pour produire $10^h,82$. Pour obtenir 1 hectolitre de blé, il faudra une superficie de terre ensemencée représentée par $\frac{10000^{mc}}{10,82}$; et pour produire la quantité de blé nécessaire pour donner un sac de farine, c'est-à-dire $3^h,12$, il faudra une superficie représentée par $\frac{10000^{mc} \times 3,12}{10,82}$, c'est-à-dire $2883^{mc},5$ ou environ $28^{ares},83$.

48. Il en faudra 2200 fois plus ou $28^{ares},835 \times 2200$, ce qui donne 63437 ares ou $634^h,37$.

49. Il en faut 365 fois plus, ou $634^h,37 \times 365$, ce qui donne 231545 hectares.

50. On a vu, au n° **45**, qu'il faut $3^{lit},059$ de blé pour faire un pain de 2 kilog.; et l'on a vu, au n° **46**, que 10000^{mc} de terre ensemencée donnent $10^h,82$ ou 1082 litres de blé. Pour obtenir 1 litre de blé, il faudrait une superficie de terre représentée par $\frac{10000^{mc}}{1082}$; et pour obtenir $3^{lit},059$, il faudra une superficie représentée par $\frac{10000^{mc} \times 3,059}{1082}$, c'est-à-dire $28^{mc},27$.

51. Pour résoudre ce problème, il faut comparer le prix d'une quantité donnée de blé à celui de la farine produite. On a vu que $3^h,12$ de blé donnent un sac ou 157 kilog. de farine: 1 hectolitre de blé donnera donc une quantité de farine représentée par $\frac{157^k}{3,12}$; et $1\frac{1}{2}$ hectolitre, ou $1^h,5$ en donnera une quantité représentée par $\frac{157^k \times 1,5}{3,12}$, c'est-à-dire $75^k,48$. Si le quintal métrique de farine vaut $64^f,90$, le kilog. vaut 100 fois moins, c'est-à-dire $0^f,649$; et les $75^k,48$ valent par conséquent $0^f,649 \times 75,48$; ou $48^f,986$.... ou $48^f,99$. Maintenant, puisque $52^f,50$ de blé ne donnent que $48^f,99$ de farine, c'est que la différence $3^f,51$ a été employée à payer le prix du transport et de la mouture.

Les frais, ayant été de $3^f,51$ pour $1\frac{1}{2}$ hectolitre, seraient de $\frac{3^f,51}{1,5}$, ou de $2^f,34$ pour 1 hectolitre.

52. Puisque les frais sont de $3^f,51$ pour $52^f,50$, pour 1 fr. ils

seraient $\frac{3^f,51}{52,50}$, et pour 100 fr. ils seraient $\frac{3^f,51 \times 100}{52,50}$; c'est-à-dire $6^f,57$. Le taux de ces frais, rapportés au prix du blé, sont donc d'environ 6,57 pour 100.

53. Puisque les frais sont de $3^f,51$ pour $48^f,99$ de farine, pour 1 fr. de farine ils seraient $\frac{3^f,51}{48,99}$; et pour 100 fr. de farine, ils seraient $\frac{3^f,51 \times 100}{48,99}$, c'est-à-dire $7^f,16$. Le taux des frais serait donc, dans ce cas, d'environ 7,16 pour 100.

54. Le nombre total d'hectares ensemencés est 13332361 hectares; et le nombre total d'hectolitres de seigle récoltés est 131674324; en divisant ce dernier nombre par le premier, on obtiendra le nombre moyen d'hectolitres de seigle récolté par hectare; on trouve ainsi : $9^h,87$.

55. Puisque $33^f,50$ représente le prix de 115 kilog. de seigle, 1 fr. représenterait le prix de $\frac{115^k}{33,50}$ de seigle; et 20 fr. représenteront le prix de $\frac{115^k \times 20}{33,50}$ de cette espèce de céréales.

En effectuant le calcul, on trouve $68^k,65$. Mais 20 fr. représentent aussi le poids d'un hectolitre; le poids moyen de l'hectolitre de seigle est donc d'environ $68^k,65$.

56. La récolte en seigle de 1835 ayant été de 32996950 hectolitres; en multipliant 20 fr. par ce nombre on aura la valeur demandée; on trouve ainsi : 659939000 fr.

57. Le nombre total d'hectares ensemencés a été de 6253874 hectares; le nombre total d'hectolitres récoltés a été de 84950010 hectolitres; le quotient du second nombre par le premier sera le nombre d'hectolitres récoltés en moyenne par hectare; on trouve $13^h,58$.

58. Puisque 100 kilog. d'orge valent $23^f,50$, un seul kilog. vaut 100 fois moins, ou $0^f,235$; le quotient de 16 fr. par $0^f,235$ donnera donc le nombre de kilog. représentés par un hectolitre. On trouve ainsi $68^k,04$.

59. Cette récolte ayant été de 18184316 hectolitres, en multipliant $23^f,50$ par ce nombre, on aura la valeur demandée; on trouve en opérant le calcul : 427331426 fr.

60. Le nombre total d'hectares ensemencés a été de 13258037 hectares; le nombre total d'hectolitres récoltés a été de

213773886 hectolitres; le quotient de ce dernier nombre par le premier exprimera le nombre d'hectolitres demandé; on trouve : $16^{h},12$.

61. Pour obtenir le poids demandé, il faut faire la somme des poids trouvés dans chaque région, et diviser cette somme par le nombre des régions. La somme des poids moyens partiels est $391^{k},04$; la neuvième partie de ce nombre est $43^{k},448...$, ou environ $43^{k},45$. C'est le poids moyen demandé.

62. Cette récolte ayant été de 49460057 hectolitres, son poids, au taux moyen de $43^{k},45$ par hectolitre, sera de $43^{k},45 \times 49460057$, ou de $2149039476^{k},65$. Puisque 150 kilogrammes valent $27^{f},50$, un seul kilog. vaudrait $\frac{27^{f},50}{150}$, et les $2149039476^{k},65$ vaudront

$$\frac{27^{f},50 \times 2149039476,65}{150}, \text{ ou } 393990570^{f},72.$$

63. Puisque 150 kilog. valaient $27^{f},50$, un seul kilog. valait $\frac{27^{f},50}{150}$; et $43^{k},45$, poids de l'hect., valaient $\frac{27^{f},50 \times 43^{k},45}{150}$, c'est-à-dire $7^{f},9658....$ ou environ $7^{f},97$.

64. La production étant de $10^{hectol},82$ par hectare pour le blé, on aura la valeur du produit en multipliant 30 fr. par ce nombre, ce qui donne $324^{f},60$.

Pour le seigle, on devra multiplier de même 20 fr. par 9,87, ce qui donne $197^{f},40$.

Pour l'orge, on multipliera 16 fr. par 13,58, ce qui donne $217^{f},28$.

Enfin, pour l'avoine, on multipliera 8 fr. par 16,12, ce qui donne $128^{f},96$.

65. La valeur de 100 hectolitres de blé étant supposée de 100 fois 30 fr., ou 3000 fr., on aura le nombre d'hectolitres de seigle nécessaire pour faire la même valeur en divisant 3000 fr. par le prix de l'hectolitre de seigle, c'est-à-dire par 20 fr.; on trouve ainsi 150 hectolitres.

En divisant de même 3000 fr. par 16 fr., prix de l'hectolitre d'orge, on trouve $187^{h},20$ pour le nombre d'hectolitres d'orge cherché.

En divisant 3000 fr. par 8 fr., prix de l'hectolitre d'avoine, on obtient, pour le nombre d'hectolitres demandé, 375 hectolitres.

66. Puisqu'un hectare de terres ensemencées en blé produit une quantité de blé dont la valeur est représentée par $324^f,60$ tandis qu'un hectare de terres ensemencées en seigle produit une quantité de seigle ayant une valeur de $194^f,40$, en divisant $324^f,60$ par $194^f,40$ on obtiendra le nombre d'hectares de terres ensemencées en seigle nécessaire pour produire une récolte équivalente à celle d'un hectare de terres ensemencées en blé; on trouve ainsi $1^h,6697$, ou 1 hectare 66 ares et 97 centiares.

On opérera de même pour l'orge, en divisant $324^f,60$ par $217^f,28$; on trouvera : 1 hectare 49 ares et 39 centiares.

Pour l'avoine, on divisera de même $324^f,60$ par $128^f,96$; et l'on obtiendra 2 hectares 51 ares et 70 centiares.

67. Les $\frac{2}{5}$ de 150 hectares équivalent à 60 hectares. Puisqu'un hectare de terres ensemencées en blé donne une récolte dont la valeur est de $324^f,60$, les 60 hectares produiront 60 fois plus, c'est-à-dire une valeur de..... $19476^f,00$

Le tiers de 150 hectares est 50 hectares. En multipliant par 50 la valeur du produit d'un hectare en seigle, c'est-à-dire $194^f,40$, on trouve..... $9720^f,00$

Le quart de 150 hectares est $37^h,50$. En multipliant par ce nombre la valeur du produit d'un hectare en avoine, c'est-à-dire $128^f,96$, on obtient..... $4836^f,00$

Enfin, si des 150 hectares on retranche successivement 60 hectares, 50 hectares, puis $37^h,50$, il reste $2^h,50$ pour la portion ensemencée en orge. En multipliant par ce nombre la valeur du produit d'un hectare en orge, c'est-à-dire $217^f,28$, on trouve..... $543^f,20$

La somme des quatre nombres obtenus, ou..... $34575^f,20$ est la valeur totale demandée.

68. I. Si le nombre des hectares ensemencés en blé et en avoine eût été le même, c'est-à-dire 5, le produit eût été de 5 fois $324^f,60$, plus 5 fois $128^f,96$, c'est-à-dire de 1623 fr., plus $644^f,80$, en tout $2267^f,80$. Ce produit est inférieur de $489^f,10$ au produit réel; on doit en conclure qu'il y avait plus de terres ensemencées en blé que de terres ensemencées en avoine. Or, à chaque hectare ensemencé en blé qu'on remplacera par un hectare ensemencé en avoine, le produit augmentera de la différence entre $324^f,60$ et $128^f,96$, c'est-à-dire de $195^f,64$. Autant de fois ce nombre sera contenu dans les $489^f,10$, autant il y aura d'hectares supposés d'abord ensemencés en avoine, qui l'étaient réellement en blé. En faisant la division, on trouve pour quotient

$2^{\text{hect}},50$. Le nombre des hectares ensemencés en blé était donc de 5 hectares, plus $2^{\text{hect}},50$, ou $7^{\text{hect}},50$; et, par conséquent, le nombre des hectares ensemencés en avoine était l'excès de 10 hectares sur ce nombre, ou $2^{\text{hect}},50$.

II. On peut résoudre le même problème algébriquement. Si l'on désigne par x le nombre d'hectares ensemencés en blé, et par y le nombre d'hectares ensemencés en avoine, on devra avoir

$$x + y = 10,$$

$$324^{\text{f}},60 . x + 128^{\text{f}},96 . y = 2756^{\text{f}},90.$$

On tire de la première équation,

$$y = 10 - x;$$

et, en substituant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$324^{\text{f}},60 . x + 1289^{\text{f}},60 - 128^{\text{f}},96 . x = 2756^{\text{f}},90;$$

ou $\quad 195^{\text{f}},64 . x = 1467^{\text{f}},30; \quad$ d'où $\quad x = \dfrac{1467^{\text{f}},30}{195,64},$

c'est-à-dire $\quad x = 7^{\text{hect}},50,$

et par suite $\quad y = 2^{\text{hect}},50.$

69. Puisque la valeur de la récolte de 1 hectare est de $324^{\text{f}},60$ pour le blé, on aura l'étendue demandée en divisant 1000 fr. par cette valeur, ce qui donne 3 hectares, 8 ares et 7 centiares.

Pour le seigle, on divisera de même 1000 fr. par $194^{\text{f}},40$, ce qui donne 5 hectares, 14 ares et 40 centiares.

Pour l'orge, on divisera 1000 fr. par $217^{\text{f}},28$, ce qui donne 4 hectares, 60 ares et 23 centiares.

Enfin, pour l'avoine, on divisera 1000 fr. par $128^{\text{f}},96$, ce qui donne 7 hectares, 75 ares et 43 centiares.

70. On a vu, au n° **40**, que le poids de l'hectolitre de blé est d'environ 75 kilog. En divisant 10 quintaux métriques, ou 1000 kilog. par ce nombre, on aura le nombre d'hectolitres de blé contenus dans ces 10 quintaux; et en multipliant le quotient par 30 fr., valeur admise pour un hectolitre, on aura la valeur des 10 quintaux. Ce calcul revient à multiplier 30 fr. par 1000, et à diviser le produit par 75, ce qui donne 400 fr.

Pour le seigle, on multipliera par 1000 kilog. la valeur de l'hectolitre, qui est supposée de 20 fr., et on divisera le produit par le poids de l'hectolitre, qui a été trouvé (**55**) de $68^{\text{k}},65$. On obtient ainsi $291^{\text{f}},33$.

Pour l'orge, on multipliera par 1000 kilog. la valeur de l'hectolitre, qui est supposée de 16 fr., et on divisera le produit par le poids de l'hectolitre, qui a été trouvé (58) de $68^{k},04$. On obtient ainsi $235^{f},15$.

Enfin, pour l'avoine, on multipliera par 1000 kilog. la valeur de l'hectolitre, qui est supposée de 8 fr., et on divisera le produit par le poids de l'hectolitre, qui a été trouvé (61) de $43^{k},45$. On obtient ainsi $184^{f},12$.

71. I. La récolte de 1 hectare, en blé, étant de $10^{hectol},82$, si elle augmentait de 10 pour 100, ou d'un dixième, c'est-à-dire de $1^{hectol},082$, elle deviendrait $11^{hectol},902$. Mais le prix, qui était supposé de 30 fr., diminuant d'un dixième, ou de 3 fr., se trouverait réduit à 27 fr. La valeur de la récolte serait donc le produit de 27 fr. par 11,902, c'est-à-dire $321^{f},35$ au lieu de $324^{f},60$.

La récolte de 1 hectare, en seigle, étant de $9^{hectol},87$ deviendrait, en augmentant d'un dixième, $9^{hectol},87$, plus $0^{hectol},987$, c'est-à-dire $10^{hectol},857$. Le prix de l'hectolitre, ou 20 fr.. diminuant au contraire d'un dixième, ou de 2 fr., serait réduit à 18 fr. La valeur de la récolte serait donc le produit de 18 fr. par 10,857, c'est-à-dire $195^{f},43$ au lieu de $197^{f},40$.

La récolte de 1 hectare, en orge, étant de $13^{hectol},58$ augmenterait d'un dixième, ou de $1^{hectol},358$, et deviendrait $14^{hectol},938$. Le prix de l'hectolitre, ou 16 fr., diminuerait d'un dixième, ou de $1^{f},60$, et serait ainsi réduit à $14^{f},40$. La valeur de la récolte serait donc le produit de $14^{f},40$ par 14,938, c'est-à-dire $215^{f},11$ au lieu de $217^{f},28$.

Enfin, la récolte de 1 hectare, en avoine, étant de $16^{hectol},12$, augmenterait de $1^{hectol},612$, et deviendrait $17^{hectol},732$. Le prix de l'hectolitre, ou 8 fr., diminuerait de $0^{f},80$, et serait réduit à $7^{f},20$. La valeur de la récolte serait donc le produit de $7^{f},20$ par 17,732, c'est-à-dire $127^{f},67$ au lieu de $128^{f},96$.

II. Le problème peut être résolu algébriquement d'une manière plus simple. Si a représente la récolte primitive, exprimée en hectolitres, elle devient, dans l'hypothèse actuelle, $a+\frac{a}{10}$, ou $a\left(1+\frac{1}{10}\right)$. Si b représente le prix de l'hectolitre, ce prix devient $b-\frac{b}{10}$, ou $b\left(1-\frac{1}{10}\right)$. La valeur de la récolte, qui était ab, devient donc $ab\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)$, ou $ab\left(1-\frac{1}{100}\right)$; c'est-à-dire qu'elle a diminué d'un centième de sa valeur.

Pour le blé, on retranchera de 324f,60, valeur primitive de la récolte, le centième de cette valeur, ou 3f,246, ce qui donnera 321f,354, ou 321f,35, comme ci-dessus.

Pour le seigle, on retranchera de 197f,40 le centième de ce nombre, ou 1f,974, ce qui donnera 195f,426, ou 195f,43, comme plus haut.

Pour l'orge, on retranchera de 217f,28 le centième de ce nombre, ou 2f,1728, ce qui donnera 215f,1072, ou 215f,11, comme précédemment.

Enfin, pour l'avoine, on retranchera de 128f,96 le centième de ce nombre, ou 1f,2896, ce qui donnera 127f,6704, ou 127f,67, comme on l'a trouvé par l'autre méthode.

72. Il est aisé de voir que la valeur de la récolte ne changerait pas. En effet, si a désigne la récolte primitive, elle deviendrait $a - \frac{20}{100}a$, ou $a - \frac{a}{5}$, ou enfin $\frac{4}{5}a$. Si b désigne le prix de l'hectolitre, il deviendrait $b + \frac{25}{100}$, ou $b + \frac{b}{4}$, ou enfin $\frac{5}{4}b$. La valeur de la récolte deviendrait donc $\frac{4}{5}a \times \frac{5}{4}b$, ou ab; c'est-à-dire qu'elle n'aurait pas changé.

Nous en ferons la vérification pour un hectare de terres ensemencées en blé. La récolte primitive, ou 10hectol,82, diminuerait d'un cinquième, ou de 2hectol,164, et se réduirait à 8hectol,656.

Le prix de l'hectolitre, ou 30 fr., augmenterait d'un quart, ou de 7f,50, et s'élèverait à 37f,50. La valeur de la récolte serait donc le produit de 37f,50 par 8,656; en faisant la multiplication on trouve 324f,6000, ou 324f,60; ainsi, la valeur de la récolte n'a pas changé.

On ferait la même vérification pour la récolte d'un hectare en seigle, en orge ou en avoine.

§ 3. Graines et fourrages.

73.

Les 12	hectolitres	haricots à	29f,30	valent	351f,60
8	—	—	24 ,00	—	192 ,00
25	—	—	21 ,00	—	525 ,00
10	—	—	22 ,66	—	226 ,60
6	—	—	19 ,33	—	115 ,98
30	—	pois cassés à	44 ,65	—	1339 ,50
30	—	lentilles à	30 ,00	—	900 ,00
4	—	vesces à	16 ,00	—	64 ,00
			Valeur totale.....		3714f,68

74. La superficie de la prairie étant de $2^{hect},065$, et le poids de graine étant de 30 kilog. par hectare, on aura le poids total de graine nécessaire en multipliant 30 kilog. par 2,065, ce qui donne $61^{k},95$. Les 100 kilog. valant 140 fr., un kilogramme vaut 100 fois moins, ou $1^{f},40$; on aura donc le prix demandé en multipliant $1^{f},40$ par 61,95, ce qui donne $86^{f},73$.

75. I. Il faut d'abord chercher le prix de chaque espèce de graine employée. Ces prix sont dans le rapport de 2 fois 152 fr. à 3 fois 122 fr., c'est-à-dire dans le rapport de 304 à 366. Pour diviser 90 fr. dans ce rapport, on fait d'abord la somme de ces nombres, qui est 670; on remarque alors que, si le nombre à partager était 670, les deux parties seraient précisément 304 et 366; si le nombre à partager était 1, les parties seraient 670 fois plus petites, c'est-à-dire $\frac{304}{670}$ et $\frac{366}{670}$; le nombre à partager étant réellement 90, les parties seront 90 fois plus grandes, c'est-à-dire $\frac{304 \times 90}{670}$ et $\frac{366 \times 90}{670}$, ou, en effectuant les calculs, $40^{f},84$ et $49^{f},16$...

Maintenant, puisque les 104 kilog. de la première espèce de graine valent 152 fr., on en aurait pour un franc 152 fois moins, ou $\frac{104^{k}}{152}$; et pour $40^{f},84$, on en aura un poids qui sera le produit de cette fraction par 40,84, c'est-à-dire $\frac{104^{k} \times 40,84}{152}$ ou $27^{k},942$...

Or, puisque 30 kilog. sont nécessaires pour ensemencer un hectare ou 100 ares, 1 kilog. ensemencerait la trentième partie de 100 ares, ou $\frac{10}{3}$ d'are; les $27^{k},942$ ont donc ensemencé une superficie, qui sera exprimée par le produit de $\frac{10^{ares}}{3}$ par 27,942, c'est-à-dire $\frac{10^{ares} \times 27,942}{3}$ ou $93^{ares},14$.

Mais cette superficie ne représente que les deux cinquièmes de la superficie totale de la prairie. En prenant la moitié de $93^{ares},14$, on aura le cinquième de la superficie cherchée; on trouve $46^{ares},57$; et en répétant ce dernier nombre 5 fois, on aura la superficie totale; on trouve $232^{ares},85$ ou 2 hectares 32 ares et 85 centiares.

II. On peut résoudre plus commodément le problème par l'algèbre. Soit x la superficie de la prairie exprimée en hectares;

la première partie, qui en est les deux cinquièmes, sera exprimée par $\frac{2x}{5}$; le poids de graine employée sur cette partie sera $30^k \times \frac{2x}{5}$ ou $12^k x$; le prix de cette graine sera le produit de $12x$ par le prix du kilogramme de graine, qui est $\frac{152^f}{104}$; ce sera donc $\frac{12x \times 152}{104}$ ou $\frac{1824x}{104}$.

En opérant de même pour la seconde partie, représentée par $\frac{3x}{5}$, on verra que le poids de graine employée est $30^k.\frac{3x}{5}$ ou $18^k x$; et que le prix de ce poids de graine est $\frac{18x.122}{104}$ ou $\frac{2196x}{100}$.

Or la somme de ces deux prix doit faire 90 fr.; on a donc l'équation

$$\frac{1824x}{104} + \frac{2196x}{104} = 90,$$

ou

$$\frac{4020x}{104} = 90;$$

d'où

$$x = \frac{90 \times 104}{4020} = \frac{9360}{4020} = 2^{hect},32835\ldots,$$

ou 2 hectares 32 ares et 84 centiares.

L'erreur de 1 centiare en plus, que présente le premier résultat, tient à ce qu'on a forcé le chiffre des centièmes dans le calcul du quotient de 304×90 par 670, et de ce que cette erreur primitive a été encore augmentée par les multiplications subséquentes.

76. I. Le prix de 100 kilog. de ray-grass anglais étant de 70 fr., le prix du kilogramme sera $0^f,70$; de même, le prix des 100 kilog. de ray-grass d'Italie étant 115 fr., le prix du kilogramme sera $1^f,15$.

Cela posé, on remarque que, puisque le prix de la graine employée pour la première prairie est double du prix de la graine employée pour la seconde, si la première prairie avait une étendue moitié moindre, c'est-à-dire de 23 ares, au lieu de 46, les prix des graines employées seraient égaux.

Or, pour obtenir ce prix pour chaque prairie, il faut multiplier le prix du kilogramme de graines par le nombre de

kilogrammes employés par are, et par le nombre d'ares. Mais, puisque le nombre de kilogrammes de graine employée par are est supposé le même, il faut que le produit du prix du kilogramme de graine par le nombre d'ares soit le même pour les deux prairies.

Pour la première, ce produit est $0^f,70 \times 23$ ou $16^f,10$; pour la seconde, ce sera $1^f,15$ multiplié par le nombre d'ares inconnu qui exprime la superficie de cette seconde prairie. Ces deux produits devant être égaux, on obtiendra le facteur inconnu en divisant le produit $16^f,10$ par le facteur connu $1^f,15$, ce qui donne exactement 14 ares.

II. La notation algébrique simplifie les raisonnements. Soit p le poids de graine employée par are dans chaque prairie, et soit x la superficie de la seconde prairie exprimée en ares.

Le prix de la graine employée pour la première prairie sera représenté par $0^f,70 \times p \times 46$. Le prix de la graine employée pour la seconde prairie sera représenté par $1^f,15 \times p \times x$. D'après l'énoncé, on devra avoir

$$0^f,70 \times p \times 46 = 1^f,15 \times p \times x \times 2.$$

Le facteur p disparaît des deux membres, et l'on obtient pour x la valeur

$$x = \frac{0^f,70 \times 46}{1^f,15 \times 2} = 14 \text{ ares},$$

comme ci-dessus.

77. I. On a vu que le prix de la graine employée est le produit de $0^f,70$ par le nombre inconnu de kilogrammes de graine employée par are, et par le nombre d'ares, qui est 46. Le produit des deux facteurs $0^f,70$ et 46 est $32^f,20$; ce nombre, multiplié par le nombre inconnu, doit donner $12^f,88$; on aura donc le nombre cherché en divisant $12^f,88$ par $32^f,20$, ce qui donne $0^k,4$ ou 4 hectogrammes de graine par are.

78. Le prix du kilogramme de graine de trèfle surpasse de $0^f,25$ le prix du kilogramme de mélange. Cette différence, multipliée par le nombre de kilogrammes de trèfle employé, c'est-à-dire par $28^k,50$, donne une somme de $7^f,125$ qui représente l'excès du prix de revient de la graine de trèfle employée sur le prix de la même quantité du mélange.

Le prix du kilogramme de ray-grass est inférieur de $0^f,35$ au prix du kilogramme de mélange; et si l'on multipliait $0^f,35$ par le nombre inconnu de kilogrammes de ray-grass employé, on

obtiendrait une somme qui représenterait la différence entre le prix de revient du ray-grass employé et le prix de la même quantité du mélange.

Or il faut que cette différence soit compensée par l'excès trouvé tout à l'heure. Il faut donc que $7^f,125$ soient égal au produit de $0^f,35$ par le nombre de kilogrammes cherché; on obtiendra donc ce nombre de kilogrammes en divisant $7^f,125$ par $0^f,35$, ce qui donne $20^k,357$..

II. Le même problème se résout plus aisément par l'algèbre. Soit x le nombre de kilogrammes de ray-grass employé.

Le prix du trèfle employé sera $1^f,30 \times 28,5$ ou $37^f,05$;
le prix total du ray-grass sera $0^f,70 \times x$.

Ainsi la dépense totale sera exprimée par $37^f,05 + 0^f,70 . x$.

Mais cette dépense est aussi égale au prix du kilogramme de mélange $1^f,05$ multiplié par le poids total de ce mélange, c'est-à-dire qu'elle est égale à $1^f,05\ (28,5 + x)$ ou à $29^f,925 + 1^f,05 . x$.

On aura donc l'équation

$$29^f,925 + 1^f,05 . x = 37^f,05 + 0^f,70 . x.$$

d'où l'on tire $(1^f,05 - 0^f,70)\, x = 37^f,05 - 29^f,925$

ou $0^f,35\, x = 7^f,125$

d'où $$x = \frac{7^f,125}{0^f,35} = 20^k,357..$$

comme ci-dessus.

79. Les 250 bottes à $51^f,50$ le cent, ou à $0^f,515$ la botte, valent 250 fois $0^f,515$, c'est-à-dire $128^f,75$. Le droit d'entrée étant de 6 fr. pour 100 bottes, ou de 3 fr. pour 50 bottes, sera de 5 fois 3 fr. ou de 15 fr. pour 5 fois 50 bottes ou 250 bottes. En ajoutant ces 15 fr. aux $128^f,75$ on obtient $143^f,75$ pour le prix de revient total. Mais puisque chaque botte pèse 5 kilog., les 250 bottes pèsent 250 fois 5 kilog., c'est-à-dire 1250 kilog.

Puisque 1250 kilog. valent $143^f,75$, un seul kilogramme vaudrait 1250 fois moins, ou $\frac{143^f,75}{1250}$, et 100 kilogrammes vaudront 100 fois plus, ou $\frac{143^f,75 \times 100}{1250}$, c'est-à-dire $11^f,50$.

80. Le prix de revient de 100 kilog. étant de $11^f,20$, le prix de revient d'un kilogramme serait de $0^f,112$. Les 300 bottes représentent un poids de 300 fois 5 kilog. ou de 1500 kilog.; le prix

de revient total est donc le produit de $0^f,112$ par 1500, c'est-à-dire 168 fr. Le droit d'entrée étant de 6 fr. pour 100 bottes, est de 3 fois 6 fr. ou 18 fr. pour 300 bottes; retranchant ces 18 fr. des 168, on obtient 150 fr. pour le prix des 300 bottes sur place. Le prix de 100 bottes est donc le tiers de cette somme ou 50 fr.

81. Les deux coupes étant supposées également productives, la prairie a produit, dans une seule coupe, la moitié de 82620 kilog. c'est-à-dire 41310 kilog. de fourrage. En divisant ce poids par le nombre d'hectares, qui est $3^h,4$ on aura la production par hectare et par coupe; on trouve 12150 kilog.

82. Puisque le fourrage vert perd les $\frac{7}{9}$ de son poids en passant à l'état de foin sec, le poids se trouve réduit aux $\frac{2}{9}$ de ce qu'il était. La prairie ayant produit 82620 kilog. de fourrage vert, a produit, en foin sec, les $\frac{2}{9}$ de ce nombre, c'est-à-dire 18360 kilog. La production d'un hectare, en fourrage vert, ayant été de 12150 kilog. par coupe, ou 24 300 kilog. en deux coupes, la production en foin sec a été les $\frac{2}{9}$ de ce nombre, ou 5400 kilog.

83. Une botte de foin sec pesant 5 kilog., les 100 bottes pèsent 500 kilog. Si 500 kilog. valent 48 fr., le kilogramme vaut 500 fois moins, ou $0^f,096$; et les 18360 kilog. fournis par la prairie entière auront pour valeur le produit de $0^f,096$ par 18360, c'est-à-dire $1762^f,56$.

Les 5400 kilog. fournis par hectare auront pour valeur le produit de $0^f,096$ par 5400, c'est-à-dire $518^f,40$.

84. Puisque 100 bottes ou 500 kilog. ont été payés $51^f,50$, le prix du kilogramme est le quotient de $51^f,50$ par 500, c'est-à-dire $0^f,103$. La valeur totale du fourrage sec étant $1523^f,37$, en divisant ce nombre par le prix du kilogramme, ou par $0^f,103$, on obtiendra le poids du fourrage sec; on trouve ainsi 14790 kilog. Mais ce poids n'est que les $\frac{2}{9}$ du poids du fourrage vert; on obtiendra donc le poids de celui-ci en divisant 14790 kilog. par $\frac{2}{9}$, ce qui donne 66555 kilog. Ce poids de fourrage vert ayant été obtenu en deux coupes égales, en en prenant la moitié on aura le poids d'une coupe; on trouve $33277^k,5$. Ce poids de fourrage étant produit par une superficie de $2^{hect},55$, on aura la production par hectare en divisant $33277^k,5$ par 2,55, ce qui donne 13050 kilog.

85. La consommation journalière en fourrage vert étant de $15^k,75$ pour 100 kilog. de bétail vivant, elle sera 36 fois plus considérable, c'est-à-dire de 567 kilog. pour 3600 kilog. de bétail. Quatre mois, dont deux de 30 jours et deux de 31 jours, font

122 jours. La consommation pendant ce temps sera donc de 122 fois 567 kilog., c'est-à-dire de 69174 kilog.

La consommation en fourrage sec étant 5 fois moindre que la consommation en fourrage vert, sera le cinquième de $15^k,75$, c'est-à-dire $3^k,15$ par jour, pour 100 kilog. de bétail vivant, et 36 fois plus considérable, ou $113^k,40$ pour 3600 kilog. de bétail. Si de 365 jours on retranche 122 jours, il reste 243 jours; en multipliant $113^k,40$ par 243 on aura la consommation en fourrage sec; on trouve $27556^k,2$.

Remarquons maintenant que les 69174 kilog. de fourrage vert trouvés plus haut représentent un poids de fourrage sec que l'on obtiendra en prenant les $\frac{2}{9}$ de ce nombre, ce qui donne 15372 kilog. Ajoutant ce nombre aux $27556^k,2$ trouvés ci-dessus, on obtient pour la consommation totale exprimée en fourrage sec $42925^k,2$.

Puisque la prairie produit 4500 kilog. de fourrage sec par hectare, on obtiendra sa superficie en divisant $42925^k,2$ par 4500 kilog. ce qui donne $9^h,5396$ ou 9 hectares, 53 ares et 96 centiares.

86. 1° Puisque 40 ares donnent annuellement 1440 kilog. de fourrage vert, 1 are en donnerait 40 fois moins, ou 36 kilog., et les 180 ares qui expriment la superficie de la prairie, en donneront 180 fois plus, ou 6480 kilog. La consommation journalière étant de $15^k,75$ pour 100 kilog. de bétail vivant, la consommation pour le même poids de bétail, pendant 122 jours, sera de 122 fois $15^k,75$, c'est-à-dire de $1921^k,50$. La consommation, pour ce même temps, rapportée au kilogramme de bétail vivant serait 100 fois moindre, ou $19^k,215$. Autant de fois ce nombre sera contenu dans 6480 kilog., autant il y aura de kilogrammes dans le poids vivant de bétail que la prairie pourra nourrir; on trouve $337^k,2$... ou environ 337 kilogrammes.

2° Le produit en fourrage vert étant de 6480 kilog., le produit en fourrage sec serait les $\frac{2}{9}$ de ce nombre ou 1440 kilog. Les 100 bottes ou 500 kilog. valant $38^f,50$, la valeur du kilogramme serait 500 fois moindre, ou $0^f,77$; la valeur des 1440 kilog. sera donc 1440 fois ce nombre, ou $110^f,88$.

87. Puisqu'un hectare produit $12^{hectol},50$ de froment, $2^{hecta},46$ en produiront une quantité qui sera le produit de $12^{hectol},50$ par 2,46 ou $30^{hectol},75$. Chaque hectolitre répondant à 167 kilog. de paille, le poids total de la paille fournie sera le produit de 167 kilog. par 30,75, c'est-à-dire $5135^k,25$.

88. Les 100 bottes ou les 500 kilogrammes valant $31^f,50$, le prix du kilogramme serait 500 fois moindre, ou $0^f,0315$. Le prix

des $5135^k,25$ trouvés au numéro précédent sera donc le produit de $0^f,0315$ par 5135,25, c'est-à-dire $161^f,76$.

Le poids de paille considéré contient autant de fois 100 bottes qu'il y a d'unités dans le quotient de $5125^k,25$ par 500 kilog., c'est-à-dire plus de 10 fois et moins de 11. En admettant que l'on acquitte les droits d'entrée pour 10 centaines de bottes seulement, il faudrait ajouter au prix ci-dessus le produit de $2^f,40$ par 10, c'est-à-dire 24 fr., ce qui donnerait en tout $185^f,76$.

89. A raison de 10 hectolitres par hectare, les $3^{hectares},60$ ont donné 10 hectolitres multipliés par 3,6, c'est-à-dire 36 hectolitres. Le poids de paille obtenu est donc le produit de 175 kilog. par 36, c'est-à-dire 6300 kilog. Si 6300 kilog. ont été payés $428^f,40$, un kilogramme vaudrait 6300 fois moins, ou $\frac{428^f,40}{6300}$; et les 100 bottes représentant un poids de 500 kilog. vaudront 500 fois plus, ou $\frac{428^f,40 \times 500}{6300}$. En effectuant ce calcul, on trouve 34 fr.

90. La production d'un hectare en avoine étant de 16 hectolitres, la production en paille sera le produit de 47 kilog. par 16, c'est-à-dire 752 kilog. A raison de 41 fr. les 1000 kilog., un kilogramme vaudrait la millième partie de 41 fr. ou $0^f,041$; et 752 kilog. vaudront le produit de $0^f,041$ par 752, c'est-à-dire $30^f,832$. Telle est la valeur de la paille produite par un hectare. Pour obtenir la superficie du champ, il suffira donc de chercher combien de fois cette valeur est contenue dans le prix total, c'est-à-dire qu'il n'y aura qu'à diviser $56^f,75$ par 30,832, ce qui donne $1^{hect},8406$ ou 1 hectare 84 ares et 6 centiares.

91. A raison de 167 kilog. de paille pour 1 hectolitre de froment, les $14^{hectol},50$ répondront à un poids de paille représenté par $167^k \times 14,5$, c'est-à-dire à $2421^k,5$ par hectare; et pour $3^{hectares},56$ on aura $2421^k,5 \times 3,56$ ou $8620^k,54$. Les 100 bottes ou 500 kilog. valant $29^f,50$, le kilogramme vaudrait 500 fois moins ou $0^f,059$; les $8620^k,54$ vaudront donc $0^f,059 \times 8620,54$ ou $508^f,61$.

A raison de 175 kilog. de paille pour 1 hectolitre de seigle, $9^{hectol},80$ représenteront un poids de paille exprimé par $175^k \times 9,8$, c'est-à-dire 1715 kilog. par hectare; et pour $2^{hectares},20$ on aura $1715^k \times 2,2$ ou 3773 kilog. Les 100 bottes ou 500 kilog. valant $32^f,80$, le kilogramme vaudrait 500 fois moins ou $0^f,0656$; les 3773 kilog. vaudront donc $0^f,0656 \times 3773$, c'est-à-dire $247^f,51$.

A raison de 47 kilog. de paille pour 1 hectolitre d'avoine, les 16 hectolitres représenteront un poids de paille exprimé par

$47^k \times 16$, c'est-à-dire 752 kilog. par hectare; et pour $1^{\text{hectare}},84$ on aura $752^k \times 1,84$ ou $1383^k,68$. Les 1000 kilog. valant $38^f,60$, le kilogramme vaudrait $0^f,0386$; et les $1383^k,68$ vaudront $0^f,0386 \times 1383,68$, c'est-à-dire $53^f,41$.

L'hectare de prairie artificielle produisant annuellement 25200 kilog. de fourrage vert, on aura le produit en fourrage sec en prenant les $\frac{2}{9}$ de ce nombre, ce qui donne 5600 kilog. Pour $1^{\text{hectare}},66$ on aura donc $5600^k \times 1,66$, c'est-à-dire 9296 kilog. de foin sec.

L'are de prairie naturelle produisant 45 kilog. de fourrage vert, produirait les $\frac{2}{9}$ de ce nombre ou 10 kilog. de fourrage sec; et les 87 ares produiront $10^k \times 87$ ou 870 kilog.

Si l'on ajoute les nombres 9296 kilog. et 870 kilog., on trouve 10166 kilog. de foin sec pour le produit annuel des deux prairies. A raison de $47^f,50$ les 100 bottes ou les 500 kilog., le kilogramme vaudrait 500 fois moins ou $0^f,095$; les 10166 kilog. vaudront donc $0^f,095 \times 10166$ ou $965^f,77$.

La valeur totale demandée est la somme des nombres,

	$508^f,61$
	$247,51$
	$53,41$
	$965,77$
c'est-à-dire.....	$1775^f,30$

92. 1° Une consommation journalière de $5^k,5$ de foin par cheval donne pour l'année entière $5^k,5 \times 365$ ou $2007^k,5$; et, pour 940 chevaux, $2007^k,5 \times 940$ ou 1887050 kilog. A raison de 38 fr. les 100 bottes ou les 500 kilog., un kilogramme vaudrait $0^f,076$; et le nombre total de kilogrammes ci-dessus obtenu vaudra $0^f,076 \times 1887050$ ou $143415^f,80$.

Une consommation de 5 kilog. de paille, soit une botte par jour, donne 365 bottes par an et par cheval; pour 940 chevaux, la consommation sera de 365×940 ou 343100 bottes, ou, ce qui revient au même, 3431 centaines de bottes. A raison de 28 fr. les 100 bottes, la valeur de la paille consommée sera donc $28^f \times 3431$, c'est-à-dire..... 96068^f,

Et ajoutant cette somme à la précédente.....	$143415,80$
on obtient une dépense totale de.....	$239483^f,80$

2° Les 1887050 kilog. de fourrage sec représentent un poids de fourrage vert que l'on obtiendra en divisant ce nombre par $\frac{2}{9}$; on trouve ainsi : 8491725 kilog. L'étendue de prairies nécessaire à cette production s'obtiendra en divisant ce nombre

par la production d'un hectare, ou 26100 kilog.; on trouve 325 hectares 35 ares.

Les 343100 bottes de paille représentent un poids de $5^k \times 343100$ ou 1715500 kilog. En divisant ce nombre par 167 kilog., poids de la paille correspondante à 1 hectolitre de blé, on aura la production de blé en hectolitres des terres dont on cherche l'étendue; on trouve ainsi : $10272^{hectol},45$. On aura donc l'étendue cherchée en divisant ce nombre par la production d'un hectare, c'est-à-dire par 12 hectolitres. On trouve ainsi : 856 hectares 3 ares et 75 centiares.

En ajoutant à cette superficie celle qui a été trouvée plus haut, c'est-à-dire 325 hectares 35 ares, on obtient pour la superficie totale demandée 1181 hectares, 38 ares et 75 centiares.

§ 4. Bestiaux et viande de boucherie.

93. Les 382 kilogrammes à $1^f,35$ valent..... $515^f,70$
341 — 1,25 — 426,25
280 — 0,95 — 266,00
59 — 1,75 — 103,25
Prix total... $1311^f,20$

94. Le poids total des 8 bœufs est 8 fois 340 kilog. ou 2720 kilog.; en divisant le prix total 3536 fr. par ce nombre de kilog., on aura le prix du kilog.; on trouve $1^f,30$.

95. Le prix d'un veau s'obtiendra en divisant $4972^f,50$ par 50, ce qui donne $99^f,45$. En divisant ce prix par $1^f,70$ qui est le prix d'un kilog., on aura le nombre de kilog. cherché; on trouve $58^k,5$.

96. Les 41 vaches, pesant 300 kilog. chacune, font un poids de..... 12300^k
Les 69 vaches, pesant 260 kilog. chacune, font un poids de..... 17940
Les 60 vaches, pesant 240 kilog. chacune, font un poids de..... 14400
Poids total... 44640^k

Les 12300 kilog. à $1^f,02$ représentent une valeur de. $12546^f,00$
17940 à 0,94 — 16863,60
14400 à 0,86 — 12384,00
Valeur totale... $41793^f,60$

Pour obtenir le prix moyen du kilogramme, il faut diviser la

valeur totale par le poids total, ou 41793^{f},60 par 44640; ce qui donne 0^{f},936.... ou environ 0^{f},94.

97. On aura le nombre total de kilog. achetés, en divisant le prix total 18468 fr. par le prix du kilog. 1^{f},44, ce qui donne 12825 kilog. Pour avoir le poids moyen d'un mouton, on n'aura plus qu'à diviser ce poids total par le nombre des moutons, c'est-à-dire par 342; on trouve ainsi : 37^{k},5.

98. Les 1850 bœufs, pesant 360 kilog. chacun, font un poids de . . . . . 666000^{k}

Les 170 vaches, pesant 300 kilog. chacune, font un poids de 51000

Les 550 veaux, pesant 60 kilog. chacun, font un poids de 18000

Les 10000 moutons, pesant 37^{k},5 chacun, font un poids de 375000

Poids total . . . 1110000^{k}

Les 666000 kilog.,	à 1^{f},25,	valent.		832500^{f}
51000	— 0 ,94,	—		47940
18000	— 1 ,70,	—		30600
375000	— 1 ,46,	—		547500
		Valeur totale. . .		1458540^{f}

99. Le prix demandé s'obtiendra en divisant la valeur totale 1458540 fr., par le nombre total de kilog. 1110000; ce qui donne 1^{f},3114, ou environ 1^{f},31.

100. Puisque 3 veaux payent autant qu'un bœuf, le transport de 15 veaux revient à celui de 5 bœufs; et puisque 5 moutons payent autant qu'un bœuf, le transport de 35 moutons revient à celui de 7 bœufs. Le transport des bestiaux énoncés revient donc au même prix que celui de 8, plus 5, plus 7 bœufs, ou que celui de 20 bœufs. On aura donc le prix du transport d'un bœuf en divisant 740 fr. par 20, ce qui donne 37 fr. Pour avoir le prix du transport d'un veau, on n'aura qu'à prendre le tiers de 37 fr., qui est 12^{f},33; et pour obtenir le prix du transport d'un mouton, on divisera 37 fr. par 5, ce qui donne 7^{f},40.

La distance parcourue étant de 110 kilomètres, on aura le prix du transport par kilomètre en divisant les nombres ci-dessus obtenus par 110 :

Le quotient de	37 fr. par 110 est	0^{f},336...
—	12^{f},33 par 110 est	0 ,112...
—	7 ,40 par 110 est	0 ,067...

101. Le poids de bœuf débité est le produit de 360 kilog. par $2\frac{1}{2}$, c'est-à-dire. . . . . 900^{k}
Le poids du veau débité est le produit de 60 kilog. par $2\frac{1}{4}$, ou. 135
Le poids du mouton débité est le produit de 37^{k},5 par 5, ou. . . . . 187 ,5

Poids total. . . 1222^{k},5

102. Pour avoir le poids total de viande débitée par an, il suffit de multiplier par 52 le poids débité par semaine, ou 1222^{k},5 ; ce qui donne 63570 kilog.

Quant à la valeur que ce poids représente, on remarquera d'abord que 900 kilog. de bœuf à 1^{f},38 le kilog. font. . 1242^{f},00
— 135 kilog. de veau à 1 ,46 — . . . . 191 ,10
— 187^{k},5 de mouton à 1 ,32 — . . . . 247 ,50

Valeur totale, par semaine. . . 1680^{f},60

En multipliant par 52, on obtiendra la valeur totale de la viande débitée par an ; on trouve 87391^{f},20.

103. Le poids de viande débitée est le produit de 63570 kilog. par 501, c'est-à-dire 31848570 kilog.

La valeur que ce poids représente est le produit de 87391^{f},20 par 501, c'est-à-dire 43782991^{f},20.

104. Il a été la différence entre 49115109 kilog. et 31848570 kilog., c'est-à-dire 17266539 kilog.

105. Le poids total de viande consommée en 1854 est la somme des nombres 49115109 kilog. et 13964028 kilog., c'est-à-dire 63079137 kilog.

Ce nombre, divisé par 1053262 donne pour la consommation annuelle d'un habitant 59^{k},889. En divisant ce nouveau nombre par 365, on obtiendra la consommation moyenne par habitant et par jour ; on trouve 0^{k},1640..., ou 164 grammes.

106. La ration journalière pour une personne étant de 300 grammes, la consommation annuelle serait le produit de ce nombre par 365, c'est-à-dire 109500 grammes, ou 109^{k},5. La consommation annuelle de la ville de Paris serait le produit de ce nombre par 1053262, c'est-à-dire 115332189 kilog.

107. Pour obtenir le total des frais généraux de l'année, on formera le tableau suivant :

Loyer.....	1500f,
Droit proportionnel de 10 pour 100.....	150
Patente.....	75
Aux employés de l'abattoir.....	40
Gages d'un étalier à 25 fr. la semaine...	1300
— 1er garçon 20 —	1040
— 2e — 7 —	364
— domestique 5 —	260
Nourriture de 6 personnes à 1f,75 par jour ; soit 638f,75 par an.....	3832,50
Autres frais à 60 fr. la semaine.....	3120
Total...	11681f,50

Cette somme, divisée par le nombre de kilogrammes débités annuellement, c'est-à-dire par 63570, donnera le nombre demandé ; on trouve 0f,183..., ou environ 18 centimes.

108. Le $\frac{1}{12}$ de 288 kilog. ou 24 kilog. à 3 fr. valent..	72f,00
Le $\frac{1}{3}$ — — ou 96 — à 1f,95 —	187,20
Le $\frac{1}{4}$ — — ou 72 — à 1,55 —	111,60
Le $\frac{1}{6}$ — — ou 48 — à 1,15 —	55,20
Le $\frac{1}{6}$ — — ou 48 — à 0,85 —	40,80
Les 50 kilog. de cuir à 0f,56.....	28,00
Les 37k,5 de suif à 0f,80.....	30,00
Ajoutant le prix des abats et issues.....	9,50
on obtient, pour le prix total de la vente.....	534f,20

D'un autre côté, le prix d'achat est le produit de 1f,03 par 383, c'est-à-dire..... 394f,49

Ajoutant 383 fois 0f,12333..., c'est-à-dire.....	47,24
plus 383 fois 0f,18.....	68,93
on obtient pour la dépense totale.....	510f,60
Retranchant cette dépense de la recette totale.....	534,30
on obtient pour le bénéfice net du boucher.....	23f,64

Le taux de ce bénéfice est le rapport de 23f,64 au prix d'achat 394f,49 ; en faisant la division on obtient 0,05992... ; le taux demandé est donc à très-peu près 6 pour 100.

109. C'est le quotient de 23f,64 par 534,30, c'est-à-dire 0,0442; le taux demandé est donc 4,42 pour 100.

110. On a trouvé au n° **102** que chaque boucher vendait par an pour 87391f,30 de viande environ ; si son bénéfice était de 4,42 pour 100 sur le prix de vente, on l'obtiendrait en multipliant la somme ci-dessus par 4,42 et divisant le produit par 100, ce qui donne 3862f,69.

111. Le taux du bénéfice est alors le quotient de 12000 fr. par 87391f,20 , c'est-à-dire 0,1373... ; c'est-à-dire que le taux demandé est d'environ 13,7 pour 100.

§ 5. Vins, esprits, huiles.

112. On aura à payer, 1°.... 15 fois 3f,50 ou.....	52f,50
2° 50 fois 0f,75 ou.....	37 ,50
3° 50 fois 0f,20 ou.....	10 ,00
Total...	100f,00

113. Les 267 bouteilles de 0lit,9, chacune représentent une capacité totale de 267 fois 0lit,9, c'est-à-dire 240lit,3. Pour obtenir le prix du litre, on n'aura qu'à diviser 220 fr. par 240,3, ce qui donne 0f,9113..., ou environ 0f,91.

Le prix de la grande bouteille s'obtiendra en divisant 220 fr. par 267, ce qui donne 0f,8239..., ou environ 0f,82.

Enfin, le prix de la bouteille de 8 décilitres s'obtiendra en prenant les 0,8 du prix du litre, c'est-à-dire en multipliant 0f,9113 par 0,8, ce qui donne 0f,7290..., ou environ 0f,73.

114. Le carré de 0,56 est de.....	0,3136
le carré de 0,64 est 0,4096, dont le double est.....	0,8192
la somme de ces deux nombre est donc.....	1,1328

multipliant par 0,88 on obtient pour produit 0,996864; multipliant enfin par 0,262, on trouve 0mc,261178..., ou à très-peu près 261 litres.

115. La somme des deux droits est 18 fr.; les 2 décimes ou 0f,20 par franc donnent 18 fois 0f,20 , c'est-à-dire 3f,60.

Ajoutant ce nombre à 18 fr., on obtient 21f,60 pour l'ensemble des droits à payer par hectolitre. Pour obtenir le nombre demandé, il reste à répéter les droits par hectolitre autant de fois

qu'il y a d'hectolitres, c'est-à-dire qu'il reste à multiplier $21^f,60$ par 2,333, ce qui donne $50^f,39$.

116. Il faut évaluer d'abord la capacité de la pièce :

Le carré de 0,52 est	0,2704
le carré de 0,61 est 0,3721, dont le double est.	0,7442
En somme. . .	1,0146

Multipliant par 0,90, on trouve 0,91314; multipliant enfin par 0,262, on obtient $0^{mc},23924$..., ou environ 239 litres, ou $2^{hectol},39$.

A raison de $21^f,60$ par hectolitre, les droits à acquitter seront de $21^f,60 \times 2,39$ ou $51^f,62$.

La barrique, entrée dans Paris, coûte donc 1320 fr., plus 11 fr., plus encore $51^f,62$, c'est-à-dire $1382^f,62$.

En divisant la capacité de la pièce ou 239 litres par $0^l,75$, on aura le nombre de bouteilles qu'elle renferme; on trouve ainsi 318,76. Pour avoir le prix de revient de chaque bouteille, reste à diviser le prix total $1382^f,62$ par le nombre de bouteilles 318,66, ce qui donne $4^f,338$,.., ou environ $4^f,34$.

117. Le prix des 22 barriques, à leur arrivée à la barrière, est le produit de $0^f,90$ par 5260, c'est-à-dire 4734 fr.

Les droits d'entrée s'élevant en somme à $21^f,60$ par hectolitre, le commerçant aura à payer $21^f,60 \times 52,6$ ou $1136^f,16$.

Le prix de revient est donc 4734 fr. plus $1136^f,16$ ou $5870^f,16$.

Puisqu'on veut faire un bénéfice de 30 pour 100 ou de 3 dixièmes, on devra vendre ce vin $5870^f,16$ plus les $\frac{3}{10}$ de cette somme, c'est-à-dire $5870^f,16$ plus $1761^f,05$, ou en somme $7631^f,21$.

Or, après le mouillage, la quantité du liquide ayant augmenté de 25 litres par hectolitre, sera devenue égale au produit de $52^h,60$ par 1,25, c'est-à-dire à $65^h,75$ ou 6575 litres.

En divisant cette quantité par $0^l,75$ on obtiendra le nombre de bouteilles qu'il représente; on trouve $8766^b,66$.

Pour avoir le prix de chaque bouteille, il reste à diviser le prix total par le nombre de bouteilles, ou $7631^f,21$ par 8766,66, ce qui donne $0^f,8704$..., ou environ $0^f,87$.

118. Les 230 litres à $1^f,05$ valent. . . . . $241^f,50$
les 450 — $0^f,85$ — 382,50

le prix de revient est donc. . . . . $624^f,00$

Puisque l'on veut faire un bénéfice de 25 pour 100, on devra vendre le mélange 624 fr., plus le quart de 624 fr., c'est-à-dire plus 156 fr., en somme 780 fr.

Or la quantité totale du liquide mélangé se compose de 230 litres, plus 450 litres, plus encore 40 litres; en somme 720 litres. En divisant ce nombre par $0^{lit},75$, on obtiendra le nombre de bouteilles qu'il représente; on trouve 960.

Pour obtenir le prix de la bouteille, il reste à diviser le prix total par le nombre de bouteilles, ou 780 fr. par 960, ce qui donne $0^{f},8125$, ou un peu plus de $0^{f},80$.

119. Ajouter 20 litres d'eau par hectolitre, c'est-à-dire un cinquième d'eau, revient à élever d'un cinquième le prix du vin. On peut donc, pour résoudre le problème, faire abstraction de l'eau ajoutée, et élever d'un cinquième le prix de la bouteille du mélange, c'est-à-dire porter ce prix de 60 centimes à $60^{c} + 12^{c}$, ou à 72 centimes. On obtiendra le prix correspondant du litre, en divisant $0^{f},72$ par 0,75, ce qui donne $0^{f},96$.

Dans cette hypothèse, chaque litre à $1^{f},10$ que l'on vendra $0^{f},96$, occasionnera une perte de $0^{f},14$; les 24 hectolitres, ou 2400 litres de cette qualité de vin, occasionneront donc une perte de 2400 fois $0^{f},14$, c'est-à-dire de 336 fr.

Au contraire, chaque litre à $0^{f},80$, que l'on vendra $0^{f},96$, donnera lieu à un bénéfice de $0^{f},16$.

Comme il faut que le gain compense la perte, le nombre de litres de la seconde qualité doit être tel, qu'en multipliant $0^{f},16$ par ce nombre, on obtienne pour produit 336 fr. On déterminera donc le nombre cherché en divisant 336 fr. par $0^{f},16$, ce qui donne 2100. Ainsi il faudra prendre 21 hectolitres de la seconde qualité.

120. La valeur moyenne du litre, pour les vins importés en futailles, s'obtiendra en divisant 12778667 fr. par 18255239, ce qui donne $0^{f},70$.

La valeur moyenne de la bouteille, pour les vins importés en bouteilles, s'obtiendra de même en divisant 330932 fr. par 120339, ce qui donne $2^{f},75$.

121. La valeur moyenne demandée s'obtiendra en divisant 133703271 fr. par 1210451, ce qui donne $110^{f},45$.

122. La quantité totale de vins consommée est la somme des nombres 1063504 hectol. et 10345 hectol., c'est-à-dire 1073849 hectol., ou 107384900 litres. La consommation annuelle par habitant s'obtiendra en divisant ce nombre par 1053000, ce qui donne $101^{lit},98$. La consommation journalière sera le quotient de ce dernier nombre par 365, c'est-à-dire $0^{lit},279$, ou, à très-peu près, 28 centilitres.

123. On a vu, au n° **115**, que l'ensemble des droits s'élève à 21^{f},60 par hectolitre. Les droits acquittés pour l'entrée de 1063504 hectolitres, s'élèveront donc à 1063504 fois 21^{f},60, c'est-à-dire à 22971686^{f},40.

Pour les vins en bouteilles, les droits étant supérieurs de 7 fr. par hectolitre à ceux que payent les vins en cercle, on aura l'ensemble des droits par hectolitre en ajoutant 7 fr. à 21^{f},60, ce qui donne 28^{f},60. Les droits acquittés pour 10345 hectolitres vaudront donc 10345 fois 28^{f},60, c'est-à-dire 295867 fr.

En additionnant les deux nombres 22971686^{f},40, et 295867 fr., on obtiendra le total des droits acquittés; on trouve ainsi 23267553^{f},30.

124. Les 630 litres, ou 6^{hectol},30, à 140 fr., valent. . 882^{f},00
725 litres, ou 7^{hectol},25, à 125 fr., valent. . 1087 ,50
45 hectolitres, à 110 fr., valent. . . . . 4950 ,00
Total. . . 6919^{f},50.

125. L'eau-de-vie étant à 52 degrés, on aura le volume d'alcool contenu en multipliant le volume total, 6^{hectol},30, par 0,52, ce qui donne 3^{hectol},276.

Les droits à acquitter, par hectolitre, se composent d'abord de 23^{f},50, plus 66 fr., c'est-à-dire 89^{f},50, plus des 2 décimes par franc, ou du dixième de 89^{f},50, c'est-à-dire 8^{f},95; en somme 98^{f},45. Multipliant ce nombre par 3,276, on obtient 322^{f},52 pour l'ensemble des droits que devra acquitter la pièce d'eau-de-vie.

Le trois-six du Languedoc étant à 86 degrés, la quantité d'alcool contenue dans les 7^{hectol},25 est le produit de ce nombre par 0,86, c'est-à-dire 6^{hectol},235. Multipliant 98^{f},45 par ce nombre, on obtient 613^{f},84 pour les droits à acquitter.

Le trois-six de betterave étant à 90 degrés, la quantité d'alcool pur contenue dans les 45 hectolitres est le produit de ce nombre par 0,90, c'est-à-dire 40,5. Multipliant 98^{f},45 par ce nombre, on obtient pour les droits à acquitter 3987^{f},23.

126. A la rencontre de la colonne verticale qui porte pour titre 85^{c} et de la colonne horizontale qui répond à 28 degrés, on trouve les deux nombres 81,2 et 987. Le premier de ces deux nombres nous apprend qu'à la température de 15 degrés le liquide spiritueux dont il s'agit marquerait 81,2 à l'alcoomètre, c'est-à-dire que sa force réelle est 81,2. Le second nombre nous apprend que la quantité de ce liquide qui occupe 1000 litres à 28 degrés, n'en occuperait que 987 à 15 degrés. Ainsi, à 15 de-

grés, on aurait 987 litres d'esprit contenant les 0,812 de leur volume d'alcool pur. Le volume d'alcool pur contenu s'obtiendra donc en multipliant 987 litres par 0,812, ce qui donne $801^{lit},44$; c'est la richesse demandée.

127. A la rencontre de la colonne verticale qui a pour titre 45^c, et de la colonne horizontale qui répond à 6 degrés, on trouve les deux nombres 48,4 et 1007. La force réelle de l'eau-de-vie considérée est donc 48,4; et une quantité de cette eau-de-vie qui occupe 1000 litres à la température de 6 degrés, en occuperait 1007 à 15 degrés. On aura donc la richesse demandée en multipliant 1007 par 0,484, ce qui donne $487^{lit},39$.

128. Les nombres donnés 78^c et $2\frac{1}{2}$ degrés ne se trouvant pas dans la table, on opérera de la manière suivante :

Supposons d'abord que la température soit 2 degrés. Le nombre 78^c est compris entre les nombres 75^c et 80^c que donne la table. A ces nombres et à la température 2 degrés, correspondent dans la table les forces 78,9 et 83,7, qui diffèrent de 4,8; ainsi, à la température de 2 degrés, la force réelle augmente de 4,8, quand la force apparente passe de 75^c à 80^c, c'est-à-dire quand elle augmente de 5^c; si la force apparente passe de 75^c à 78^c, c'est-à-dire si elle augmente de 3^c, on peut donc admettre que la force réelle augmentera des $\frac{3}{5}$ de 4,8, c'est-à-dire de 2,88 ou de 2,9, et s'élèvera par conséquent de 78,9 à 78,9 + 2,9, ou à 81,8.

En opérant de même à la température de 3 degrés, on trouverait 81,4. On peut donc admettre qu'à la température de $2\frac{1}{2}$ degrés, la force réelle est la moyenne entre 81,8 et 81,4, c'est-à-dire 81,6.

Quant au volume du liquide, la table montre que la quantité qui occupe 1000 litres à 2 degrés, en occuperait 1012 à 15 degrés, et que celle qui occupe 1000 litres à 3 degrés, en occuperait 1011 à 15 degrés. On peut donc admettre que celle qui occupe 1000 litres à $2\frac{1}{2}$ degrés, occuperait à 15 degrés la moyenne en 1012 et 1011, c'est-à-dire 1011,5.

On obtiendra donc la richesse demandée en multipliant $1011^{lit},5$ par 0,816, ce qui donne $825^{lit},38$.

129. Pour vérifier l'identité du liquide, il faut déterminer sa force réelle à Montpellier et à Paris. Pour une force apparente de 85^c et une température de 25 degrés, la table donne une force réelle de $82^c,1$.

Pour 10 degrés, et pour des forces apparentes de 80^c et 85^c, la table donne des forces réelles de 81,5 et 86,4, qui diffèrent de $4^c,9$.

Quand la force apparente augmente de 5^c, la force réelle augmente donc de $4^c,9$; si la force apparente augmentait de 1^c, la force réelle augmenterait du cinquième de $4^c,9$, c'est-à-dire de $0^c,98$; si la force apparente augmente de 0,6, la force réelle augmentera donc du produit de $0^c,98$ par 0,6, c'est-à-dire de $0^c,59$. En ajoutant ce nombre à 81,5, on aura la force réelle à Paris; on trouve $82^c,09$, qui diffère très-peu de $82^c,1$, trouvé plus haut.

On peut donc admettre que le liquide n'a pas été altéré.

130. Pour répondre à cette question, il faut savoir ce que deviennent 700 litres de l'esprit dont il s'agit en passant de 25 degrés à 10 degrés. Or, à la force apparente 85^c, et à la température 25 degrés, correspond le nombre 990; ce nombre indique que 1000 litres de cet esprit à 25 degrés n'en occuperaient plus que 990 à 15 degrés. Un litre serait donc réduit à $0^{lit},990$ par le même changement de température, et 700 litres deviendraient $700^{lit} \times 0,990$, ou 693 litres.

A une température de 10 degrés, et à une force apparente de 80^c à 85^c, répond le nombre 1005, qui montre que 1000 litres à 10 degrés en occuperaient 1005 à 15 degrés. Si 1005 litres se réduisent à 1000 litres, en passant de 15 degrés à 10 degrés, un seul litre se réduirait à $\frac{1000}{1005}$, et, par conséquent, $772^{lit},2$ se réduiront à $\frac{693^{lit} \times 1000}{1005}$, c'est-à-dire à $689^{lit},55$. Ce nombre, différant très-peu du volume trouvé à Paris, on peut admettre que le volume du liquide n'a pas été altéré.

131. On a vu, au n° **125**, que l'ensemble des droits à acquitter pour l'entrée dans Paris des liquides spiritueux, s'élève à $98^f,45$ par hectolitre. Il s'agit donc de déterminer le volume d'alcool pur que la pièce contiendrait, à la température de 15 degrés.

Pour une force apparente de 50^c, et une température de 10 degrés, la table donne une force réelle de $51^c,8$, et un volume de 1004 litres (pour 1000 litres à 15 degrés). Puisque 1000 litres à 10 degrés en donnent 1004 à 15 degrés, un seul litre à 10 degrés en donnerait 1,004 à 15 degrés, et 629 litres à 10 degrés en donneront, à 15 degrés, un nombre marqué par $629 \times 1,004$, ou $531^{lit},5$. La quantité d'alcool pur contenue est le produit de ce nombre par 0,518, c'est-à-dire $327^{lit},1$, ou $3^{hectol},27$. Multipliant $98^f,45$ par ce nombre, on obtiendra la somme demandée; on trouve $321^f,53$.

132. Pour une force apparente de 90^c, et une température de 30 degrés, la table donne une force réelle de 86^c, et un volume

de 985 litres (pour 1000 litres à 15 degrés). En raisonnant comme au numéro précédent, on verra que pour obtenir le volume d'alcool pur que la pièce contiendrait à 15 degrés, il faut multiplier 724 litres par 0,985, ce qui donne d'abord $713^{lit},14$, et multiplier ce résultat par 0,86, ce qui donne $613^{lit},44$, ou $6^{hectol},13$. On obtiendra ensuite le montant des droits à acquitter en multipliant $98^{f},45$ par 6,13, ce qui donne $603^{f},50$.

133. On a vu que la force d'un esprit, à 15 degrés, est le rapport entre le volume d'alcool contenu et le volume total de l'esprit. Après le mouillage, le volume d'alcool est encore le même, mais le volume total a augmenté. Si donc on veut comparer les forces d'un même esprit avant et après le mouillage, cela reviendra à comparer deux fractions dont le numérateur est le même (c'est le volume d'alcool contenu), et dont le dénominateur est différent (c'est le volume total); les forces comparées sont donc en raison inverse des dénominateurs des deux fractions, c'est-à-dire en raison inverse des volumes. On peut dire également que les volumes sont en raison inverse des forces. Si donc on appelle x le volume cherché, on devra avoir

$$\frac{x}{730}=\frac{80}{75}, \quad \text{d'où} \quad x=730^{lit}\times\frac{80}{75}=778^{lit},66.$$

Le raisonnement employé ci-dessus devient plus sensible par l'emploi des notations algébriques. Si l'on appelle f la force d'un esprit, a le volume d'alcool contenu, et V le volume total, f' et V' la force et le volume après le mouillage, on aura par définition

$$f=\frac{a}{V} \quad \text{et} \quad f'=\frac{a}{V'};$$

d'où l'on tire

$$\frac{f}{f'}=\frac{a}{V}\times\frac{V'}{a}=\frac{V'}{V},$$

c'est-à-dire que les forces sont en raison inverse des volumes.

134. D'après la règle donnée au numéro précédent, on obtiendra le volume demandé en multipliant 620 litres par 52, et divisant le produit par 50, ce qui donne $644^{lit},8$.

135. La table indique que, pour abaisser la force d'un esprit de 90° à 85°, il faut à 1000 litres de l'esprit supérieur ajouter 66 litres d'eau; à 1 litre de l'esprit supérieur il faudrait donc ajouter $0^{lit},066$ d'eau, et à 730 litres de l'esprit supérieur,

il faudra ajouter une quantité d'eau marquée par $0^{lit},066 \times 730$, ou $48^{lit},18$, ce qui porterait le volume total à $778^{lit},18$, s'il n'y avait pas eu de contraction.

Mais le volume final peut s'obtenir par la règle du n° **135**, en multipliant les 730 litres par 90, et divisant le produit par 85, ce qui donne $772^{lit},94$.

La contraction qui s'est opérée est la différence des nombres $778^{lit},18$ et 772,94, c'est-à-dire $5^{lit},24$.

136. La table indique que pour abaisser 1000 litres d'esprit de 55^c à 50^c, il faut ajouter 103 litres d'eau; pour abaisser 1 seul litre il faudrait ajouter $0^{lit},103$ d'eau, et pour abaisser 540 litres il faudra une quantité d'eau marquée par $0^{lit},103 \times 540$, c'est-à-dire $55^{lit},62$, ce qui porterait le volume total à $595^{lit},62$ sans la contraction. Mais le volume final doit être réellement

$$540^{lit} \times \frac{55}{50}, \quad \text{ou} \quad 594^{lit}.$$

La contraction sera donc de $1^{lit},62$.

137. Chaque litre de l'esprit le plus fort contient $0^{lit},90$ d'alcool; il en contient donc $0^{lit},05$ de plus que ne doit en contenir le mélange; les 450 litres de cet esprit contiendront donc en trop $0^{lit},05 \times 450$, c'est-à-dire $22^{lit},50$ d'alcool.

Au contraire, chaque litre de l'esprit le plus faible contient $0^{lit},75$ d'alcool; il en contient donc $0^{lit},10$ de moins que ne doit en contenir le mélange. Pour que la quantité d'alcool en trop fournie par l'esprit le plus fort soit compensée par la quantité d'alcool qui manque à l'esprit le plus faible, il faut prendre de ce dernier esprit un nombre de litres tel, qu'en multipliant $0^{lit},10$ par ce nombre, on trouve pour produit $22^{lit},50$. On obtiendra donc le nombre de litres cherché en divisant $22^{lit},50$ par $0^{lit},10$, ce qui donne 225 litres.

138. Pour établir cette relation, il sera commode d'employer des notations algébriques.

Désignons par f et F les forces inférieure et supérieure, et par m la force moyenne; appelons u le volume de l'esprit le plus faible, v le volume de l'esprit le plus fort, V le volume du mélange. Soit a le nombre de litres d'eau nécessaires, d'après la table du n° **135**, pour amener 1000 litres d'esprit de la force moyenne m à la force inférieure f; et soit enfin b le nombre de litres d'eau nécessaires, d'après la même table, pour amener 1000 litres d'esprit de la force supérieure F à la force moyenne m.

D'après ce qu'on a vu au n° **135**, la quantité d'eau nécessaire pour amener le volume v de l'esprit supérieur à la force moyenne est

$$\frac{v.b}{1000}.$$

Soit w le volume d'esprit de force moyenne qui pourrait être ramené par le mouillage à un volume u de l'esprit inférieur; on aura, en vertu de la loi démontrée au n° **135**,

$$[1] \qquad \frac{w}{u} = \frac{f}{m}, \quad \text{d'où} \quad w = \frac{uf}{m},$$

et la quantité d'eau qu'il faudrait ajouter au volume w, pour l'amener de la force moyenne à la force inférieure, serait

$$\frac{w.a}{1000}.$$

D'après la considération indiquée dans l'énoncé, on doit avoir

$$\frac{vb}{1000} = \frac{wa}{1000}, \quad \text{ou} \quad vb = wa,$$

ou, en mettant pour w sa valeur [1],

$$vb = \frac{uf}{m}.a,$$

relation que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{v}{u} = \frac{f.a}{m.b},$$

c'est-à-dire que : *le volume de l'esprit le plus fort est au volume de l'esprit le plus faible, comme le produit de la force inférieure par le nombre de litres d'eau nécessaires pour amener* 1000 *litres d'un esprit de la force moyenne à la force inférieure, est au produit de la force moyenne par le nombre de litres d'eau nécessaires pour amener* 1000 *litres d'un esprit de la force supérieure à la force moyenne.*

139. D'après les données du problème du n° **137**, on a $f = 75$, $F = 90$, $m = 85$, $v = 450$ litres; et la table du n° **135** donne $a = 145$ et $b = 66$. On aura donc

$$\frac{450^{\text{lit}}}{u} = \frac{75.145}{85.66}, \quad \text{d'où} \quad u = \frac{450^{\text{lit}}.85.66}{75.145}$$

On trouve, en effectuant le calcul, $u = 218^{\text{lit}},48$.

140. En conservant les notations du n° **138**, on voit que, d'après la loi démontrée au n° **133**, le volume v de l'esprit dont la force est F, donne un volume d'esprit de la force moyenne m, marqué par $\frac{vF}{m}$.

De même, le volume u de l'esprit dont la force est f, donne un volume d'esprit de la force moyenne, marqué par $\frac{uf}{m}$.

La somme de ces deux volumes doit faire le volume total V; on a donc

$$V = \frac{vF + uf}{m},$$

c'est-à-dire que : *pour obtenir le volume du mélange, il faut multiplier chacun des deux volumes mélangés par la force qui lui correspond, faire la somme des produits, et diviser par la force moyenne.*

141. On a dans ce cas $v = 450$ litres; on a trouvé au n° **139**, $u = 218^{\text{lit}},48$; on a d'ailleurs $f = 75$, $F = 90$, $m = 85$; on aura donc

$$V = \frac{450^{\text{lit}} \times 90 + 218^{\text{lit}},48 \times 75}{85} = 669^{\text{lit}},24.$$

142. On a ici $f = 45$, $F = 55$, $m = 50$, $u = 260$ litres; la table du n° **133** donne $a = 114$ et $b = 103$. On aura donc, d'après la relation trouvée au n° **138**,

$$\frac{v}{260^{\text{lit}}} = \frac{45.114}{50.103}, \quad \text{d'où } v = 260^{\text{lit}}.\frac{45.114}{50.103}$$

ou $v = 258^{\text{lit}},99$. Il faudra donc $258^{\text{lit}},99$ de l'esprit supérieur.

Le volume du mélange s'obtiendra ensuite d'après la formule du n° **140**; et l'on aura

$$V = \frac{258^{\text{lit}},99.55 + 260^{\text{lit}}.45}{50} = 518^{\text{lit}},889.$$

Dans cet exemple, le volume du mélange ne diffère que de $0^{\text{lit}},101$ de la somme des volumes mélangés.

143. Le volume du mélange s'obtiendra d'après la règle du n° **133**; et l'on aura, en désignant par V le volume cherché,

$$\frac{V}{720^{\text{lit}}} = \frac{90}{75}, \quad \text{d'où} \quad V = 720^{\text{lit}}.\frac{90}{75} = 864^{\text{lit}},$$

ce qui revient à $8^{\text{hectol}},64$. La valeur de l'hectolitre de l'esprit obtenu sera le quotient de 1080 fr. par 8,64, c'est-à-dire 125 fr.

144. Il faut d'abord chercher le volume d'eau-de-vie à 55 qu'il faudra ajouter, et le volume total du mélange.

Dans la formule du n° **138**, on fera $f=40$, $F=55$, $m=50$, $u=540^{lit}$; la table du n° **135** donne $a=256$ et $b=103$; on aura donc

$$\frac{v}{540^{lit}}=\frac{40.256}{50.103},\quad \text{d'où}\quad v=540^{lit}.\frac{40.256}{50.103}$$

ou $v=1073^{lit},70$.

La formule du n° **140** donnera ensuite

$$V=\frac{1073^{lit},70.55+540.40}{50}=1613^{lit},07$$

ou $16^{hectol},13$ environ.

La valeur de ce mélange se compose :

1° de la valeur de la pièce d'eau-de-vie à 40°, soit . .	$621^{f},00$
2° de la valeur des $1073^{lit},70$ ou des $10^{hectol},737$ d'eau-de-vie à 144 fr., qui est $144^{f}\times 10,737$ ou	1546 ,13
En somme	$2167^{f},13$

La valeur de l'hectolitre du mélange sera le quotient de ce nombre par 16,13; on trouve $134^{f},35$.

145. Les 27 veltes font $7^{lit},61\times 27$ ou $205^{lit},47$.

A 19° de Cartier répondent, d'après la table, 50,1 degrés centésimaux; à 20° de Cartier répondent 53,4 degrés centésimaux; différence 3,3 degrés centésimaux; les $\frac{3}{4}$ de cette différence font 2,47 qui, ajoutés à 50,1, donnent 52,57 ou à peu près 52,6 pour la force réelle de l'eau-de-vie considérée. Sa richesse en alcool est donc $205^{lit},47\times 52,6$ ou $106^{lit},08$.

146. Les 15 cantara font 15 fois $13^{lit},97$, c'est-à-dire $209^{lit},55$. Les 21 degrés de Cartier répondent à 56,5 degrés centésimaux. On trouve dans la table des forces réelles, n° **126**, qu'à la température de 30°, des forces apparentes de 55° et 60°, répondent à des forces réelles de 49,6 et 54,7; différence 5,1 pour une différence de 5° dans la force apparente; pour une différence de 1° dans la force apparente, la différence des forces réelles serait donc le cinquième de 5,1, c'est-à-dire 1,02; et pour une différence de 1,5 entre les forces apparentes 55° et 56°,5, la différence entre les forces réelles sera donc le produit de 1,02 par 1,5, c'est-à-dire 1,53; la force réelle du liquide considéré est donc $49,6\times 1,53$ ou $51^{c},13$.

Pour obtenir sa force apparente à 10°, il faut, dans la table du n° **126** chercher, dans la ligne horizontale qui répond à 10°,

la force réelle 51,13; si l'on y trouvait ce nombre, celui qui serait situé en tête de la colonne verticale correspondante serait la force apparente demandée. On ne trouve pas 51,13, mais on trouve 51,8 qui en diffère peu, et qui répond à une force apparente de 50°.

Ainsi donc la force apparente du liquide à 10° devra être de très-peu inférieure à 50°.

La table nous apprend également que 1000 litres de ce liquide à 30° n'en occupent que 988 à 15°; et que 1000 litres à 10° en occuperaient 1002 à 15°. Les $205^{lit},47$ à 30° en occuperaient donc

à 15° $\quad 205^{lit},47.\frac{988}{1000}$

et à 10° $\quad 205^{lit},47.\frac{988}{1000}.\frac{1000}{1002}$,

ou $\quad 205^{lit},47.\frac{988}{1002}$, c'est-à-dire $202^{lit},59$.

Tel est le volume que le liquide considéré doit avoir à 10°.

La force réelle étant 51°,13, en l'abaissant de 1 centième, on l'amènera à 50,13; pour trouver la quantité d'eau qu'on doit ajouter, on peut, à cause de la faible différence entre les forces, négliger le changement de volume dû à l'action chimique, et appliquer simplement la règle du n° **153**, qui donnera, en désignant par V le volume du mélange,

$$\frac{V}{202,59}=\frac{51,13}{50,13}, \quad \text{d'où} \quad V=202^{lit},59.\frac{51,13}{50,13}$$

ou $V=206^{lit},63$.

La quantité d'eau à ajouter est la différence entre $206^{lit},63$ et $202^{lit},59$, c'est-à-dire $4^{lit},04$.

Calculons maintenant le prix de revient.

La pièce a coûté sur place	$315^{f},00$
Les frais de transport étant évalués à 7 pour 100, s'élèvent à $315^{f} \times 0,07$, c'est-à-dire à	22 ,05
La force réelle étant 51°,13 et le volume à 10° étant $202^{lit},59$, la quantité d'alcool contenue est le produit de $202^{lit},59$ par 0,5113, c'est-à-dire $103^{lit},58$ ou $1^{hectol},036$ environ. On aura donc l'ensemble des droits à acquitter	
A reporter. . .	$337^{f},05$

Report. . . 337^{f},05

à l'entrée, en multipliant 98^{f},45 par ce nombre, ce qui donne. . . . . 101 ,99

En somme . . . . . 439 ,04

Le bénéfice que l'on veut faire est les 0,06 de ce nombre, c'est-à-dire 439^{f},04 × 0,06 ou. . . . . 26 ,34

En ajoutant ce bénéfice au prix de revient, on obtient pour le prix auquel doivent être vendus les 202^{lit},59 . . . 465^{f},38

Mais ce nombre de litres équivaut à un nombre de bouteilles de 0^{lit},75 que l'on obtiendra en divisant 202,59 par 0,75, ce qui donne 270,12 ou à très-peu près 270 bouteilles. On obtiendra le prix de chaque bouteille en divisant 465^{f},38 par 270, ce qui donne 1^{f},723... ou à peu près 1^{f},72.

147. Le quintal revenait à 121^{f},50 + 27^{f},70, c'est-à-dire à 149^{f},20; les 28 quintaux valaient donc 149^{f},20 × 28 ou 4177^{f},60.

148. Puisque le litre d'huile d'olive pèse 915^{gr},3 ou 0^{k},9153, les 91^{lit},50 pèseront 0^{k},9153 × 91,5, c'est-à-dire 83^{k},7499... ou 83^{k},75. On aurait le prix du kilogramme en divisant 142^{f},45 par 83,75; ou aura le prix du quintal métrique en rendant le dividende 100 fois plus grand, et en divisant par conséquent 14245^{f} par 83,75, ce qui donne 170^{f},08.

149. Les 34 milleroles, à 84^{f},25, valent 2864^{f},50; leur poids est de 59^{k} × 34 ou 2006^{k}. En tenant compte du poids des futailles, le poids total est 70^{k} × 34 ou 2380, ou 2,38 tonneaux métriques; les frais de transport s'élèveront donc à 37^{f},50 × 2,38, c'est-à-dire à 89^{f},25. Le prix de revient de 2006 kilog. d'huile ou de 20,06 quintaux sera donc 2864^{f},50 + 89^{f},25, ensemble 2953^{f},75. On obtiendra donc le prix du quintal en divisant 2953^{f},75 par 20,06, ce qui donne 147^{f},245... ou environ 147^{f},25.

150.

Les	467300 milleroles	à	79^{f},50	valent	37150350 fr.
	407100	—	72 ,25	—	29412975
	359500	—	71 ,75	—	25794125
	275200	—	69 ,50	—	19126400
	335700	—	73 ,00	—	34506100
	271400	—	79 ,75	—	21644150
	284400	—	73 ,75	—	20974500
	406700	—	68 ,50	—	27858950
	372500	—	72 ,90	—	27155250
	308700	—	68 ,65	—	21192255
Total...	3488500 milleroles			..... valant	264815055 fr.

Ces 3488500 milleroles valent un nombre de kilogrammes marqué par $59^k \times 3488500$, c'est-à-dire 205821500 kilog. ou 2058215 quintaux métriques; on aura donc le prix moyen du quintal en divisant 264815055 fr. par 2058215, ce qui donne $128^f,66$.

151. Aux 18 ducats, représentant le prix d'achat d'un cantaro, ajoutons 2,97 ducats pour les frais, à Bari, nous obtiendrons 20,97 ducats par cantaro; pour 25 cantara le prix sera $20,97 \times 25$ ducats, ou 524,25 ducats. A $4^f,40$ par ducats, cela fait $2306^f,70$.

Mais un cantaro valant 89 kilog., les 25 cantara font $89^k \times 25$, ou 2225 kilog. La millerolle valant 59 kilog., ces 2225 représentent $\frac{2225}{59}$, ou 37,71 millerolles. Les frais, à Marseille, étant de $29^f,84$ par millerolle, s'élèveront, pour 37,71 millerolles, à $29^f,84 \times 37,71$, c'est-à-dire à $1125^f,27$. Ajoutant ces frais à $2306^f,70$, on trouve, pour le prix total de revient, $3431^f,97$.

Cette somme étant le prix de 2225 kilog., ou de 22,25 quintaux, on obtiendra le prix du quintal en divisant $3431^f,97$ par 22,25, ce qui donne $154^f,24$.

Pour obtenir le taux des frais, on remarquera que 25 cantara, à 18 ducats, font 450 ducats, ou $4^f,40 \times 450$, c'est-à-dire 1980 fr. Retranchant cette somme de $3431^f,97$, on obtient pour l'ensemble des frais $1451^f,97$. Le taux des frais, rapporté au prix de revient, est donc le quotient de $1451^f,97$ par $3431^f,97$, c'est-à-dire 0,423..., ou un peu plus de 42 pour 100.

152. Les 920 cantara font $89^k \times 920$, ou 81880 kilogrammes. En divisant ce nombre par $0^k,9153$, on obtiendra la capacité totale des futailles; on trouve 89457 litres, et une fraction négligeable. Si l'on divise cette capacité totale par le nombre 152 des futailles, on obtiendra leur capacité moyenne; on trouve $588^{lit},53$.

CHAPITRE II.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES SUR LE COMMERCE EXTÉRIEUR DE LA FRANCE.

---

§ 1. Importations et exportations.

153. La somme des importations représente une valeur officielle de 18650 millions de francs; en divisant cette somme par 15, on aura la moyenne des importations annuelles. On trouve ainsi

1243,3 millions, ou 1243300000 fr.

(Les nombres qui figurent dans le tableau n'étant donnés qu'à 1 million près, il convient, dans le calcul des moyennes, de ne pas pousser l'approximation au-delà des centaines de mille.)

La somme des exportations représente une valeur officielle de 19861 millions; le quotient de ce nombre par 15 est

1324,1 millions, ou 1324100000 fr.

En additionnant les deux nombres trouvés ci-dessus, on obtient 2567,4 millions, ou 2567400000 fr. pour la valeur moyenne des échanges annuels de la France.

On vérifierait ce dernier résultat en faisant la somme des nombres portés dans la troisième colonne du tableau, laquelle somme est 38511 millions, et en divisant cette somme par 15, ce qui donne bien 2567,4 millions.

154. L'importation de 1854, savoir 1709 millions, surpasse l'importation moyenne $1243^{\text{millions}},3$ de $465^{\text{millions}},7$; le rapport de cette augmentation à l'importation moyenne, c'est-à-dire le quotient de 465,7 par 1243,3, donnera le taux de l'augmentation; on trouve pour quotient 0,374...; l'augmentation est donc un peu moins de $37\frac{1}{2}$ pour 100.

L'exportation de 1854, savoir 1788 millions, surpasse l'exportation moyenne $1324^{\text{millions}},1$ de $463^{\text{millions}},9$; le quotient de ce dernier nombre par 1324,1, est 0,3503...; l'augmentation est d'environ 35 pour 100.

155. Le nombre 3758 millions surpasse le nombre total qui figure au tableau pour 1854, c'est-à-dire 3497 millions, de 261 millions. En divisant ce nombre par 3497, on trouve pour quotient 0,074... ; l'augmentation est donc d'environ 7 pour 100.

156. Il s'agit de partager 3497 millions dans le rapport de 70 à 30. Pour cela, on remarque que, si la somme à partager était $70^{\text{millions}} + 30^{\text{millions}}$, ou 100^{millions}, les deux parts seraient précisément 70 millions et 30 millions ; si la somme à partager, au lieu d'être 100 millions était 1 million, les parts seraient 100 fois plus petites, c'est-à-dire $0^{\text{million}},70$ et $0^{\text{million}},30$. La somme à partager étant réellement 3497 millions, les parts seront 3497 fois plus grandes; ces parts auront donc pour valeur

$$0^{\text{million}},7 \times 3497 \quad \text{et} \quad 0^{\text{million}},3 \times 3497.$$

En faisant le calcul, on trouve :

Pour la valeur des échanges par voie de mer. . . $2447^{\text{millions}},9$
Et pour la valeur des échanges par voie de terre. 1049 ,1

157. Pour obtenir la valeur demandée, il faut prendre les 41 centièmes de la valeur trouvée au numéro précédent pour le total des échanges par voie de mer, c'est-à-dire qu'il faut multiplier $2447^{\text{millions}},9$ par 0,41, ce qui donne $1003^{\text{millions}},6$.

158. La somme des dix nombres énoncés s'élève à 2613,4 millions. On obtiendra la proportion demandée en divisant cette somme par 3497, ce qui donne 0,747..., ou environ 75 pour 100.

159. On obtiendra le nombre demandé en divisant 154,2 par 3497, ce qui donne 0,044..., ou un peu plus de 4 pour 100.

160. La somme des dix nombres donnés est 1682 millions, en divisant cette somme par $2419^{\text{millions}},1$, on obtiendra le nombre demandé ; on trouve 0,695, c'est-à-dire entre 69 et 70 pour 100.

161. Le nombre demandé s'obtiendra en divisant 150,9 par 2419,1, ce qui donne 0,062..., ou un peu plus de 6 pour 100.

162. Dans la première hypothèse, l'avantage de la France est la différence des nombres 279 millions et 133 millions, c'est-à-dire 146 millions.

Dans la réalité, l'avantage de la France a été la différence des nombres 356 millions et 149 millions, c'est-à-dire 207 millions.

163. Dans l'hypothèse des valeurs officielles, c'est-à-dire d'après le tarif normal de 1827, l'avantage eût été pour les États-

Unis, et il eût été exprimé par la différence entre les nombres 193 millions et 182 millions, c'est-à-dire par 11 millions.

En ayant égard aux valeurs dites actuelles, c'est-à-dire au tarif réel de 1854, on voit que l'avantage a réellement été pour la France, et qu'il est exprimé par la différence entre les nombres 217 millions et 166 millions, c'est-à-dire par 151 millions.

164. Il faut d'abord partager 1805,4 millions en trois parties proportionnelles aux nombres 50,9, 28,9 et 20,2; et comme la somme de ces trois nombres est 100, il suffira de multiplier successivement 1805,4 millions par 0,509, par 0,289 et par 0,202, ce qui donnera :

Pour les matières nécessaires à l'industrie..	918,9	millions,
Pour les objets de consommation naturels..	521,8	—
Pour les objets de consommation fabriqués.	364,7	—

Il faut, en second lieu, partager 1291,6 millions en parties proportionnelles aux nombres 61,2, 34,8, et 4, dont la somme est 100, ce qui revient à multiplier 1291,6 millions par 0,612, par 0,348 et par 0,04. En faisant le calcul, on obtient :

Pour les matières nécessaires à l'industrie..	790,5	millions,
Pour les objets de consommation naturels..	449,5	—
Pour les objets de consommation fabriqués	51,6	—

Les différences entre ces nombres et ceux obtenus tout à l'heure donneront la valeur des quantités de marchandises importées qui n'ont pas été employées ou consommées dans le pays. On trouve ainsi :

Pour les matières nécessaires à l'industrie..	128,4	millions,
Pour les objets de consommation naturels..	72,3	—
Pour les objets de consommation fabriqués	312,1	—

On voit que la presque totalité des objets de consommation naturels ont été consommés en France, tandis que la plus grande partie des objets de consommation fabriqués ont été réexportés.

165. Il faut d'abord, comme dans le problème précédent, multiplier 1952,4 millions par 0,346 et par 0,654, ce qui donne :

Pour les produits naturels.....	675,5	millions,
Pour les objets manufacturés.....	1276,9	—

Il faut, en second lieu, multiplier de même 1413,7 millions par 33,9 et par 66,1, ce qui donne :

Pour les produits naturels..... 479,2 millions,
Pour les objets manufacturés..... 934,5 —

Les différences entre ces nombres et ceux qui ont été obtenus tout à l'heure, donneront la valeur des marchandises exportées qui n'étaient ni nationales ni nationalisées par le payement des droits ; on trouve ainsi :

Pour les produits naturels..... 196,3 millions,
Pour les objets manufacturés..... 342,4 —

166. Pour résoudre cette question, il faut d'abord prendre les 0,778 de 58360934 fr., ce qui donne, pour la valeur totale des céréales 45404807 fr., en négligeant les centimes.

Il faut ensuite prendre les 0,299 de 1434765 fr., ce qui donne pour le total des droits payés par ces céréales 428995 fr.

Le prix moyen du quintal métrique sera le quotient de 45404807 fr. par 1579156, c'est-à-dire 28^{f},75.

Le taux des droits par quintal sera le quotient de 428995 fr. par 1579156, c'est-à-dire 0^{f},271... ou environ 0^{f},27.

167. Il faut d'abord prendre les 0,458 de 1662937 fr., ce qui donne pour la valeur des vins 761625 fr. On aura ensuite la valeur moyenne de l'hectolitre en divisant 761625 fr. par 4329, ce qui donne 175^{f},935... ou environ 175^{f},94.

168. Si à la valeur totale de la soie brute 45459382 fr. on ajoute le total des droits acquittés à l'entrée 233744 fr., on obtient pour le prix de revient total 45693126 fr. En divisant cette somme par 982767, on obtient le prix moyen du kilogramme ; on trouve : 46^{f},49.

Le prix moyen du kilogramme de tissu de soie s'obtiendra en divisant 117391503 fr. par 837275, ce qui donne 140^{f},21.

Le rapport des deux prix obtenus est le quotient de 140,21 par 46,49, c'est-à-dire 3,015... Ainsi le prix moyen du kilogramme de tissu de soie est un peu plus du triple de celui du kilogramme de soie brute.

169. Le prix moyen du quintal métrique de houille s'obtiendra en divisant 45626986 fr. par 21421120, ce qui donne 2^{f},13.

Le prix moyen du kilogramme de tissus de soie s'obtiendra

de même, en divisant 34634996 fr. par 251013, ce qui donne $137^{f},98$.

Le nombre de quintaux métriques de houille dont la valeur équivaut à celle d'un kilogramme de tissus de soie, s'obtiendra en divisant $137^{f},98$ par $2^{f},13$, ce qui donne $64^{quint},779$ ou 64779 kilog.

170. Le prix moyen de l'hectolitre des spiritueux importés est le quotient de 503107 fr. par 3717, c'est-à-dire 135,35.

Le prix moyen de l'hectolitre des spiritueux exportés est le quotient de 119128 fr. par 489, c'est-à-dire $243^{f},61$.

Le rapport de ces prix est le quotient de 243,61 par 135,35, c'est-à-dire 1,7998... ou à très-peu près 1,8. Les deux prix sont donc dans le rapport de 18 à 10, ou de 9 à 5.

171. Puisque l'hectolitre de froment pèse 75 kilog., on convertira d'abord en hectolitres les 13356 quintaux métriques ou les 1335600 kilog. exportés, en divisant ce nombre par 75, ce qui donne 17808 hectolitres.

Le prix de l'hectolitre importé est le quotient de 14707065 fr. par 505475, c'est-à-dire $29^{f},095$ ou environ $29^{f},10$.

Le prix de l'hectolitre exporté est le quotient de 719888 fr. par 17808, c'est-à-dire $40^{f},42$.

Le prix de l'hectolitre exporté est donc de $11^{f},32$ supérieur au prix de l'hectolitre importé; et le rapport du premier au second est le quotient de 40,42 par 29,10, c'est-à-dire 1,388.

Le nombre d'hectolitres de froment réellement extraits de la Turquie, par suite de l'échange considéré, est la différence des nombres 505475 hectolitres et 17808 hectolitres, c'est-à-dire 487667 hectolitres.

172. En ajoutant à la valeur des cotons importés, 104551380 fr., le total des droits perçus à l'entrée, 14769369 fr., on obtient la somme de 119320749 fr. pour le prix de revient des 674525 quintaux ou des 67452500 kilogrammes de cotons importés. On aura donc le prix du kilogramme en divisant 119320749 fr. par 67452500, ce qui donne $1^{f},768$... ou environ $1^{f},77$.

Le prix du kilogramme de tissus de coton est le quotient de 2804487 fr. par 287675, c'est-à-dire $9^{f},748$... ou environ $9^{f},75$.

Le rapport du prix du kilogramme de tissus de coton au prix du kilogramme de cotons en laine est donc le quotient de 9,75 par 1,77, c'est-à-dire 5,508... ou un peu plus de $5\frac{1}{2}$.

La fabrication d'un kilogramme de tissus de coton a rapporté à la France la différence entre $9^{f},75$ et $1^{f},77$, c'est-à-dire $7^{f},98$;

la fabrication des 287675 kilogrammes exportés lui a donc rapporté 287675 fois 7f,98, c'est-à-dire 2295646f,50.

175. 1° Il faut d'abord ajouter à la valeur des sucres importés le montant des droits perçus à l'entrée, ce qui donnera :

Pour les sucres bruts et terrés français, 1er type et au-dessous	92855224 fr.
Pour les sucres bruts et terrés français au-dessus du 1er type	103036 »
Pour les sucres bruts et terrés étrangers, 1er type et au-dessous	50117819 »
Pour les sucres bruts et terrés étrangers, au-dessus du 1er type	5544284 »
Pour les sucres raffinés	152747 »

Le prix moyen, pour chacune des espèces, s'obtiendra en divisant ces nombres de francs par les nombres de kilogrammes qui leur correspondent. On trouvera ainsi, à moins d'un demi-centime près :

Pour les sucres bruts et terrés français, 1er type et au-dessous	1f,12.
Pour les sucres bruts et terrés français, au-dessus du 1er type	1 ,28.
Pour les sucres bruts et terrés étrangers, 1er type et au-dessous	1 ,11.
Pour les sucres bruts et terrés étrangers, au-dessus du 1er type	1 ,65.
Pour les sucres raffinés	0 ,72.

Quant aux sucres exportés, il suffira de diviser les valeurs inscrites au tableau par les poids qui leur correspondent, ce qui donnera :

Pour les sucres bruts et terrés français, 1er type et au-dessous	0f,69.
Pour les sucres bruts et terrés français, au-dessus du 1er type	0 ,75.
Pour les sucres bruts et terrés étrangers, 1er type et au-dessous	0 ,58.
Pour les sucres bruts et terrés étrangers, au-dessus du 1er type	0 ,66.
Pour les sucres raffinés	0 ,72.

2° Si l'on néglige les droits d'entrée sur les sucres bruts et terrés, on obtient le prix du kilogramme, à l'importation, en

divisant simplement les valeurs inscrites au tableau par les poids qui leur correspondent. On trouve ainsi, toujours à moins d'un demi-centime près :

Pour les sucres français, 1er type et au-dessous . . . . . 0f,72.
Pour les sucres français, au-dessus du 1er type . . . . . 0 ,83.
Pour les sucres étrangers, 1er type et au-dessous . . . . 0 ,59.
Pour les sucres étrangers, au-dessus du 1er type . . . . 0 ,69.

(On voit que, même en ne tenant pas compte des droits qui frappent les sucres des colonies françaises à leur entrée en France, leur prix est encore supérieur, en général, à celui des sucres raffinés indigènes.)

174. Si l'on fait, d'après le tableau du numéro précédent, la somme des valeurs des sucres importés, on trouve 88804608 fr.
On trouve, de même, pour la somme des valeurs des sucres exportés . . . . . 23989184 »

La différence . . . . . 64815424 fr.
exprime donc la valeur des sucres restés en France.

La consommation annuelle étant de 120000000 kilog., on en obtiendra la valeur en multipliant ce nombre par 0f,72, ce qui donne 86400000 fr. Si de cette valeur on retranche celle des sucres restés en France, savoir 64815424 fr., le reste, 21584576 fr., exprimera la valeur du sucre fourni par l'industrie indigène. Pour obtenir le nombre de kilogrammes correspondant, il suffit de diviser ce nombre par 0f,72, ce qui donne 29978577k,7..., ou à peu de chose près 30000000 kilog.

175. 1° Les 83415996 kilog. à 0f,17, valent . . 14180719f,32.
Les 117662 kilog. à 0 ,22, valent . . 25885f,64
Les 1446102 kilog. à 0,70, valent . 1012271 ,40

La valeur de la fonte exportée est donc 1038157f,04

Et si l'on retranche cette valeur de celle de la fonte importée, on aura pour différence ce que coûte à la France l'échange dont il s'agit. On trouve 13142562f,28.

2° Pour répondre à la seconde partie de la question, il faut d'abord partager les 1446102 kilog. dans le rapport des nombres 83415996 et 117662 + 1446102, c'est-à-dire dans le rapport des nombres 83415996 et 1563764.

La somme de ces deux nombres étant 84979760, on voit que

pour obtenir le nombre de kilogrammes de fonte brute fournie par la France, il faudra prendre les $\frac{1563764}{84979760}$ de 1446102 kilog., c'est-à-dire multiplier 1446102 kilog. par 1563764 et diviser le produit par 84979760, ce qui donne 26610^k,6. En retranchant ce nombre de 1446102 kilog., on obtiendra la quantité de fonte brute fournie par les pays étrangers; on trouve 1419491^k,4.

Cela posé, 1419491^k,4 à 0^f,17, valent	241313^f,54
et 26610^k,6 à 0^f,22, valent	5854 ,33
Total	247167^f,87

Si l'on retranche cette valeur de celle de la fonte ouvrée, c'est-à-dire de 1012271^f,40, on aura pour reste le gain cherché; on trouve 765103^f,53.

176. 1° A la valeur des houilles importées, si l'on ajoute le montant des droits acquittés à l'entrée, on obtient pour le prix de revient total 72146390 fr. En divisant ce nombre par 31238929, on obtiendra le prix moyen du quintal métrique; on trouve, à un demi-centime près, 2^f,31.

Pour les houilles exportées, il suffit de diviser la valeur totale 1090448 fr. par le nombre de quintaux métriques 908707, ce qui donne, à un demi-centime près, 1^f,11.

2° Le nombre de quintaux représentant la quantité de houille pour laquelle la France est tributaire de l'étranger, est la différence des nombres 31238929 quintaux et 908707 quintaux, c'est-à-dire 30330222 quintaux métriques.

Au prix moyen de 2^f,31, ces 30330222 quintaux représentent une valeur de 70062812^f,82, ou un peu plus de 70 millions.

177. 1° A la valeur des bois importés, ajoutons le montant des droits, nous aurons, pour le prix de revient des 131322 stères, 729501 fr.; et en divisant le second nombre par le premier, on aura le prix moyen du stère, ce qui donne 5^f,555..., ou 5^f,56, à un demi-centime près. Nous aurons de même, pour le prix de revient des 708418 fagots, 142085 fr.; en multipliant ce dernier nombre par 100, et divisant le produit par 708418, on obtiendra le prix moyen du cent de fagots; on trouve 20^f,056..., ou 20^f,06, à un demi-centime près.

2° Les 6926 stères, à 8 fr., valent.	55408 fr.;
Les 122510 fagots, à 30 fr. le cent, valent. . . .	36753
Total.	92161 fr.

Si, d'autre part, on ajoute les deux nombres 729501 fr. et

142085 fr., qui représentent la valeur des bois importés, y compris les droits d'entrée, on trouve 871586 fr. En retranchant de cette somme la précédente, 92161 fr., on aura ce que l'échange dont il s'agit a coûté à la France; on trouve 779425 fr.

178. 1° La somme des nombres inscrits dans la seconde colonne est 101,1 millions; en en prenant le sixième, on aura la valeur officielle moyenne de l'importation annuelle; on trouve 16,85 millions, ou 16850000 fr.

2° Pour convertir cette valeur officielle en valeur actuelle, on sait, d'après l'énoncé, que la consommation de 1854, qui a été de 19 millions (val. off.), a été de 28,3 millions (val. réelle); une consommation de 1 million (val. off.) équivaudrait donc à $\frac{28,3}{19}$ millions (val. réelle); et une consommation de 16,85 millions (val. off.) équivaudra à $\frac{28,3 \times 16,5}{19}$ millions (val. réelle). En effectuant le calcul, à une approximation conforme à celle des données, on trouve 24,57 millions, ou 24570000 fr.

179. 1° La somme des nombres inscrits dans la seconde colonne est 18,9 millions, dont le sixième, ou 3,15 millions, représente la valeur officielle moyenne de l'exportation annuelle.

2° Pour convertir cette valeur officielle en valeur réelle, au taux de 1854, on sait, d'après l'énoncé, que l'exportation de 1854, qui a été de 2,6 millions (valeur off.), représente, en valeur réelle, 1,8 pour 1000, ou les 0,0018 de la valeur totale de l'exportation, qui a été de 1414 millions, c'est-à-dire qu'elle représente $1414 \times 0,0018$, ou 2,54 millions.

Cela posé, puisque 2,6 millions (val. off.) représentent 2,54 millions (val. réelle), 1 million (val. off.) représenterait $\frac{2,54}{2,6}$ millions (val. réelle); et, par conséquent, 3,15 millions (val. off.) représenteront $\frac{2,54 \times 3,15}{2,6}$ millions (val. réelle). En effectuant le calcul au degré d'approximation que comportent les données, on trouve 3,03 millions, ou 3030000 fr.

180. 1° La somme des importations est 4,1 millions, dont le sixième, 0,68 millions, ou 680000 fr., représente la valeur officielle moyenne de l'importation annuelle.

La somme des exportations est 12,6 millions, dont le sixième, 2,1 millions, ou 2100000 fr., représente la valeur officielle moyenne de l'exportation annuelle.

2° La différence entre les deux nombres ainsi obtenus exprimera le bénéfice moyen de la France; on trouve 1420000 fr. (val. off.)

Pour convertir cette valeur officielle en valeur réelle, au taux de 1854, on sait que, dans ladite année, la valeur réelle de l'importation a été de 1,1 millions, et la valeur réelle de l'exportation 1,5 millions.

Puisque à la valeur officielle 0,6 millions correspond la valeur réelle 1,1, à la valeur officielle 1 million correspondrait une valeur réelle de $\frac{1,1}{0,6}$ millions, et à la valeur officielle 0,68 correspondra une valeur réelle exprimée par $\frac{1,1 \times 0,68}{0,6}$, c'est-à-dire 1,24 millions, ou 1240000 fr.

De même, puisqu'à une valeur officielle 1,6 millions correspond la valeur réelle 1,5 millions, à une valeur officielle 1 million correspondrait une valeur réelle exprimée par $\frac{1,6}{1,5}$; et à la valeur officielle 2,1 correspondra une valeur réelle exprimée par $\frac{1,6 \times 2,1}{1,5}$, c'est-à-dire 2,24 millions, ou 2240000 fr.

La différence entre les deux nombres obtenus exprimera la valeur réelle du bénéfice de la France; on trouve 1000000 fr.

§ 2. Droits d'entrée et de sortie. — Drawbacks.

181.	290	fois	50f,00	font..... 14500f,00
	31	—	15,00	—..... 465,00
	40	—	15,00	—..... 600,00
	548	—	25,00	—..... 13700,00
	51	—	12,50	—..... 637,50
	285	—	3,00	—..... 855,00
	2726	—	5,00	—..... 13630,00
	61	—	0,30	—..... 18,30
	359	—	12,00	—..... 4308,00
	877	—	0,40	—..... 350,80
	100	—	1,50	—..... 150,00
	19	—	0,25	—..... 4,75
				Total.... 49219f,35
				Ajoutant un décime par franc, ou un dixième.. 4921,93
				On obtient pour l'ensemble des droits acquittés. 54141f,28.

182. Chaque cheval a payé 25 fr., plus le décime additionnel, c'est-à-dire plus le dixième de 25 fr., ou $2^f,50$, en tout, $27^f,50$; les 19690 chevaux ont donc payé 19690 fois $27^f,50$, c'est-à-dire. . . . . 541475^f

Chaque poulain a payé 15 fr., plus le dixième de 15 fr., ou $1^f,50$, en tout, $16^f,50$; les 2348 poulains ont donc payé 2348 fois $16^f,50$, c'est-à-dire. 38742

La somme des deux nombres obtenus, ou. . . . . 600217^f exprimera le montant des droits acquittés.

183. On a vu que le décime additionnel augmente les droits d'un dixième; les droits acquittés, en tenant compte de ce décime, sont donc les $\frac{11}{10}$ de ce qu'ils seraient sans le décime; ainsi, pour obtenir le montant des droits, abstraction faite du décime additionnel, il faut diminuer les droits réellement acquittés de 1 sur 11, ou de $\frac{1}{11}$ de leur valeur.

Le onzième de 7238 fr. est 658 fr.; en le retranchant, il reste 6580 fr. pour le montant des droits, abstraction faite du décime additionnel. En divisant ce nombre par 131600, on obtiendra le montant des droits par stère; on trouve $0^f,05$.

184. I. Il faut d'abord, comme au numéro précédent, retrancher de 352539 fr. le onzième de ce nombre, pour ne plus avoir à s'occuper du décime additionnel. Le onzième de 352539 fr. est 32049 fr.; en le retranchant, il reste 320490 fr. pour le montant total des droits, abstraction faite du décime.

L'excès des droits du café de la Guadeloupe sur le café de Bourbon étant de 10 fr. par quintal, l'excès pour 1914 quintaux sera de 1914 fois 10 fr., ou de 19140 fr. Si l'on retranche cet excès de 320490 fr., le reste, 301350 fr., exprimera l'ensemble des droits des deux espèces de café au taux de celui de Bourbon. Or 4113 quintaux, plus 1914 quintaux, font 6027 quintaux; le quotient des 301350 fr. par ce nombre sera donc le montant des droits pour un quintal de café Bourbon; on trouve 50 fr.

Les droits étant supérieurs de 10 fr., pour le café de la Guadeloupe, s'élèveront donc à 60 fr. par quintal.

II. On résout ce problème plus commodément par l'algèbre. Si l'on appelle x et y le montant des droits par quintal pour le café de Bourbon et pour le café de la Guadeloupe, on aura, d'après l'énoncé,

$$(4113\,x + 1914\,y)\tfrac{11}{10} = 352539^f$$

et

$$y = x + 10.$$

Substituant cette valeur de y dans la première équation, on obtient

$$(4113x + 1914x + 19140^f)\tfrac{10}{11} = 352539^f,$$

ou $$6027x + 19140^f = 352539^f \times \tfrac{10}{11} = 320490^f;$$

d'où $$6027x = 320490^f - 19140^f = 301350^f,$$

et $$x = \frac{301350^f}{6027} = 50^f.$$

Par suite, $$y = 50^f + 10^f = 60^f.$$

185. Le prix moyen ayant été supérieur à 29 fr., les droits, par hectolitre, n'ont été que de $0^f,25$, et, avec le centime additionnel, c'est-à-dire $0^f,025$, ils se sont élevés à $0^f,275$. On aura donc le nombre d'hectolitres demandé, en divisant 940705 fr. par $0^f,275$, ce qui donne $3420745^{hect},4545...$, ou simplement 3420745 hectolitres.

186. Il faut d'abord prendre les $\frac{4}{5}$ de 42,5 millions, ce qui donne 34 millions pour la valeur officielle du blé. Cette valeur étant calculée à raison de 20 fr. l'hectolitre, on aura le nombre d'hectolitres importés en divisant 34000000 fr. par 20 fr., ce qui donne 1700000 hectolitres. Si l'on prend les $\frac{2}{5}$ de ce nombre, on aura la quantité de blé amenée par navires étrangers; on trouve 680000 hectolitres; la quantité de blé amenée par navires français ou par terre est donc 1700000 hectolitres, moins 680000 hectolitres, ou 1020000 hectolitres.

Cela posé : si les prix moyens de l'hectolitre de blé sont supérieurs à 28 fr., 26 fr., 24 fr. et 22 fr., on aura à multiplier $0^f,25$ par chacun des nombres d'hectolitres ci-dessus obtenus, à faire la somme des produits, et à ajouter le dixième de ce produit. Or $0^f,25$ multiplié par 1020000 donne 255000 fr.; $0^f,25$ multiplié par 680000 donne 170000 fr.; la somme de ces deux produits est 425000 fr.; ajoutant le dixième, 42500 fr., on obtient pour l'ensemble des droits, 467500 fr.

Si les prix sont au-dessous des précédents, mais au-dessus de 26 fr., 24 fr., 22 fr. et 20 fr., on aura à multiplier $0^f,25$ par 1020000, ce qui donne, comme ci-dessus, 255000 fr.; on aura à multiplier ensuite $1^f,50$ par 680000, ce qui donne 1020000 fr.

La somme de ces deux produits est 1275000 fr.; le dixième de ce produit est 127500 fr.; ajoutant ce dixième, on obtient pour l'ensemble des droits, 1402500 fr.

Si les prix sont 26 fr., 24 fr., 22 fr. et 20 fr., on aura à multiplier $1^f,25$ par 1020000, ce qui donne 1275000 fr.; on aura à

multiplier ensuite $2^f,50$ par 680000, ce qui donne 1700000 fr.; la somme de ces deux produits est 2975000 fr.; le dixième de cette somme est 297500 fr.; ajoutant ce dixième, on obtient pour l'ensemble des droits, 3272500 fr.

Si les prix sont 25 fr., 23 fr., 21 fr. et 19 fr., on aura à multiplier $2^f,25$ par 1020000, ce qui donne 2295000 fr.; on aura à multiplier ensuite $3^f,50$ par 680000, ce qui donne 2380000 fr.; la somme de ces deux produits est 4675000 fr.; le dixième de ce produit est 467500 fr.; ajoutant ce dixième, on obtient, pour l'ensemble des droits, 5142500 fr.

Si les prix sont 24 fr., 22 fr., 20 fr. et 18 fr., on aura à multiplier $3^f,25$ par 1020000, ce qui donne 3315000 fr.; on aura à multiplier ensuite $4^f,50$ par 680000, ce qui donne 3060000; la somme de ces deux produits est 6375000 fr.; le dixième de ce nombre est 637500 fr.; ajoutant ce dixième, on obtient pour l'ensemble des droits, 7012500 fr.

Pour donner un exemple du cas où les prix seraient au-dessous de ces derniers, supposons qu'ils s'abaissent jusqu'à 20 fr., 18 fr., 16 fr. et 14 fr. Les droits pour un hectolitre, venu par la voie de terre ou par navires français, sera de $3^f,25$, plus 4 fois $1^f,50$, puisqu'il y a 4 fr. de baisse au-dessous des derniers prix indiqués, c'est-à-dire que les droits, pour un hectolitre, seront $3^f,25 + 6$ fr., ou $9^f,25$. Pour les blés venus par navires étrangers, les droits seront $4^f,50$, plus 6 fr., c'est-à-dire $10^f,50$. On aura donc à multiplier d'abord $9^f,25$ par 1020000, ce qui donne 9435000 fr.; on aura ensuite à multiplier $10^f,50$ par 680000, ce qui donne 7140000 fr.; la somme des deux produits obtenus est 16575000 fr.; le dixième de cette somme est 1657500 fr.; ajoutant ce dixième, on obtient, pour l'ensemble des droits, 18232500 fr.

137. I. La quantité de cuivre importée équivaut à 78811,97 quintaux.

Elle se compose de deux parties; celle qui est importée par navires français, et celle qui est importée par navires étrangers, ou par la voie de terre; nous les nommerons, pour abréger, le premier poids et le second poids.

Les droits, pour le premier poids, étant de $0^f,10$ par quintal, s'élèvent réellement à $0^f,11$, en tenant compte du décime additionnel; de même, les droits pour le second poids, s'élèvent à $3^f,30$.

Cela posé, on raisonnera de la manière suivante : le premier poids étant équivalent à 78811,97 quintaux, moins le second

poids, les droits sur le premier poids équivaudront à $0^f,11$ multiplié par 78811,97, c'est-à-dire $8669^f,3167$, moins $0^f,11$ multiplié par le second poids. Si du total des droits 179701 fr., on retranche $8669^f,3167$, le reste $171031^f,6833$ exprimera le produit de $3^f,30$ par le second poids, moins le produit de $0^f,11$ par ce même second poids, ou, ce qui revient au même, le produit de $3^f,19$ par ce second poids. On obtiendra donc ce second poids en divisant $171031^f,6833$ par $3^f,19$, ce qui donne 53614,95 quintaux, ou 5361495 kilog. Le premier poids, qui est le poids demandé, s'obtiendra en retranchant ce nombre de 7881197 kilog., ce qui donne 2519702 kilog., ou, à peu de chose près, 25197 quintaux.

II. On résout plus commodément ce problème par l'algèbre. Si l'on désigne par x le premier poids, et par y le second, exprimés en quintaux, on aura d'après les données :

$$0^f,11.x+3^f,3.y=179701^f,$$

et

$$x+y=78811,97.$$

On tire de la seconde équation

$$x=78811,97-y.$$

Substituant cette valeur dans la première équation, on obtient

$$0^f,11(78811,97-y)+3^f,3.y=179701^f,$$

ou

$$8669^f,3167-0^f,11.y+3^f,3.y=179701^f;$$

d'où

$$3^f,19y=179701^f-8669^f,3167=171031^f,6833$$

et

$$y=\frac{171031^f,6833}{3^f,19}=53614,95 \text{ quintaux.}$$

Donc $x=78811,97-53614,95=25197,02$ quintaux.

188. Les 24346 montres, payant $1^f,10$, donnent $26780^f,60$
33291 — 1 ,80, — 59923 ,80
96 — 3 ,10, — 297 ,60
43245 — 4 ,40, — 190278 ,00
364 + 357 ou 721 — 6 fr., — 4326 ,00
Enfin les 9433 payant le dixième de 518815^f, donnent 51881 ,50
Total . . . . . $333487^f,50$
A quoi, il faut ajouter le décime . . . . . 33348 ,75
Le montant total des droits est donc . . . . . $366836^f,25$

189. Les droits payés étant donnés avec le décime additionnel, il faut d'abord en retrancher le onzième pour les dégager

de ce décime. Le onzième de $764^f,47$ est $69^f,497...$ ou $69^f,50$; retranchant ce onzième, il reste $694^f,97$. De même, le onzième de $964^f,15$ est $87^f,65$; retranchant ce onzième, il reste $876^f,50$.

On aura donc les droits par hectolitre pour les vins en futailles, en divisant $694^f,97$ par 69497; on trouve $0^f,01$.

On aura de même les droits par hectolitre pour les vins en bouteilles, en divisant $876^f,50$ par 17530; on trouve $0^f,05$.

190. Il faut d'abord faire la somme des poids donnés; on trouve 851856 kilog. La valeur de ce groizil, à raison de $0^f,10$ le kilogramme, est le dixième de ce nombre, ou $85185^f,60$.

Il faudrait prendre les $\frac{11}{400}$ de ce nombre pour obtenir le total des droits acquittés, et en retrancher ensuite le onzième, pour se débarrasser du décime additionnel; cela revient à ne prendre que les $\frac{10}{400}$ ou $\frac{1}{40}$ de la valeur du groizil. Le quarantième de $85185^f,60$ est $2129^f,64$. On obtiendra le montant des droits par quintal en divisant cette somme par le nombre des quintaux, ou par 8518,56; on trouve $0^f,25$.

191. Avec le décime additionnel, les droits par quintal s'élèvent à $2^f,20$ pour les écorces non-moulues, et à $1^f,10$ pour les écorces moulues. On aura donc le poids des premières en divisant 29324 fr. par $2^f,20$, ce qui donne $13329^{quint},09$ ou 1332909 kilog. On aura de même le poids des secondes en divisant 2677 fr. par $1^f,10$, ce qui donne $2433^{quint}.,63$ ou 243363 kilog.

192. I. Si les 2160 kilog. de thés venant de l'Inde avaient été transportés sur navires étrangers, les droits acquittés eussent été le produit de 6 fr. par 2160, c'est-à-dire 12960 fr., somme qui surpasse les droits réellement acquittés, 10044 fr., de 2916 fr. Or, pour chaque kilogramme qu'on fera passer d'un navire étranger sur un navire français, les droits diminueront de 6 fr. et augmenteront de $1^f,50$, c'est-à-dire qu'ils diminueront de $4^f,50$. Pour les faire diminuer de 2916 fr., il faudra donc faire passer sur navires français autant de kilogrammes que $4^f,50$ est contenu de fois dans 2916 fr., c'est-à-dire 648 kilog. La part du pavillon français a donc été de 648 sur 2160; et le rapport demandé est celui de 648 à 2160 moins 648, c'est-à-dire celui de 648 à 1512, ou de 3 à 7, en divisant ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur 216.

En raisonnant de la même manière, on trouvera que pour les thés venant de la Baltique, la part du pavillon français a été de 582 kilog. sur les 1164 kilog., c'est-à-dire de moitié; et que pour les thés venus de la Chine, des Philippines et d'ailleurs, la

part du pavillon national a été de 72336 kil. sur les 180840 kil.; et que par conséquent le rapport demandé est celui de 72336 à 180840 moins 72336, c'est-à-dire celui de 72336 à 108504, ou celui de 2 à 3, en divisant ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur 36168.

II. Ce problème peut encore être résolu commodément par l'algèbre.

Désignons par x le rapport du poids importé par navires français au poids total. Pour les thés venant de l'Inde, le poids transporté par navires français sera $2160.x$, et par conséquent le poids transporté par navires étrangers sera $2160-2160.x$ ou $2160(1-x)$. On devra donc avoir

$$2160.x.1^{f},50+2160(1-x).6=10044;$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{2160.6-10044}{2160(6-1^{f},50)}=\frac{2916}{9720}=0,3.$$

Le rapport demandé est celui de x à $1-x$, c'est-à-dire celui de 0,3 à 0,7 ou de 3 à 7.

Pour les thés venant de la Baltique, on arrivera de même à l'équation

$$1164x.2^{f},50+1164(1-x).6=4947,$$

qui donne $x=0,5$. Par suite, le rapport demandé est 1.

Pour les thés venant de la Chine, des Philippines et d'ailleurs, on arrivera à l'équation

$$180840.x.5+180840(1-x).6=1012704$$

qui donne $x=0,4$. Le rapport demandé est donc celui de 0,4 à $1-0,4$, c'est-à-dire celui de 0,4 à 0,6 ou de 2 à 3.

193. 1° La somme donnée étant les $\frac{9}{100}$ de la valeur des draps, on aura cette valeur en divisant 2535390 fr. par $\frac{9}{100}$, ce qui donne 28171000 fr.

2° La laine peignée étrangère payant 30 pour 100 de droits d'entrée, non compris le décime additionnel, les droits qu'elle supporte s'élèvent réellement à 33 pour 100. La somme donnée représentant ainsi les $\frac{33}{100}$ de la valeur de la laine, on aura cette valeur en divisant 2535390 fr. par $\frac{33}{100}$, ce qui donne 7683000 fr.

3° Le poids de la laine étant supposé le même que celui du drap, on aura la valeur moyenne du kilogramme de laine peignée, avant l'acquittement des droits, en divisant 7683000 fr. par 1151146, ce qui donne $6^{f},674$... ou environ $6^{f},67$.

194. Il faut d'abord calculer les droits qui ont été perçus pour l'importation de ces quatre quantités de soufre brut.

En tenant compte du décime additionnel, la première quantité a payé $0^f,011$ par quintal; on aura donc les droits correspondants en multipliant $0^f,011$ par 2864,17, ce qui donne $31^f,50$.

La seconde quantité a payé $0^f,55$ par quintal; on aura donc le montant des droits en multipliant $0^f,55$ par 8163,74, ce qui donne $4490^f,06$.

La troisième quantité a payé $1^f,10$ par quintal; les droits perçus s'obtiendront donc en multipliant $1^f,10$ par 716,50, ce qui donne $788^f,15$.

Enfin la quatrième quantité a payé $1^f,65$ par quintal, on aura donc le montant des droits acquittés en multipliant $1^f,65$ par $17616^f,63$, ce qui donne $29067^f,44$.

L'ensemble des droits perçus est la somme des quatre nombres obtenus, c'est-à-dire $34377^f,15$.

Le gouvernement rembourse, à la sortie, pour 75 kilog. de soufre raffiné, les droits perçus pour 100 kilog. de soufre brut; si donc on divise par 75 le poids du soufre exporté et qu'on multiplie le quotient par 100, ce qui revient à ajouter à ce poids son tiers, le résultat, 2936104 kilog., exprimera le poids de soufre brut dont les droits d'entrée devront être restitués. Or ce poids est précisément la somme de ceux dont l'importation est justifiée; le drawback s'élèvera donc à une somme égale aux droits ci-dessus, c'est-à-dire à $34377^f,15$.

195. 1° On aura d'abord le montant des droits par chapeau, y compris le décime additionnel, en divisant 147450 fr. par 107236, ce qui donne $1^f,375$. Pour avoir les droits, déduction faite du décime additionnel, il faut de ce nombre retrancher son onzième, c'est-à-dire $0^f,125$, ce qui donne $1^f,25$.

2° Le montant des droits étant de $1^f,375$ par chapeau, on aura le nombre des chapeaux réexportés en divisant 62424 fr. par $1^f,375$, ce qui donne 45399.

3° Le bénéfice étant de 3 fr. par chapeau, on obtiendra le bénéfice total en multipliant 3 fr. par 45399, ce qui donne 136197 fr.

196. Le quintal de la première espèce de sucres ayant payé à l'entrée 38 fr. de droits, plus le décime additionnel, ou $3^f,80$, a payé réellement $41^f,80$. Mais ce quintal n'a donné que 70 kilog. de sucre raffiné. Si pour 70 kilog. de sucre raffiné de cette pro-

venance on doit restituer $41^f,80$, pour 1 kilog. de sucre raffiné on devrait restituer $\frac{41^f,80}{70}$, et pour 2458 kilog. de sucre raffiné on devra restituer $\frac{41^f,80 \times 2458}{70}$; en effectuant le calcul, on trouve pour la valeur du drawback, $1467^f,78$.

Le quintal de la deuxième espèce de sucres a payé à l'entrée 52 fr., plus le décime, c'est-à-dire $57^f,20$. Telle est la somme à restituer pour 70 kilog. de sucre raffiné; en raisonnant comme ci-dessus, on verra que pour 43217 kilog. de sucre raffiné, on devra restituer $\frac{57^f,20 \times 43217}{70}$, ou $35314^f,46$.

Le quintal de la troisième espèce de sucres a payé à l'entrée 54 fr., plus le décime, ou $59^f,40$; c'est la somme à restituer pour 70 kilog. de sucre raffiné; pour les 618339 kilog., le montant du drawback sera donc $\frac{59^f,40 \times 618339}{70}$, ou $524704^f,81$.

Le quintal de la quatrième espèce de sucres a payé, comme la précédente, $59^f,40$, y compris le décime; c'est la somme à restituer pour 73 kilog.; le montant du drawback pour 31045 kilog., sera donc $\frac{59^f,40 \times 31045}{73}$, ou $25261^f,27$.

Le quintal de la cinquième espèce de sucres a payé à l'entrée 57 fr., plus le décime, ou $62^f,70$; comme il s'agit de sucres bruts, le montant du drawback aura pour valeur $\frac{62^f,70 \times 23224650}{70}$, ou $20802650^f,80$.

Enfin, le quintal de la sixième espèce de sucres a payé, comme la précédente, $62^f,70$, y compris le décime; comme il s'agit de sucres terrés, le montant du drawback aura pour valeur $\frac{62^f70 \times 984381}{73}$, ou $846858^f,87$.

En faisant la somme des nombres obtenus, on trouvera pour le montant du drawback total, $22236257^f,87$.

197. A 4 fr. le quintal, 1254420 kilog., ou $12544^{quint},20$, donnent lieu à une prime de $4^f \times 12544,20$, ou $50176^f,80$.

A $3^f,20$ le quintal, 968 kilog., ou $9^{quint},68$, donnent lieu à une prime de $3^f,20 \times 9,68$, ou 30,976..., ou $31^f,00$.

A $2^f,70$ le quintal, 109373 kilog., ou $1093^{quint},73$, représentent une prime de $2,70 \times 1093,73$, ou $2953^f,07$.

La somme de ces trois primes partielles est $53160^f,87$; si on la retranche de la prime totale 93054 fr., le reste, $39893^f,13$, exprimera la somme des primes accordées aux deux poids inconnus.

La somme des trois poids partiels donnés est $13647^{\text{quint}},61$; si on la retranche du poids total 2697175 kilog., ou $26971^{\text{quint}},75$, le reste $13324^{\text{quint}},14$ sera la somme des deux poids inconnus.

La question proposée revient donc à celle-ci : partager $13324^{\text{quint}},14$ en deux parties telles, qu'en multipliant 3 fr. par la première, et $2^{\text{f}},50$ par la seconde, on obtienne deux produits dont la somme fasse $39893^{\text{f}},13$.

I. Si la première partie était nulle, et que la prime entière fût calculée à raison de $2^{\text{f}},50$ le quintal, elle s'élèverait à $2^{\text{f}},50 \times 13325,14$, c'est-à-dire à $33310^{\text{f}}35$, somme qui est inférieure de $582^{\text{f}},78$ à la somme donnée, $39893^{\text{f}},13$.

Or, pour chaque quintal à $2^{\text{f}},50$, que l'on convertira en un quintal à 3 fr., la prime augmentera de $0^{\text{f}},50$; pour qu'elle augmente de $6582^{\text{f}},78$, il faut donc prendre un nombre de quintaux à 3 fr., tel qu'en multipliant $0^{\text{f}},50$ par ce nombre, on obtienne précisément $6582^{\text{f}},78$. Ce nombre s'obtiendra en divisant $6582^{\text{f}},78$ par $0^{\text{f}},50$, ce qui donne $13165^{\text{quint}},56$.

En retranchant ce poids de $13324^{\text{quint}},14$, on aura le nombre de quintaux dont la prime a été calculée à raison de $2^{\text{f}},50$; on trouve $158^{\text{quint}},58$.

II. On peut résoudre plus commodément ce problème par l'algèbre. Si l'on appelle x et y les nombres de quintaux dont la prime a été calculée à raison de 3 fr. et de $2^{\text{f}},50$, on aura immédiatement les deux équations

$$x + y = 13324,14,$$

et

$$3^{\text{f}}x + 2^{\text{f}},5y = 39893^{\text{f}},13.$$

Si l'on prend dans la première la valeur de y, savoir

$$y = 13324,14 - x,$$

et qu'on la substitue dans la seconde, on obtient l'équation

$$3^{\text{f}}x + 2,5\,(13324^{\text{f}},14 - x) = 39893^{\text{f}},13,$$

ou

$$(3^{\text{f}} - 2^{\text{f}},5)\,x = 39893^{\text{f}},13 - 2^{\text{f}},5 \times 13324,14,$$

ou

$$0^{\text{f}},5\,.\,x = 6582^{\text{f}},78;$$

d'où

$$x = \frac{6582^{\text{f}},78}{0^{\text{f}},5} = 13655^{\text{quint}},6.$$

Par suite $y = 13324^{\text{quint}},14 - 1365^{\text{quint}},15 = 158^{\text{quint}},58.$

198. On aura le prix moyen des foulards exportés en divisant 97080 fr. par 809, ce qui donne 120 fr.; leur valeur s'est donc accrue de 10 fr. par l'impression.

199. La valeur totale des crêpes de Chine unis étant de 2816 fr., la valeur de chacun d'eux est le quotient de ce nombre par 44, c'est-à-dire 64 fr. Puisque cette valeur s'est élevée de 24 fr. par la main-d'œuvre, la valeur de chaque crêpe de Chine brodé est de 88 fr.; la valeur totale des châles exportés est donc 88×44, ou 3872 fr.

200. Puisque le déchet est de $\frac{1}{5}$ à la mouture, on aura le poids de la garance moulue en prenant les $\frac{4}{5}$ ou les 0,8 du poids des racines, 955510 kilog., ou $9555^{\text{quint}},10$, ce qui donne $7644^{\text{quint}},08$. On aura ensuite le poids du quintal de garance moulue en divisant 764408 fr. par 7644,08, ce qui donne 100 fr. La valeur de la garance s'est donc accrue de 25 fr. par quintal en subissant la mouture.

§ 3. Entrepôts. — Transit.

201. 1° La somme des poids des marchandises entrées dans les entrepôts pendant ces six années est 60533874 quintaux; le poids moyen annuel s'obtiendra en divisant ce nombre par 6, ce qui donne 10088979 quintaux;

2° La somme des valeurs officielles des marchandises entreposées est 3915,5 millions; la valeur moyenne annuelle est le sixième de cette somme, c'est-à-dire 652,6 millions. (Les nombres donnés n'étant approchés qu'à une centaine de millions près, il convient de ne pas pousser plus loin l'approximation au résultat);

3° La valeur moyenne du quintal métrique de ces marchandises, s'obtiendra en divisant leur valeur totale 3915,5 millions par le nombre total de quintaux 60533874, ce qui donne $64^{f},68$.

202. Pour avoir le poids total des marchandises entrées dans l'entrepôt de Marseille pendant ces six années, il faut multiplier 3796591 quintaux par 5, ce qui donne 18982955 quintaux; ajoutez à ce nombre les 5462145 quintaux entrés en 1854, ce qui donne 24445100 quintaux; puis divisez la somme par 6, ce qui donne $4074181^{\text{quint}},67$.

Pour avoir la valeur moyenne de ces marchandises, il faut de même multiplier 333,6 millions par 5; ajouter au produit 240,2 millions, et diviser la somme par 6; on trouve ainsi 316,0 millions.

Le poids moyen des marchandises entrées annuellement dans l'ensemble des entrepôts étant 10088979 quintaux, le rapport du poids des marchandises entrées dans l'entrepôt de Marseille, au

poids total, est le quotient de 4074181,67 par 10088979, c'est-à-dire 0,403...; ainsi Marseille a reçu environ 40 pour 100 du poids des marchandises entreposées.

La valeur moyenne de toutes les marchandises entreposées étant 652,6 millions; le rapport de la valeur des marchandises entrées annuellement dans l'entrepôt de Marseille, à la valeur totale, est le quotient de 316,0 par 652,6, c'est-à-dire 0,484.... Ainsi Marseille a reçu plus de 48 pour 100 de la valeur des marchandises entrées en entrepôt.

203. 1° On opérera comme au numéro précédent. Le produit de 2321798 quintaux par 5 est 11608990 quintaux; ajoutant 3364416 quintaux, on obtient 14973406 quintaux, dont le sixième est 2495567^{quint},67.

De même, le produit de 215,9 par 5 est 1079,5; ajoutant 244,7, on obtient 1324,2, dont le sixième est 220,7 millions.

2° Comme les moyennes obtenues pour les entrepôts de Marseille et du Havre se rapportent aux mêmes années, il suffit d'ajouter leurs moyennes partielles pour obtenir la moyenne totale. On additionnera donc les poids moyens 4074181^{quint},67 et 2495567^{quint},67, ce qui donne 6569749^{quint},34. On additionnera de même les valeurs moyennes 316 millions et 220,7 millions, ce qui donne 536,7 millions.

3° Le rapport de 2495567^{quint},67 à 10088979 quintaux est 0,247.... Ainsi l'entrepôt du Havre a reçu un peu moins de 25 pour 100 du poids total entré dans tous les entrepôts.

Le rapport de 220,7 à 652,6, est 0,338...; ainsi la valeur des marchandises entrées dans l'entrepôt du Havre, représente près de 34 pour 100 de la valeur totale des marchandises entreposées.

De même, le rapport de 6569749^{quint},34 à 10088979 quintaux est 0,651.... Ainsi les entrepôts de Marseille et du Havre réunis ont reçu plus de 65 pour 100 du poids total des marchandises entreposées.

Le rapport de 536,7 à 652,6 est 0,822...; ainsi la valeur des marchandises entrées dans ces deux entrepôts réunis représente plus de 82 pour 100 de la valeur totale des marchandises entreposées.

On peut remarquer que ces deux derniers rapports auraient pu s'obtenir d'une manière plus simple; le premier, 0,65, est en effet la somme des rapports 0,403... et 0,247..., qui se rapportent respectivement aux entrepôts de Marseille et du Havre; le second, 0,822, est la somme des rapports 0,484... et 0,338..., qui se rapportent respectivement à ces mêmes entrepôts.

204. On aura le poids moyen des marchandises entrées pendant chacune des six années, en multipliant 10088979 quintaux par 0,02586, ce qui donne 260901 quintaux. Le poids total entré pendant ces six années sera le produit de 260901 quintaux par 6, c'est-à-dire 1565406 quintaux. Si de ce nombre on retranche les 318080 quintaux entrés en 1854, le reste, 1247326 quintaux, sera la quantité totale entrée dans les cinq années précédentes, et le cinquième de ce nombre, ou 249465^{quint},2, exprimera le poids moyen des marchandises entrées dans les entrepôts de Paris pendant chacune de ces cinq années.

De même, on aura la valeur moyenne des marchandises entrées pendant chacune des six années, en multipliant 652,6 millions par 0,0534, ce qui donne 34,85 millions (à moins d'une dizaine de mille près). La valeur totale des marchandises entrées pendant ces six années sera le produit de 34,85 millions par 6, c'est-à-dire 209,1 millions. Si de ce nombre on retranche 37,6 millions, valeur des marchandises entrées en 1854, le reste, 171,5 millions, exprimera la valeur totale des marchandises entrées dans les cinq années précédentes, et le cinquième de ce nombre, ou 34,3 millions, sera la valeur moyenne des marchandises entrées dans les entrepôts de Paris pendant chacune de ces cinq années.

205. Le quotient de 3262666 par 13721981 est 0,237..., et le quotient de 123,5 par 701,9 est 0,175.... Ainsi, dans l'ensemble des marchandises entreposées en 1854, les céréales représentent près de 24 pour 100, si l'on considère le poids, et près de 18 pour 100, si l'on considère la valeur.

Le quotient de 786000 par 13721981 est 0,059..., et le quotient de 83,3 par 701,9 est 0,118.... Ainsi le coton en laine représente près de 6 pour 100, si l'on considère le poids, et près de 12 pour 100, si l'on considère la valeur.

Le quotient de 1473593 par 13721981 est 0,107..., et le quotient de 100,4 par 701,9 est 0,143.... Ainsi le sucre représente près de 11 pour 100, si l'on considère le poids, et plus de de 14 pour 100, si l'on considère la valeur.

Le quotient de 4278161 par 13721981 est 0,311..., et le quotient de 9,1 par 701,9 est 0,0129.... Ainsi la houille représente environ 31 pour 100, si l'on considère le poids, et un peu moins de 1,3 pour 100, si l'on considère la valeur.

Enfin, le quotient de 28347 par 13721981 est 0,0020..., et le quotient de 2,6 par 701,9 est 0,0037.... Ainsi le tabac représente 0,2 pour 100, si l'on considère le poids, et un peu moins de 0,4 pour 100, si l'on considère la valeur.

206. La différence entre 867438 et 852365 est 15073; si donc, aux 305398 quintaux restés en entrepôt au 31 décembre 1853, on ajoute les 15073 quintaux formant l'excès du poids des marchandises entrées en 1854 sur le poids des marchandises sorties, la somme 320471 quintaux exprimera le poids des marchandises en entrepôt au 31 décembre 1854. En divisant 17074279 fr. par ce nombre de quintaux, on aura la valeur moyenne du quintal; on trouve $53^f,28$.

207. La différence entre 744268 et 740892 est 3366; si donc, aux 143633 quintaux restés en entrepôt au 31 décembre 1853, on ajoute les 3366 quintaux formant l'excès du poids des marchandises entrées en 1854 sur le poids des marchandises sorties, la somme 146999 quintaux exprimera le poids des marchandises en entrepôt au 31 décembre 1854. En multipliant $40^f,27$ par ce nombre, on aura la valeur réelle de ces marchandises; on trouve $5919649^f,73$.

208. La différence entre 560796 et 507716 est 53080. Si donc, aux 135821 quintaux restés en entrepôt au 31 décembre 1853, on ajoute 53080 quintaux, la somme 188900 quintaux exprimera le poids resté en entrepôt au 31 décembre 1854. En divisant 7069972 fr. par ce nombre, on aura la valeur officielle moyenne du quintal, et en divisant 10199455 fr. par ce même nombre, on aura la valeur moyenne réelle du quintal. On trouve, dans le premier cas, $37^f,426$, ou environ $37^f,43$; et dans le second cas, $53^f,464...$, ou environ $53^f,46$.

209. Le nombre de quintaux restés en entrepôt au 31 décembre 1854 est le quotient de 1782593 fr. par $11^f,12$, c'est-à-dire $160305^{quint},12...$, ou, à très-peu près, 160305 quintaux.

Les 142168 quintaux restés en entrepôt au 31 décembre 1853, plus les 235812 quintaux entrés en 1854, font une somme de 377980 quintaux; si l'on en retranche les 160305 quintaux restés en entrepôt au 31 décembre 1854, le reste, 217675 quintaux, exprimera la quantité sortie dans le courant de l'année.

210. La somme des poids donnés est 3228352 quintaux; le sixième de cette somme, ou $538058^{quint},67$, exprime le poids moyen annuel.

A raison de 51 centimes par quintal, la recette du Trésor est exprimée par $0^f,51 \times 538058,67$, ou $274409^f,92$.

211. La valeur moyenne du quintal des marchandises expé-

diées en transit pendant l'année 1854 est le quotient de 377,1 millions par 732525, ou $\frac{377,1}{732525}$ millions.

La valeur des 538058^{quint},67 expédiés annuellement, en moyenne, pendant les six années considérées, serait donc

$$\frac{377,1 \times 538058,67}{732525}, \quad \text{ou} \quad 276,9 \text{ millions.}$$

On a trouvé, au numéro précédent, que les droits de transit s'élèvent annuellement à 274409^{f},92 ; le quotient de ce nombre par 276,9 millions, ou par 276900000 fr., exprimera le rapport demandé; on trouve, en faisant la division, 0,000991..., ou, à très-peu près, 0,001.

212. La valeur totale des marchandises expédiées en transit en 1854 étant de 377,1 millions, on aura la part de la Suisse en prenant les 0,474 de ce nombre, ce qui donne 178,7 millions.

On aura de même la part de la Belgique, en prenant les 0,198 de 377,1 millions, ce qui donne 74,67 millions.

213. On obtiendra la part de l'Angleterre ou celle des États-Unis, en prenant les 0,344 de 377,1 millions, ce qui donne 129,7 millions.

214. La valeur du kilogramme d'ivoire s'obtiendra en divisant 2574 fr. par 143, ce qui donne 18 fr.

Le droit de transit étant de 0^{f},51 par quintal métrique, s'élèvera pour 143 kilog., ou 1^{quint},43, à 0^{f},51 $\times$ 1,43, c'est-à-dire à 0^{f},7293, ou environ 0^{f},73. Le rapport du droit de transit à la valeur de la marchandise est le quotient de 0^{f},73 par 2574, c'est-à-dire 0,000283....

215. Les 67320 kilogrammes font 673,2 quintaux ; le prix du quintal étant 17 fr., le prix total sera 17^{f} $\times$ 673,2, ou 11444^{f},40.... Le rapport du droit de transit à cette valeur totale est le même que le rapport de 0^{f},51 à 17 fr.; en divisant le premier nombre par le second, on obtient 0,03 pour le rapport demandé.

216. Le prix du kilogramme est le quotient de 46^{f},20 par 77, c'est-à-dire 0^{f},60. Le droit de transit est le produit de 0^{f},51 par 0,77, c'est-à-dire 0^{f},3927. Le rapport demandé est le quotient de ce nombre par 46^{f},20, c'est-à-dire 0,0085.

217. Le prix du kilogramme est le quotient de 23200 fr. par 116, c'est-à-dire 2000 fr. Le droit de transit est le produit de 0^{f},51 par 1,16, c'est-à-dire 0^{f},5916. Le rapport demandé est le quotient de ce nombre par 23200 fr., c'est-à-dire 0,0000254....

218. La valeur totale des livres est le produit de 7 fr. par 2484, c'est-à-dire 17388 fr.

Le droit de transit a pour valeur $0^f,51 \times 24,84$, ou $12^f,67$. Le rapport demandé est le quotient de ce nombre par 17388, c'est-à-dire 0,0007286....

219. 1° On aura la valeur moyenne du kilogramme en divisant 188850 fr. par 157657, ce qui donne $1^f,19785$....

La valeur des machines expédiées d'Angleterre aura pour expression $1^f,19785 \times 115524$, c'est-à-dire $138380^f,42$.

La valeur des machines expédiées de Belgique est la différence entre le nombre précédent et la valeur totale 188850 fr.; on trouve, en faisant la soustraction, $50469^f,58$.

La part de la Suisse dans les valeurs expédiées aura pour expression $1^f,19785 \times 151844$, c'est-à-dire $181886^f,34$.

La part de l'Allemagne aura de même pour expression le produit $1^f,19785 \times 4160$, c'est-à-dire $4983^f,06$.

La somme de ces deux parts est $186870^f,40$; en la retranchant de la valeur totale 188850 fr., on obtiendra pour reste la part des États Sardes; on trouve $1979^f,60$.

2° Le montant des droits de transit est $0^f,51 \times 1576,57$, c'est-à-dire $804^f,05$. Le rapport demandé est le quotient de ce nombre par 188850, c'est-à-dire 0,004257....

220. 1° La valeur de la bimbeloterie expédiée par l'Allemagne est $4^f,50 \times 13714$, ou 61713 fr.

La valeur de la bimbeloterie expédiée par la Belgique est, de même, $4^f,50 \times 12149$, ou $54670^f,50$.

La somme des deux poids précédents 13714 kilog. et 12149 kilog. est 25863 kilog.; si on la retranche du poids total 25911 kilog., le reste, 48 kilog., exprimera le poids de la bimbeloterie expédiée en transit par les autres pays; sa valeur aura pour expresson $4^f,50 \times 48$, ou 216 fr.

Il résulte de ce calcul que la valeur totale de la bimbeloterie expédiée en transit est $116599^f,50$.

On aura la part de l'Espagne dans les valeurs expédiées, en multipliant $4^f,50$ par 6573, ce qui donne. . . . . $29578^f,50$

La part des États-Unis sera $4^f,50 \times 4540$, ou. . . .	20430 ,00
La part du Brésil sera $4^f,50 \times 4387$, ou.	19741 ,50
La part de Rio de la Plata sera $4^f,50 \times 3695$, ou. .	16627 ,50
La part de l'Angleterre sera $4^f,50 \times 2136$, ou. . .	9612 ,00
La part du Pérou sera $4^f,50 \times 1303$, ou.	5863 ,50
La somme de ces parts est. . .	$101853^f,00$

Si on la retranche de la valeur totale 116599f,50, le reste, 4746f,50, exprimera la part des autres pays.

2° Les droits de transit ont pour valeur 0f,51 × 259,11, c'est-à-dire 132f,1461..., ou environ 132f,15. Le rapport demandé est le quotient de ce nombre par 116599f,50, c'est-à-dire 0,001133....

221. 1° On aura d'abord la valeur moyenne du kilogramme, en divisant 874721 fr. par 18290, ce qui donne 47f,825.

Cela posé, la valeur des articles expédiés d'Allemagne aura pour expression 47f,825 × 7794, ou. 372748f,05

La valeur des articles expédiés de Suisse aura pour expression 47f,825 × 5405, ou. 258494,13

La valeur des articles expédiés de Belgique aura pour expression 47f,825 × 4905, ou. 234581,62

La somme de ces valeurs est. . . 865823f,80
Si on la retranche de la valeur totale. . . 874721,00

Le reste. . . 8897f,20

exprimera la valeur des articles expédiés par les autres pays.

Dans la valeur expédiée, la part des États-Unis est exprimée par 47f,825 × 9760, ou. 466772f,00

La part de l'Angleterre est 47f,825 × 4364, ou. . . 221621,05

La part de l'Espagne est 47f,825 × 1709, ou. 81732,93

La part du Brésil est 47f,825 × 1060, ou. 50694,50

La somme de ces valeurs est. . . 820820f,48
Si on la retranche de la valeur totale. . . 874721,00

Le reste. . . 53900f,52

exprimera la part des autres pays de destination.

2° Le montant des droits de transit est 0f,51 × 182,9, c'est-à-dire 93f,279, ou environ 93f,28. Le rapport demandé est le quotient de ce nombre par 874721, c'est-à-dire 0,0001066....

§ 4. — Commerce extérieur du numéraire et des matières précieuses.

222. La somme des poids donnés est 375016 hectogrammes. Les droits étant de 1 centime par hectogramme, plus le décime additionnel, reviennent à 0f,011 par hectogramme. Le nombre demandé sera donc 0f,011 × 375016, ou 4125f,18.

223. La valeur de l'hectogramme des monnaies d'or importées s'obtiendra d'abord en divisant 112504800 fr. par 375016,

ce qui donne 300 fr.; la valeur du kilogramme est donc 3000 fr. Puisque cette valeur est fixée d'après le titre, ces 3000 fr. représentent la valeur du poids d'or contenu dans un kilogramme de monnaie, attendu que l'on peut négliger la valeur de l'alliage; le titre moyen demandé est donc le rapport de 3000 à 3444,44..., ou de 3000 à $3444\frac{2}{9}$, ou encore de 27000 à 31000, ou enfin de 27 à 31, c'est-à-dire 0,8709..., ou, à très-peu près, 0,871.

224. Le titre des monnaies de France étant 0,900, en multipliant le poids total 375016 hectog. par 0,9, on obtiendra le poids d'or pur contenu, par hypothèse, dans les monnaies importées; on trouve $337514^{\text{hectg}},4$. La valeur officielle du kilogramme d'or pur étant $3444^{\text{f}},44$, celle de l'hectogramme est $344^{\text{f}},44$.... On obtiendra donc la valeur demandée en multipliant $344^{\text{f}},44$... par 337514,4, ce qui donne 116253460 fr.

225. 1° La somme des poids donnés est 186570 hectogrammes; la valeur totale des monnaies d'or exportées sera donc $300^{\text{f}} \times 186570$, c'est-à-dire 55971000 fr.

2° Les monnaies d'or importées, formant un poids de 375016 hectogrammes, représentant une valeur de 112504800 fr., les monnaies d'or demeurées en France seront représentées en poids par $375016^{\text{hectg}} - 186570^{\text{hectg}}$, c'est-à-dire 188446 hectog., et en valeur par $112504800^{\text{f}} - 55971000^{\text{f}}$, c'est-à-dire 56533800 fr.

226. Les 4381353 hectogrammes reviennent à $438135^{\text{k}},3$; on aura donc le montant des droits par kilogramme, y compris le décime additionnel, en divisant $4819^{\text{f}},50$ par 438135,3, ce qui donne $0^{\text{f}},011$. Les droits par kilogramme, non compris le décime additionnel, se réduisent donc à $0^{\text{f}},01$.

227. La valeur de l'hectogramme des monnaies d'argent importées s'obtiendra d'abord en divisant 87627060 fr. par 4381353, ce qui donne 20 fr.; la valeur du kilogramme est donc 200 fr. Puisque la valeur est fixée d'après le titre, ces 200 fr. représentent la valeur du poids d'argent pur contenu dans un kilogramme de monnaie, attendu que l'on peut négliger le poids de l'alliage. Le titre moyen demandé est donc le rapport de 200 fr. à $222^{\text{f}},22$..., ou de 200 à $222\frac{2}{9}$, ou encore de 1800 à 2000, ou enfin celui de 18 à 20, c'est-à-dire 0,9. Ce titre moyen est donc celui des monnaies de France.

228. 1° La valeur totale des monnaies d'argent exportées est $20^{\text{f}} \times 9554533$, ou 191090660 fr.

2° Les monnaies d'argent importées, formant un poids de 4381353 hectog., et représentant une valeur de 87627060 fr., les monnaies d'argent sorties de France seront représentées en poids par 9554533^{hectg} — 4381353^{hectg}, c'est-à-dire 5173180 hectog., et en valeur par 191090660^{f}—87627060^{f}, c'est-à-dire 103463600 fr.

229. On a vu (n° **225**) que le commerce des monnaies d'or a donné lieu à une augmentation dans la valeur totale du numéraire en circulation, représentée par 56533800 fr.; et l'on vient de voir, au numéro précédent, que le commerce des monnaies d'argent a donné lieu à une diminution dans la valeur totale du numéraire, représentée par 103463600 fr.

Le commerce des monnaies a donc occasionné, en 1854, une diminution dans la valeur totale du numéraire en circulation en France; et cette diminution est exprimée par

103463600^{f} — 56533800 fr., c'est-à-dire par 46929800 fr.

230. 1° On aura d'abord le montant des droits par hectogramme, y compris le décime additionnel, en divisant $337507^{f},20$ par 1227299, ce qui donne $0^{f},27499...$ ou $0^{f},275$. Le décime additionnel ayant pour effet d'augmenter les droits de 1 dixième, c'est-à-dire de l'élever aux 11 dixièmes de leur valeur primitive, on obtiendra le montant des droits, non compris le décime, en retranchant de $0^{f},275$ la onzième partie de ce nombre, ou $0^{f},025$, ce qui donne $0^{f},25$.

2° Le rapport demandé est le quotient de $0^{f},275$ par 300, c'est-à-dire 0,0009166...

231. Il suffit de diviser 11699060 par 1227299, ce qui donne 0,953... Ainsi l'or brut venant d'Angleterre représente plus de 95 pour 100 de l'or brut total importé.

232. Les 28673 hectogrammes reviennent à $2867^{k},3$ ou à 28,673 quintaux; le montant des droits acquittés est donc $0^{f},25 \times 28,673$, c'est-à-dire $7^{f},168...$ ou environ $7^{f},17...$

233. Les 611071 hectogrammes reviennent à $61107^{k},1$; le montant des droits par kilogramme, non compris le décime, étant $0^{f},05$, le montant des droits y compris le décime, sera $0^{f},055$. La somme cherchée est donc $0^{f},055 \times 61107,1$ ou $3360^{f},89$.

234. Le montant des droits par kilogramme étant $0^{f},055$, le montant des droits par hectogramme est $0^{f},0055$. Le rapport demandé est donc le quotient de $0^{f},0055$ par 20 fr., c'est-à-dire 0,000275.

235. Les 3622577 hectogrammes reviennent à 3622,577 quintaux. Les droits étant de $0^f,25$, ou $\frac{1}{4}$ de franc, par quintal, on aura le montant des droits, non compris le décime, en prenant le quart de 3622,577, ce qui donne $905^f,644$... Ajoutant le dixième ou $90^f,564$, on obtient pour le montant des droits y compris le décime additionnel $996^f,208$ ou $996^f,21$.

236. I. S'il n'y avait eu que de l'or, la valeur totale eût été $300^f \times 2960$ ou 888000 fr., valeur supérieure de 34720 fr. à celle qui est donnée. Pour chaque hectogramme d'or qu'on remplacera par un hectogramme d'argent, la valeur totale diminuera de 300 fr. et augmentera de 20 fr., elle diminuera donc en définitive de $300^f - 20^f$ ou de 280 fr. Pour qu'elle soit ramenée ainsi à la valeur donnée, il faut remplacer par de l'argent un nombre d'hectogrammes d'or tel qu'en multipliant 280 fr. par ce nombre on obtienne 34720 fr. Ce nombre est donc le quotient de 34720 fr. par 280 fr., c'est-à-dire 124.

Puisqu'il y avait 124 hectogrammes d'argent, il y avait 2960—124 ou 2836 hectogrammes d'or.

II. On peut résoudre plus commodément ce problème par l'algèbre. Soit x le nombre d'hectogrammes d'or et y le nombre d'hectogrammes d'argent; l'énoncé du problème donne immédiatement les deux équations

$$x + y = 2960$$

et

$$300\,x + 20\,y = 853280.$$

De la première on tire

$$y = 2960 - x;$$

mettant pour y cette valeur dans la seconde équation, on obtient

$$300\,x + 2960 \times 20 - 20\,x = 853280$$

ou

$$300\,x + 59200 - 20\,x = 853280,$$

d'où

$$280\,x = 853280 - 59200 = 794080,$$

puis

$$x = \frac{794080}{280} = 2836.$$

Par suite

$$y = 2960 - 2836 = 124.$$

Il y avait donc 2836 hectogrammes d'or et 124 hectogrammes d'argent.

§ 5. Navigation.

237. La jauge moyenne s'obtiendra en divisant 4595000 tonneaux par 33934, ce qui donne 135,4 ou environ 135 tonneaux.

238. On obtiendra le nombre demandé en multipliant 4595000 tonneaux par 0,42, ce qui donne 1929900 tonneaux.

239. Le nombre total des navires employés pendant ces cinq années est 167052; le cinquième de ce nombre, à une unité près, ou 33410 est le nombre moyen de navires employés chaque année.

La somme des tonnages totaux est 20047000 tonneaux; le cinquième de ce nombre, ou 4009400 tonneaux, est le tonnage moyen total.

En divisant ce tonnage moyen total par le nombre moyen des navires, ou 4009400 tonneaux par 33410, on obtiendra le tonnage moyen par navire; en opérant la division à une unité près, on trouve 120 tonneaux.

240. Le nombre moyen d'hommes d'équipage pour les navires chargés s'obtiendra en divisant, à une unité près, 96413 par 9307, ce qui donne 10 hommes. Le tonnage moyen des mêmes navires s'obtiendra en divisant 1131702 tonneaux par 9307, ce qui donne 121 tonneaux.

Le nombre moyen d'hommes d'équipage pour les navires sur lest s'obtiendra en divisant, à une unité près, 7359 par 1021, ce qui donne 7 hommes. Le tonnage moyen des mêmes navires s'obtiendra en divisant 79350 tonneaux par 1021, ce qui donne 77 tonneaux.

Le nombre total des navires français entrés dans les ports de France en 1854, est 9307 + 1021 ou 10328. Le nombre total des marins embarqués sur ces navires est 96413 + 7359 ou 103772. Le tonnage total est 1131702 + 79350 ou 1211052 tonneaux. On aura donc le nombre moyen d'hommes d'équipage en divisant, à une unité près, 103772 par 10328, ce qui donne 10 hommes; et l'on aura le tonnage moyen par navire en divisant 1211052 tonneaux par 10328, ce qui donne 117 tonneaux.

On remarquera que la moyenne du nombre d'hommes d'équipage pour l'ensemble des navires est la même que pour les navires chargés; cela tient à ce que ces deux moyennes ne sont calculées qu'à une unité près.

241. Si du nombre total des navires entrés dans les ports de France, ou 22870, on retranche le nombre des navires fran-

çais, ou 10328, le reste 12542 exprimera le nombre des navires étrangers.

De même, si du nombre total des hommes d'équipage, ou 231377, on retranche le nombre des marins embarqués sur les navires français, c'est-à-dire 103772, le reste 127605 exprimera le nombre des marins embarqués sur les navires étrangers.

De même encore, si du tonnage total, 2948677 tonneaux, on retranche le tonnage total des navires français, ou 1211052 tonneaux, le reste 1737625 tonneaux exprimera le tonnage total des navires étrangers.

On obtiendra donc le nombre moyen d'hommes d'équipage par navire étranger en divisant, à une unité près, 127605 par 12542, ce qui donne 10 hommes; et l'on obtiendra le tonnage moyen par navire étranger en divisant 1737625 tonneaux par 12542, ce qui donne 138 tonneaux.

242. Puisqu'il est sorti 10773 navires français sur 23656, le nombre des navires étrangers sortis des ports de France a été de 23656 — 10773, c'est-à-dire 12883.

Cela posé, comme il est entré 9307 navires français chargés et qu'il en est sorti 5726, il en résulte dans nos ports au bout de l'année une augmentation de 9307 — 5726 ou 3581 navires.

Comme il est entré 1021 navires français sur lest et qu'il en est sorti 5047, il en résulte dans nos ports au bout de l'année une diminution de 5047 — 1021 ou 4026 navires.

Enfin, comme il est entré 12542 navires étrangers et qu'il en est sorti 12883, il en résulte dans nos ports, au bout de l'année, une diminution de 12883 — 12542 ou 341 navires.

243. Les rapports demandés s'obtiendront en divisant les nombres donnés par le nombre total des navires entrés dans les ports de France en 1854, c'est-à-dire par 22870. On trouve ainsi :

Pour l'Angleterre....	0,3987,	ce qui revient à	40 p. 100	environ.
l'Espagne.....	0,0951,	—	$9\frac{1}{2}$	—
les États Sardes	0,0616,	—	6	—
l'Algérie.....	0,0473,	—	5	—
la Norwége....	0,0371,	—	4	—
la Toscane.... et Lucques..	0,0291,	—	3	—
la Turquie.....	0,0206,	—	2	—
les Deux-Siciles	0,0198,	—	2	—
la Grande Pêche	0,0181,	—	2	—
les États-Unis..	0,0178,	—	2	—

Si l'on fait la somme des rapports contenus dans la première colonne, on obtient 0,7452. En retranchant cette somme de l'unité, on aura le rapport du nombre des navires provenant des autres contrées au nombre de navires total. On trouve 0,2547... ou à peu près 25 ½ pour 100.

244. Les rapports demandés s'obtiendront en divisant les nombres donnés par le nombre total des navires sortis des ports de France en 1854, c'est-à-dire par 23656. On trouvera ainsi :

Pour l'Angleterre.....	0,2453...	ou environ	24 ½	pour	100.
les États Sardes.....	0,0716...	ou	— 7	—	
l'Espagne.....	0,0471...	ou	— 5	—	
l'Algérie.....	0,0404...	ou	— 4	—	
la Turquie.....	0,0187...	ou	— 2	—	
la Toscane et Lucques	0,0171...	ou	— 2	—	
les États-Unis.....	0,0166...	ou	— 1 ⅔	—	
la Grande Pêche.....	0,0155...	ou	— 1 ½	—	
les Deux-Siciles.....	0,0105...	ou	— 1	—	

En faisant la somme des rapports contenus dans la première colonne, on trouve 0,4828..; et, en retranchant cette somme de l'unité, on obtient 0,5171... pour le rapport du nombre des navires ayant une autre destination au nombre total de navires sortis; ce rapport revient à près de 52 pour 100.

245. Le nombre total des navires entrés et sortis est 1999 + 2023, ou 4022. Le tonnage total est 570313 + 569635, ou 1139948 tonneaux; et le nombre total des hommes d'équipage est 28945 + 29256, ou 58201.

On aura par conséquent le tonnage moyen en divisant 1139948 tonneaux par 4022, ce qui donne 283 tonneaux. On obtiendra de même le nombre moyen d'hommes d'équipage par navire en divisant, à moins d'une unité, 58201 par 4022, ce qui donne environ 12 hommes.

246. Le nombre total des navires entrés ou sortis est 24, représentant un tonnage total de 547 + 1036, ou 1583 tonneaux, et montés par 52 + 78, ou 130 marins. Le tonnage moyen est donc le quotient de 1583 tonneaux par 24, c'est-à-dire 66 tonneaux; et le nombre moyen d'hommes d'équipage est le quotient de 130 par 24 ou 5,4, c'est-à-dire que ce nombre moyen est approximativement 5 ou 6, mais plutôt 5.

247. On aura le nombre des navires en divisant le tonnage total, 375642, par le tonnage moyen 159, ce qui donne 2361 navires.

248. On aura le nombre des navires en divisant le nombre total des marins, 130119, par le nombre moyen des hommes d'équipage par navire, 12,64; on obtient ainsi 10294 navires.

249. Les 4595000 tonneaux font 45950 fois 100 tonneaux; on aura donc le nombre demandé en divisant le nombre total des marins, ou 471824, par 45950, ce qui donne 10,2 ou environ 10 hommes.

250. I. Si tous les navires avaient été employés à la pêche de la morue, leur jauge totale eût été $133,5 \times 457$ ou 61009,5 tonneaux, nombre inférieur de 2092,5 tonneaux à la jauge réelle. Or, pour chaque navire de la première catégorie que l'on remplacera par un navire de la seconde, la jauge diminuera de 133,5 tonneaux et augmentera de 366, c'est-à-dire qu'en somme la jauge augmentera de $366 - 133,5$ ou 232,5 tonneaux. Pour que l'augmentation atteigne 2092,5 tonneaux, il faut donc remplacer autant de navires de la première catégorie par des navires de la seconde que 232,5 est contenu de fois dans 2092,5, c'est-à-dire 9 fois.

Ainsi il y a eu 9 navires employés à la pêche de la baleine, et par conséquent $457 - 9$ ou 448 employés à la pêche de la morue.

II. On aurait pu résoudre ce problème par l'algèbre. Soit x le nombre des navires employés à la pêche de la morue et y le nombre des navires employés à la pêche de la baleine; l'énoncé du problème conduit immédiatement aux deux équations :

$$x + y = 457$$

$$133,5\,x + 366\,y = 63102.$$

On tire de la première $x = 457 - y$.

Substituant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$133,5 \times 457 - 133,5\,y + 366\,y = 63102$$

ou $$61009,5 + 232,5\,y = 63102,$$

d'où $$232,5\,y = 63102 - 61009,5 = 2092,5$$

et $$y = \frac{2092,5}{232,5} = 9.$$

Par suite $$x = 457 - 9 = 488,$$

comme précédemment.

251. Le nombre des navires à voiles a augmenté de 1002 et diminué de 1229; il a donc réellement diminué de $1229 - 1002$

ou de 227. Au 31 décembre 1854 il était donc réduit à 14426 — 227 ou à 14199.

Le tonnage des navires à voiles a augmenté de 114106 tonneaux, et diminué de 65438 tonneaux; il n'a donc augmenté en réalité que de 114106 — 65438 ou de 48668. Le tonnage des navires à voiles au 31 décembre 1854 était donc 735996 + 48668 ou 784664 tonneaux.

Le nombre des navires à vapeur a augmenté de 44 et diminué de 19; il n'a donc réellement augmenté que de 44 — 19 ou de 25; au 31 décembre 1854, il était donc de 172 + 85 ou de 197.

Le tonnage des navires à vapeur a augmenté de 12194 tonneaux et diminué de 3515 tonneaux; il n'a donc réellement augmenté que de 12194 — 3515 ou 8679 tonneaux; au 31 décembre 1854 il était donc 26419 + 8679 ou 35098.

Ainsi, au 31 décembre 1854, la marine marchande française se composait de 14199 navires à voiles, jaugeant ensemble 784664 tonneaux, et de 197 navires à vapeur, jaugeant ensemble 35098 tonneaux. En tout, 14396 navires, jaugeant 819762 tonneaux.

252. Le nombre des navires en bois est 197 — 103 ou 94; et leur force totale est 19102 — 10043 ou 9059 chevaux-vapeur. Cela posé, on aura la force moyenne des navires en fer en divisant 10043 chevaux-vapeur par 103, ce qui donne 97,5 chevaux-vapeur; et l'on aura la force moyenne des navires en bois en divisant 9059 chevaux-vapeur par 94, ce qui donne 96,3 chevaux-vapeur.

CHAPITRE III.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES SUR LES OPÉRATIONS DE BANQUE.

---

§ 1. Monnaies étrangères.

253. Angleterre. I. Le poids total d'or fin contenu dans la pièce de 20 fr. est le produit de $6^{gr},45161$ par 0,900, c'est-à-dire $5^{gr},806449$. La vingtième partie de ce poids, ou $0^{gr},290322$, est le poids d'or fin qui entre, pour chaque franc, dans les monnaies d'or françaises.

Le poids total d'or fin contenu dans le souverain d'Angleterre est le produit de $7^{gr},980855$ par 0,917, c'est-à-dire $7^{gr},318444035$.

En divisant ce poids par $0^{gr},290322$, on obtiendra la valeur au pair du souverain; on trouve $25^{f},208$, ou à peu près $25^{f},21$.

II. Le poids d'or fin contenu dans la pièce de 20 fr. est exprimé par $6^{gr},45161 \times 0,900$; le poids d'or fin qui entre, pour chaque franc, dans les monnaies françaises, est donc

$$\frac{6^{gr},45161 \times 0,900}{20}.$$

Le poids total d'or fin contenu dans le souverain d'Angleterre est exprimé par $7^{gr},980855 \times 0,917$. D'après la définition, la valeur au pair du souverain sera donc le quotient de ce nombre par l'expression fractionnaire écrite plus haut, c'est-à-dire

$$\frac{7^{gr},980855 \times 0,917 \times 20}{6^{gr},45161 \times 0,900}.$$

Cette valeur se calcule immédiatement par logarithmes : on trouvera :

log 7,980855	= 0,9020495		
log 0,917	= $\bar{1}$,9623693		
log 20	= 1,3010300		
Somme...	2,1654488	.....	2,1654488
log 6,45161	= 0,8096681		
log 0,900	= $\bar{1}$,9542425		
Somme...	0,7639106	.....	0,7639106
		Différence...	1,4015382

Cette différence est le logarithme de 25,2079.... La valeur au pair du souverain est donc $25^f,2079$, ou $25^f,21$.

254. Ils valent 357 fois $25^f,21$, c'est-à-dire $8999^f,97$, ou, à très-peu près, 9000 fr.

(Si l'on adoptait, pour la valeur du souverain, le nombre $25^f,208$, on trouverait pour la valeur des 357 souverains $8999^f,256$.)

255. Puisque la pièce de 20 fr. pèse $6^{gr},45161...$, on peut dire que $6^{gr},45161...$ d'or monnayé, au titre de 0,900, valent 20 fr.; 1 gramme de cet or vaudrait donc

$$\frac{20^f}{6,45161...},$$

et 1000 grammes du même or vaudront

$$\frac{20000^f}{6,45161...}, \quad \text{ou} \quad 3100 \text{ fr.}$$

Mais la retenue étant de $6^f,70$ par kilogramme, ce poids d'or ne serait payé, au change des monnaies, que $3100^f - 6^f,70$, c'est-à-dire $3093^f,30$.

La valeur d'une monnaie étant proportionnelle à son titre, en désignant par x la valeur, avec retenue au change des monnaies, d'un kilogramme d'or monnayé, au titre de 0,916, on devra avoir la proportion

$$\frac{x}{3093^f,30} = \frac{0,916}{0,900};$$

d'où $$x = 3093^f,30 \cdot \frac{0,916}{0,900} = 3148^f,29.$$

256. Le poids total d'or fin contenu dans une guinée est $8^{gr},380 \times 0,917$, ou $7^{gr},68446$. On a vu, au n° **253**, que le poids d'or fin qui entre, pour chaque franc, dans les monnaies d'or françaises, est $0^{gr},290322$. D'après la définition, la valeur cherchée s'obtiendra en divisant $7^{gr},68446$ par $0^{gr},290322$, ce qui donne $26^f,468...$, ou, à peu près, $26^f,47$.

257. Elles valent 439 fois $26^f,47$, ou $11620^f,33$.

258. I. Puisque le kilogramme d'or anglais, au titre légal de 0,917, se paye $3148^f,29$ au change des monnaies, en divisant les $6401^f,75$ par $3148^f,29$, on aura, en kilogrammes, le poids total des 250 pièces; on trouve $2^k,035948$, ou $2035^{gr},948$.

S'il n'y avait eu que des souverains, le poids total eût été

de 250 fois $7^{gr},981$, c'est-à-dire de $1995^{gr},250$; ce poids est inférieur de $40^{gr},698$ au poids véritable.

Or, pour chaque souverain qu'on remplacera par une guinée, le poids augmentera de la différence entre les poids des deux pièces, c'est-à-dire de la différence entre $8^{gr},380$ et $7^{gr},981$, ou de $0^{gr},399$. Pour que le poids total augmente de $40^{gr},698$, il faut donc remplacer autant de souverains par des guinées que $0^{gr},399$ est contenu de fois dans $40^{gr},698$, c'est-à-dire 102.

Il y avait donc 102 guinées, et, par conséquent, $250 - 102$, ou 148 souverains.

II. On peut encore traiter ce problème par l'algèbre. Si l'on désigne par x le nombre des souverains, et par y le nombre des guinées, on aura à résoudre les deux équations :

$$x + y = 250,$$

$$7^{gr},981 \,.\, x + 8^{gr},380\, y = 2035^{gr},948.$$

De la première, on tire $x = 250 - y$; et, en remplaçant x par cette valeur dans la seconde équation, on obtient

$$7^{gr},981 \times 250 - 7^{gr},981 \,.\, y + 8^{gr},380 \,.\, y = 2035^{gr},948\,;$$

d'où $\quad 0^{gr},399\, y = 2035^{gr},948 - 1995^{gr},250 = 40^{gr},698,$

et $$y = \frac{40^{gr},698}{0,399} = 102.$$

Par suite, $x = 250 - 102 = 148$, comme ci-dessus.

259. Le poids d'argent fin contenu dans le crown est $30^{gr},074 \times 0,925$, ou $27^{gr},818450$. Le poids d'argent fin contenu dans un franc est $5^{gr} \times 0,900$, ou $4^{gr},5$. Le quotient du premier poids par le second exprimera la valeur au pair du crown ancien; on trouve $6^{f},18187...$, ou, à peu près, $6^{f},18$.

260. I. Le poids d'argent fin contenu dans le crown nouveau est $28^{gr},241 \times 0,925$, ou $26^{gr},132175$. En divisant ce poids par $4^{gr},5$, on obtient pour la valeur du crown $5^{f},80715...$, ou environ $5^{f},81$.

II. On aurait pu résoudre ce problème d'une autre manière. Le crown ancien et le crown nouveau étant au même titre, leurs valeurs sont proportionnelles à leurs poids; en appelant x la valeur du crown nouveau, on devra donc avoir

$$\frac{x}{6^{f},18187...} = \frac{28^{gr},251}{30,074}\,; \quad \text{d'où} \quad x = 6^{f},18187 \,.\, \frac{28,251}{30,074}.$$

Le produit de $6^{f},18187...$ par 28,251, est $174^{f},64400937$; et le

quotient de ce nombre par 30,074 est $5^f,80714...$, ou $5^f,81$ comme ci-dessus.

(L'erreur d'une unité sur la cinquième décimale tient à ce que la valeur du crown ancien, employée dans ce calcul, n'est elle-même qu'approximative.)

261. Le produit de $6^{gr},015$ par 0,925 est $5^{gr},563875$; divisant par $4^{gr},5$, on obtient, pour la valeur du schilling ancien, $1^f,23641...$, ou environ $1^f,24$.

262. I. Le produit de $5^{gr},650$ par 0,925 est $5^{gr},22625$; divisant par $4^{gr},5$, on obtient, pour la valeur du schilling nouveau, $1^f,1613...$, ou environ $1^f,16$.

II. On aurait pu encore résoudre ce problème en remarquant que les deux schillings, ancien et nouveau, étant au même titre, ont des valeurs proportionnelles à leurs poids; en sorte qu'en appelant x la valeur du schilling nouveau, on doit avoir

$$\frac{x}{1^f,23641...}=\frac{5^{gr},650}{6^{gr},015}; \quad \text{d'où} \quad x=1^f,23641 \,.\, \frac{5,650}{6,015}.$$

Le produit de $1^f,23641...$ par 5,650 est $6^f,9857165$; et le quotient de ce nombre par 6,015 est $1^f,1613...$, ou $1^f,16$, comme ci-dessus.

263. Le kilogramme d'argent monnayé français vaut, sans retenue, 200 fr., puisque le franc pèse 5 grammes. Si l'on tient compte de la retenue, la valeur du kilogramme d'argent monnayé français n'est plus que de $200^f - 1^f,50$, ou $198^f,50$.

La valeur du kilogramme d'argent monnayé étant proportionnelle à son titre, on devra avoir, en nommant x la valeur cherchée,

$$\frac{x}{198^f,50}=\frac{0,923}{0,900}; \quad \text{d'où} \quad x=198^f,50 \,.\, \frac{0,923}{0,900}.$$

En effectuant le calcul, on trouve $203^f,5727...$, ou environ $203^f,57$.

264. Puisque 1 schilling vaut $1^f,16$,
100 schillings valent $116^f,00$.

Pour résoudre le problème, il ne reste qu'à diviser les deux nombres 100 et 116 par leur plus grand commun diviseur 4; et l'on trouve ainsi que

25 schillings nouveaux valent 29 fr.

265. En opérant comme au numéro précédent, on trouvera que

25 schillings anciens valent 31 fr.

266*. Désignons par x le nombre de crowns, et par y le nombre de schillings qu'il faudra employer; on devra avoir

$$5^f,81\,x + 1^f,16\,y = 500^f,$$

ou

$$581\,x + 116\,y = 50000,$$

équation pour laquelle il s'agit de trouver une solution en nombres entiers.

Les nombres 116 et 50000 ayant un diviseur commun 4, on le fera disparaître en posant $x = 4x'$; et il restera, après avoir divisé par 4,

$$581\,x' + 29\,y = 12500,$$

x' étant encore un nombre entier (*).

On tire de cette équation, en résolvant par rapport à l'inconnue y, qui a le plus petit coefficient, et en effectuant les divisions autant qu'il est possible,

$$y = 431 - 20\,x' + \frac{1-x}{29}.$$

Pour que le dernier terme soit entier, il faut qu'on ait

$$\frac{1-x'}{29} = t; \quad \text{d'où} \quad x' = 1 - 29\,t,$$

t étant un nombre entier. Il en résulte

$$y = 431 - 20\,(1 - 29\,t) + t, \quad \text{ou} \quad y = 411 + 581\,t.$$

Les nombres x et y devant être positifs, il faut que t reste compris entre $+\frac{1}{29}$ et $-\frac{411}{581}$. Entre ces limites, il n'y a qu'une valeur entière pour t, c'est zéro; il en résulte

$$x' = 1 \quad \text{et} \quad y = 411,$$

et, par conséquent,

$$x = 4 \quad \text{et} \quad y = 411.$$

En effet	4 crowns valent 4 fois $5^f,81$, ou.....	$23^f,24$
	411 schillings valent 411 fois $1^f,16$, ou.....	476 ,76
	Total...	$500^f,00$

(*) Voy. notre *Algèbre élémentaire*, pages 287 et suivantes.

267*. En appelant x le nombre de crowns, et y le nombre de schillings, on devra avoir

$$6^f,18\,x + 1^f,24\,y = 1000^f,$$

ou
$$618\,x + 124\,y = 100000,$$

ou encore
$$309\,x + 62\,y = 50000.$$

Les nombres 62 et 50000 ayant le facteur commun 2, on posera $x = 2x'$, et en divisant tout par 2, il restera

$$309\,x' + 31\,y = 25000,$$

x' étant un nombre entier.

Résolvant par rapport à l'inconnue y, qui a le plus petit coefficient, et effectuant les divisions autant que possible, on obtient

$$y = 806 - 9x' + \frac{14 - 30x'}{31} = 806 - 9x' + 2\,.\,\frac{7 - 15x'}{31}.$$

Pour que le dernier terme soit entier, il faut qu'on ait

$$\frac{7 - 15x'}{31} = z; \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{7 - 31z}{15},$$

ou
$$x' = -2z + \frac{7 - z}{15},$$

z étant un nombre entier.

Le dernier terme de cette dernière équation sera entier, si l'on a

$$\frac{7 - z}{15} = t; \quad \text{d'où} \quad z = 7 - 15t,$$

étant un nombre entier.

Par suite, on aura

$$x' = -2(7 - 15t) + t = 14 + 31t,$$

et
$$y = 806 - 9x' + 2z = 806 - 9(31t - 14) + 2(7 - 15t).$$

ou
$$y = 946 - 309t.$$

Pour que x' et y soient positifs, il faut que t soit compris entre $+\frac{14}{31}$ et $+\frac{946}{309}$, c'est-à-dire entre $\frac{14}{31}$ et $3\frac{19}{309}$.

Entre ces limites, il y a trois valeurs entières que t peut prendre; ce sont les valeurs 1, 2 et 3.

Pour $t = 1$, on a $x' = 17$ et $y = 637$,
ou $x = 34$ et $y = 637$.

Pour $t=2$, on a $x'=48$ et $y=328$,
ou $x=96$ et $y=328$.

Pour $t=3$, on a $x'=79$ et $y=19$,
ou $x=158$ et $y=19$.

En effet 34 crowns valent 34 fois $6^f,18$, ou....		$209^f,12$
637 schillings valent 637 fois $1^f,24$, ou....		$789^f,88$
	Total...	$1000^f,00$
De même : 96 crowns valent.... 96 fois $6^f,18$ ou...		$593^f,28$
328 schillings valent 328 fois $1^f,24$ ou...		$406^f,72$
	Total...	$1000^f,00$
De même enfin : 158 crowns valent 158 fois $6^f,18$ ou...		$976^f,44$
19 schill. valent.. 19 fois $1^f,24$ ou...		$23^f,56$
	Total...	$1000^f,00$

268. On a vu au n° 253 que le souverain vaut au pair $25^f,21$. On aura donc le nombre de livres sterling cherché en divisant $8949^f,55$ par $25^f,21$, ce qui donne exactement 355. La somme proposée vaut donc 355 livres sterling.

269. Autriche. D'après ce qui a été dit au n° 253, la valeur au pair d'une monnaie d'or étrangère s'obtient en multipliant son poids par son titre, et divisant le produit par le nombre, $0^{gr},290322$ qui exprime le poids d'or fin qui entre, pour chaque franc, dans les monnaies d'or françaises. Réciproquement, si l'on donne le poids et la valeur d'une monnaie d'or étrangère, on obtiendra son titre en multipliant sa valeur par $0^{gr},290322$ et divisant par son poids. En opérant ainsi pour le ducat ancien, on trouve

$$\frac{11,85 \times 0,290322}{3,490} \text{ ou } 0,9857..., \text{ ou environ } 0,986.$$

On pourrait opérer de même pour le ducat impérial; mais comme ces deux espèces de ducats ont le même poids légal, leur valeur est proportionnelle à leur titre; en sorte qu'en nommant x le titre du ducat impérial, on doit avoir

$$x : 0,9857... = 11^f,81 : 11,85,$$

d'où $x = 0,9857 \cdot \frac{11,81}{11,85} = 0,9823...$, ou environ 0,982.

La moyenne entre 0,9857... et 0,9823... est 0,9840....

270. La valeur du kilogramme d'or monnayé français, au change des monnaies, étant $3093^f,30$, celle du kilogramme de ducats d'Autriche sera

$$\frac{3093^f,30 \times 0,984}{0,900} \text{ ou } 3382 \text{ fr.}$$

La valeur de $1^k,745$ de la même monnaie sera donc

$$3382^f \times 1,745 \text{ ou } 5901^f,59.$$

271. On a vu au n° **259** que pour obtenir la valeur au pair d'une monnaie d'argent étrangère, il faut multiplier son poids par son titre, et diviser le produit par $4^{gr},5$. Réciproquement si l'on donne le poids et la valeur d'une monnaie d'argent, on obtiendra son titre légal en multipliant sa valeur par $4^{gr},5$ et en divisant par le poids donné. En opérant ainsi pour la monnaie dont il s'agit ici, on trouvera

$$\frac{5,20 \times 4,5}{28,074}, \text{ c'est-à-dire } 0,83351...,$$

ou environ 0,833.

272. Puisque 1 risdale vaut.... $5^f,20$,
10 — vaudront 52^f,
et 5 — — 26^f.

Les nombres 5 et 26 étant premiers entre eux, 5 est le plus petit nombre de risdales équivalant à un nombre exact de francs.

273. Le kilogramme d'argent monnayé français valant, avec la retenue au change des monnaies, $198^f,50$, on obtiendra le titre demandé en observant que les valeurs sont ici proportionnelles aux titres. On aura donc, en appelant x le titre cherché,

$$x : 0,900 = 184^f,60 : 198^f,50,$$

d'où

$$x = 0,900 . \frac{184.60}{198,50} = 0,83697...,$$

c'est-à-dire 0,837, attendu que les titres, au tarif, ne sont donnés qu'au demi-millième près.

274. Royaume Lombardo-Vénitien. Le titre légal de cette monnaie étant 1000 millièmes, ou 1, il suffira pour obtenir la valeur

de chaque pièce, de diviser son poids par le nombre $0^{gr},290322$. On trouvera ainsi que :

L'écu d'or vaut	$144^f,3498...$	ou	$144^f,35$.
L'oselle —	$48,1154...$	—	$48,11$.
Le sequin —	$11,8902...$	—	$11,89$.
Le ducat —	$7,5020...$	—	$7,50$.

275. Pour résoudre cette question, on observera d'abord que puisque la valeur de chacune des pièces dont il s'agit est le quotient de son poids par le nombre $0^{gr},290322$, réciproquement le poids de cette monnaie, qui représente une valeur de 30000 fr., s'obtiendra en multipliant $0^{gr},290322$ par 30000, ce qui donne $8709^{gr},66$ ou environ $8^k,7097$.

On aura donc la valeur du kilogramme de cette monnaie d'or, au change des monnaies, en divisant $29815^f,50$ par 8,7097, ce qui donne $3423^f,25$.

Or, la valeur du kilogramme d'or monnayé français, avec retenue au change des monnaies, est $3093^f,30$; la valeur du kilogramme d'une monnaie d'or, au change des monnaies, étant proportionnelle à son titre, on aura, en appelant x le titre demandé,

$$3093^f,30 : 3423^f,25 = 0,900 : x,$$

d'où

$$x = \frac{3423^f,25 \times 0,900}{3093^f,30} = 0,996$$

à moins d'un millionième.

276. Lorsque plusieurs monnaies d'or sont au même titre, leurs poids sont proportionnels à leurs valeurs; en appelant x le poids du souverain, on aura donc

$$x : 12^{gr},903 = 35,13 : 40,$$

d'où

$$x = 12^{gr},903 . \frac{35,13}{40} = 11^{gr},332.$$

L'excès de poids de la pièce de 40 fr. sur le souverain est donc

$$12^{gr},903 - 11^{gr},332 \quad \text{ou} \quad 1^{gr},571.$$

L'excès de poids de la pièce de 20 fr. sur le demi-souverain est évidemment la moitié de $1^{gr},571$, c'est-à-dire $0^{gr},785$.

277. Puisque le kilogramme d'or monnayé français vaut, avec

retenue au change des monnaies, $3093^f,30$, on aura, en désignant par x le titre, au tarif, de la pistole

$$x : 0,900 = 3113^f,92 : 3093^f,30,$$

d'où
$$x = 0,900 \cdot \frac{3113,92}{3093,30} = 0,906.$$

Le titre légal de la pistole est donc $0,906 + 0,002$, c'est-à-dire $0,908$.

Puisque 125 de ces pièces font un poids de 790 grammes, le poids légal de la pistole est le quotient de 790 grammes par 125, c'est-à-dire $6^{gr},320$.

Cela posé, on obtiendra la valeur demandée en multipliant le poids $6^{gr},320$ par le titre $0,908$, et divisant le produit par le nombre $0^{gr},290322$, ce qui donne $19^f,7661$... ou environ $19^f,77$.

278. Puisque ces monnaies sont au même titre que les monnaies françaises, il suffira, pour obtenir leur valeur, de diviser leur poids par le poids d'un franc, c'est-à-dire par 5 grammes. On trouve ainsi que

l'écu de 6 livres d'Autriche vaut	$5^f,1972$	ou	$5^f,20$;
la livre — —	$0,8662$	ou	$0,87$.

279*. Soit x le nombre de ducats et y le nombre d'écus qu'il faut employer, on aura (**274**, **278**)

$$7^f,50\, x + 5^f,20\, y = 1000$$

ou
$$75\, x + 52\, y = 10000.$$

Posons $x = 4\, x'$ et $y = 25\, y'$; il viendra, après avoir divisé par 100,

$$3\, x' + 13\, y' = 100,$$

équation dans laquelle x' et y' représentent des nombres entiers.

On tire de là

$$x' = \frac{100 - 13\, y'}{3} = 33 - 4\, y' + \frac{1 - y'}{3}.$$

Posons $\frac{1 - y'}{3} = t$, d'où $y' = 1 - 3\, t$,

il viendra

$$x' = 33 - 4\,(1 - 3\, t) + t = 29 + 13\, t,$$

valeurs dans lesquelles t désigne un nombre entier. Ces valeurs

devant être positives, t doit être compris entre $+\frac{1}{3}$ et $-\frac{29}{13}$; il ne peut donc prendre que les trois valeurs 0, — 1 et — 2.

Pour $t = 0$, on a $x' = 29$ et $y' = 1$,
d'où $x = 116$ et $y = 25$.

Pour $t = -1$, on a $x' = 16$ et $y' = 4$,
d'où $x = 64$ et $y = 100$.

Pour $t = -2$, on a $x' = 3$ et $y' = 7$,
d'où $x = 12$ et $y = 175$.

Il est facile de vérifier que ces trois systèmes de valeurs remplissent la condition énoncée.

280. Bavière. On a vu (**269**) que le ducat d'Autriche ancien vaut $11^f,85$. Les 352 ducats vaudraient donc 352 fois $11^f,85$, c'est-à-dire $4171^f,20$.

Le poids d'un ducat étant $3^{gr},490$, le poids des 352 ducats serait 352 fois $3^{gr},49$, c'est-à-dire $1228^{gr},48$ ou $1^k,22848$.

Le titre des ducats au tarif étant 0,980, la valeur du kilogramme de ducats au change des monnaies aura pour expression

$$3093^f,30 \cdot \frac{0,980}{0,900}, \text{ c'est-à-dire } 3368^f,26.$$

Les 352 ducats seraient donc admis au change pour

$$3368^f,26 \times 1,22848, \text{ c'est-à-dire } 4137^f,84.$$

281. Le titre légal du carolin s'obtiendra (**269**) en multipliant sa valeur par $0^{gr},290322$ et divisant par son poids; ce qui donne

$$\frac{25,88 \times 0,290322}{9,744}, \text{ c'est-à-dire } 0,77109\ldots$$

ou 0,771.

Le titre du carolin au change des monnaies s'obtiendra en multipliant 0,900 par la valeur du kilogramme et en divisant par $3093^f,3$; on obtient ainsi

$$\frac{2636,17 \times 0,900}{3093,3}, \text{ c'est-à-dire } 0,76699\ldots$$

ou 0,767.

282. Son poids est les $\frac{2}{3}$ du poids du carolin, ou les $\frac{2}{3}$ de $9^{gr},744$, c'est-à-dire $6^{gr},496$.

Sa valeur est les $\frac{2}{3}$ de la valeur du carolin, ou les $\frac{2}{3}$ de $25^f,88$, c'est-à-dire $17^f,25$.

283. 1° Le poids d'un ducat étant $3^{gr},490$, le poids des 541 ducats est $3^{gr},490 \times 541$ ou $1888^{gr},090$, et en multipliant ce poids par le titre 0,980, on aura le poids de l'or pur contenu ; on trouve ainsi $1850^{gr},3282$.

De même : le poids d'un carolin étant $9^{gr},744$, le poids des 238 carolins est $9^{gr},744 \times 238$ ou $2319^{gr},072$; en multipliant ce nombre par le titre 0,767, on aura le poids d'or pur contenu ; on trouve $1778^{gr},7282$....

Le poids total de l'or pur contenu dans l'alliage sera donc $1850^{gr},3282 + 1778^{gr},7282$, c'est-à-dire $3629^{gr},0564$.

Or le poids de l'alliage est $1888^{gr},090 + 2319^{gr},072$, c'est-à-dire $4207^{gr},162$. Pour obtenir le titre demandé, il suffit de diviser $3629^{gr},0564$ par $4207^{gr},162$, ce qui donne 0,86259... ou, à un demi-millième près, 0,863.

2° Le poids des ducats étant $1888^{gr},090$ ou $1^{k},888$..., et, le kilogramme de cette monnaie valant au change $3368^{f},26$ (**280**), la valeur des 541 ducats, au change des monnaies, sera

$$3368^{f},26 \times 1,888, \text{ c'est-à-dire } 6359^{f},27....$$

De même : le poids des carolins étant $2319^{gr},072$ ou $2^{k},319$... et le kilogramme de cette monnaie valant au change $2636^{f},17$ (**281**), la valeur des 238 carolins, au change des monnaies, sera

$$2636^{f},17 \times 2,319, \text{ c'est-à-dire } 6113^{f},28.$$

La valeur totale de l'alliage, au change des monnaies, sera donc

$$6359^{f},27 + 6113^{f},28, \text{ c'est-à-dire } 12472^{f},55.$$

284. I. On peut d'abord résoudre le problème de la manière suivante :

Supposons que l'on prenne 100 carolins, lesquels représenteront un poids de 100 fois $9^{gr},744$, c'est-à-dire $974^{gr},4$.

On remarquera que le titre du carolin, au tarif, ou 0,767, étant inférieur de 0,133 au titre des monnaies françaises, il manquerait, pour chaque gramme de monnaie employé, $0^{gr},133$ d'or ; et, par conséquent, pour $974^{gr},4$ de monnaie employés, il manquerait un poids d'or marqué par $0^{gr},133 \times 974,4$, c'est-à-dire $129^{gr},5952$.

D'un autre côté, le titre du ducat, au tarif, ou 0,980, étant supérieur de 0,080 au titre des monnaies françaises, pour chaque gramme de cette seconde monnaie qu'on emploiera, il y aura en trop $0^{gr},080$ d'or pur. Pour que l'or qui manque dans les carolins soit compensé par celui qui se trouve en trop dans les

ducats, il faut donc prendre un nombre de ducats tel que $0^{gr},080$, répété autant de fois qu'il y aura de grammes dans le poids de ces ducats, donne un produit précisément égal à $129^{gr},5952$. On obtiendra donc le poids des ducats à employer, en divisant $129^{gr},5952$ par $0^{gr},080$, ce qui donne $1619^{gr},94$.

Mais chaque ducat pèse $3^{gr},490$; le nombre de ducats cherché sera donc le quotient de $1619^{gr},94$ par $3^{gr},490$; en faisant la division, on obtient le nombre fractionnaire 464,16....

Si l'on néglige la partie décimale, il reste 464 pour le nombre des ducats qu'il faut allier à 100 carolins.

II. On résout plus commodément ce problème par l'algèbre. Soit x le nombre des ducats, et y le nombre des carolins. En écrivant que le rapport entre le poids de l'or pur contenu dans l'alliage au poids total de cet alliage est égal au titre des monnaies françaises, on a immédiatement l'équation

$$\frac{3^{gr},490 \times x \times 0,980 + 9^{gr},744 \times y \times 0,767}{3^{gr},490.x + 9^{gr},744.y} = 0,900;$$

d'où l'on tire

$$3^{gr},490\,(0,980 - 0,900)\,x = 9^{gr},744\,(0,900 - 0,767)\,y,$$

ou $$\frac{x}{y} = \frac{9^{gr},744\,(0,900 - 0,767)}{3^{gr},490\,(0,980 - 0,900)} = \frac{9^{gr},744.0.133}{3^{gr},490.0,080},$$

ou encore $$\frac{x}{y} = \frac{1,295952}{0,279200} = 4,6416....$$

En ne conservant que deux décimales, on trouve donc, pour le rapport cherché, 4,64, ou $\frac{464}{100}$; c'est-à-dire que si l'on prend 100 carolins, il faudra prendre 464 ducats.

285. En opérant comme au n° **282**, on trouve

$$0,89998...,$$

valeur qui ne diffère que de moins de 0,00002 du titre des monnaies françaises.

286. En opérant encore comme au n° **282**, on trouve

$$0,90026...,$$

valeur qui ne surpasse le titre des monnaies françaises que de moins de 0,0003.

287. Son titre est donc 0,833, et son poids $28^{gr},074 - 0^{gr},010$, c'est-à-dire $28^{gr},064$. Ainsi sa valeur a pour expression

$$\frac{28,064 \times 0,833}{4,5} = 5,1949..., \quad \text{ou} \quad 5^{f},19.$$

288. La valeur du kilogramme est donc $184^{f},60 - 1^{f},54$, c'est-à-dire $183^{f},06$. Le titre, au tarif, est en conséquence

$$0,900 . \frac{183,06}{198,50} = 0,829994..., \quad \text{ou} \quad 0,830.$$

289. La valeur du florin, comparée à celle du franc, est proportionnelle à son poids, puisque le titre est le même. Ainsi, en représentant par x cette valeur, on aura

$$x : 1^{f} = 10^{gr},606 : 5^{gr}; \quad \text{d'où} \quad x = 2^{f},1212.$$

La valeur de 1500 florins de Bavière est donc

$$2^{f},1212 \times 1500, \text{ c'est-à-dire } 3181^{f},80.$$

290. La valeur d'une pièce sera le quotient de $365^{f},77$ par 425, c'est-à-dire $0^{f},8606...$, ou, à peu près, $0^{f},86$. Le titre légal du kopfstuck a donc pour expression

$$\frac{0,86 \times 4^{gr},5}{6^{gr},643} = 0,582568..., \quad \text{ou} \quad 0,583,$$

à un demi-millième près.

291. On pourra employer ici les deux solutions données au n° **284**.

I. Si l'on prend 100 kopfstucks, dont le poids est $664^{gr},3$, et dont le titre, 0,583, est inférieur de 0,250 au titre demandé, 0,833, il manquera $0^{gr},250$ d'argent pour chaque gramme de monnaie employé; le déficit total sera donc $0^{gr},250 \times 664,3$, ou $166^{gr},075$.

D'un autre côté, le titre du florin, 0,900, étant supérieur de 0,067 au titre demandé, il y aura en trop $0^{gr},067$ d'argent pour chaque gramme de la seconde monnaie employée. En divisant donc $166^{gr},075$ par 0,067, on aura le poids de florins qu'il faut employer pour que le déficit provenant des kopfstuck soit compensé par l'excès provenant des florins. On trouve $2478^{gr},731$. Et, puisque le florin pèse $10^{gr},606$, en divisant $2478^{gr},731$ par ce nombre, on aura le nombre de florins qu'il faut allier aux

100 kopfstucks. On trouve 233,691. On pourra prendre approximativement 234 florins. Le rapport demandé serait donc à peu près celui de 100 à 234, ou de 50 à 117.

II. En appelant x le nombre de florins, et y le nombre de kopfstucks, on doit avoir

$$\frac{10^{gr},606 . 0,900 . x + 6^{gr},643 . 0,583 . y}{10^{gr},606 . x + 6^{gr},643 . y} = 0,833;$$

d'où l'on tire

$$\frac{x}{y} = \frac{6^{gr},643\,(0,833 - 0,583)}{10^{gr},606\,(0,900 - 0,833)} = \frac{6^{gr},643 . 0,250}{10^{gr},606 . 0,067},$$

ou
$$\frac{x}{y} = \frac{1,660750}{0,710602} = 2,337102,$$

ou, à moins d'un demi-millième, 2,337.

Si l'on se contente de la valeur approchée à moins d'un demi-centième, on peut prendre 2,34; et l'on voit, comme ci-dessus, que pour 100 kopfstucks il faut prendre 234 florins, ou, ce qui revient au même, 117 florins pour 50 kopfstucks.

Si l'on adopte, en effet, ces nombres, on trouve pour le titre de l'alliage

$$\frac{10^{gr},606 . 0,900 . 117 + 6^{gr},643 . 0,583 . 50}{10^{gr},606 . 117 + 6^{gr},643 . 50},$$

ou
$$\frac{1310,4552}{1573,052}, \quad \text{ou enfin} \quad 0,83306...,$$

valeur qui ne surpasse le titre des risdales que de moins d'un dix-millième, et qui est, par conséquent, exacte à un millième près, à plus forte raison.

292. Pour obtenir cette valeur, il suffit de diviser $37^{gr},120$ par le poids du franc, ou par 5 grammes, ce qui donne $7^{f},4240$, ou $7^{f},42$.

293*. Soit x le nombre de risdales, et y le nombre de florins, on devra avoir

$$3,24x + 2,16y = 27,$$

ou
$$324x + 216y = 2700,$$

ou encore
$$3x + 2y = 25,$$

équation qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers.

On en tire $y = 12 - x + \frac{1-x}{2}$.

Si l'on pose $\frac{1-x}{2} = t$, d'où $x = 1 - 2t$,

on aura $y = 12 - (1-2t) + t$, ou $y = 11 + 3t$,

valeurs où t représente un nombre entier.

Pour que ces valeurs soient positives, il faut qu'on ait à la fois

$$t < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad t > -\frac{11}{3}.$$

Entre ces limites, t peut prendre les quatre valeurs entières $-3, -2, -1$ et 0.

Pour $t = -3$, on trouve $x = 7$ et $y = 2$,
Pour $t = -2$, on trouve $x = 5$ et $y = 5$,
Pour $t = -1$, on trouve $x = 3$ et $y = 8$,
Pour $t = 0$, on trouve $x = 1$ et $y = 11$,

systèmes qu'il est facile de vérifier.

294. Belgique. Le poids d'or fin contenu dans chacune de ces deux espèces de monnaie est :

Pour le double souverain. $11^{gr},141 \times 0,919$, ou $10^{gr},238579$,
Pour le lion d'or..... $8\ ,286 \times 0,917$, ou $7\ ,598262$.

En divisant ces nombres par le poids d'or fin qui représente la valeur d'un franc, c'est-à-dire par $0^{gr},290322$, on obtiendra la valeur de ces espèces.

On trouve ainsi :

Pour le double souverain..... $35^{f},2662...$, ou $35^{f},27$,
Pour le lion d'or..... $26\ ,1718...$, ou $26\ ,17$.

Pour obtenir la valeur du kilogramme de cette monnaie, on opérera comme au n° 255 ; et, en appelant x la valeur cherchée, on aura

$$\frac{x}{3093^{f},30} = \frac{0,917}{0,900}; \quad \text{d'où} \quad x = 3144^{f},855,$$

ou simplement $3144^{f},86$.

295. I. Les 150 doubles souverains pèsent 150 fois $11^{gr},141$, c'est-à-dire..... $1671^{gr},150$
Les 95 lions d'or pèsent 95 fois $8^{gr},286$, ou..... $787\ ,170$

Poids total... $2458^{gr},320$

Le poids d'or pur contenu dans les doubles souverains est $1671^{gr},15 \times 0,918$, ou, à un demi-milligramme près, $1534^{gr},116$

Le poids d'or pur contenu dans les lions d'or est $787^{gr},17 \times 0,916$, ou, à un demi-milligramme près, $721\ ,048$

Poids de l'or pur... $2255^{gr},164$

La différence entre le poids de l'or pur et le poids total, c'est-à-dire $2458^{gr},320 - 2255^{gr},164$, ou $203^{gr},156$, exprime le poids du cuivre contenu dans les monnaies d'or employées.

Mais le titre des monnaies d'or françaises étant 0,900, le poids du cuivre qui y entre doit être le dixième du poids total, ou le neuvième du poids de l'or. En prenant donc le neuvième de $2255^{gr},164$, on aura le poids total de cuivre qui doit entrer dans l'alliage; on trouve, à un demi-milligramme près, $250^{gr},574$.

Puisque les monnaies employées n'en contiennent que $203^{gr},156$, il faudra en ajouter $250^{gr},574 - 203^{gr},156$, ou $47^{gr},418$, à un demi-milligramme près, par excès.

II. Le poids de l'or pur contenu dans les monnaies employées est exprimé par

$$1671^{gr},15 \times 0,918 + 787^{gr},17 \times 0,916,$$

et, en appelant x le poids de cuivre cherché, le poids total de l'alliage sera exprimé par

$$1671^{gr},15 + 787^{gr},17 + x.$$

Le rapport ou le quotient de ces deux poids exprimera le titre de l'alliage, lequel doit être égal à 0,900; on aura donc l'équation

$$\frac{1671^{gr},15 \times 0,918 + 787^{gr},17 \times 0,916}{1671^{gr},15 + 787^{gr},17 + x} = 0,900.$$

On en tire

$$1671^{gr},15\,(0,918 - 0,900) + 787^{gr},17\,(0,916 - 0,900) = 0,900x;$$

d'où

$$x = \frac{1671^{gr},15 \times 0,018 - 787^{gr},17 \times 0,016}{0,900}.$$

En faisant les calculs, on trouve

$$x = \frac{42^{gr},676}{0,9} = 47^{gr},417,$$

à un demi-milligramme près, par défaut.

296. Le titre étant le même, les valeurs sont proportionnelle. aux poids; en appelant x la valeur du lion d'argent, on aura donc

$$\frac{x}{5^{f},73} = \frac{32^{gr},929}{29^{gr},532}; \quad \text{d'où} \quad x = 5^{f},73 \cdot \frac{32929}{29532},$$

ou $x = 6^{f},389\ldots$, c'est-à-dire à peu près $6^{f},39$.

297. Il faut d'abord obtenir le titre légal de la couronne; d'après ce qui a été dit au n° **271**, ce titre est exprimé par

$$\frac{5,73 \times 4,5}{29,532}, \quad \text{ce qui revient à} \quad 0,873.$$

Le titre de la couronne, au tarif, est donc 0,876. D'après ce qui a été dit au n° **265**, la valeur du kilogramme de cette monnaie est donc exprimée par

$$198^{f},50 \cdot \frac{0,876}{0,900}, \quad \text{ce qui revient à} \quad 193^{f},206\ldots,$$

ou environ $193^{f},21$.

298*. En appelant x le nombre de couronnes de Brabant, et y le nombre de lions d'argent, on devra avoir

$$[1] \qquad 5^{f},73x + 6^{f},39y = 357^{f},$$

ou

$$573x + 639y = 35700,$$

ou encore

$$[2] \qquad 191x + 213y = 11900,$$

équation qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers. On en tire d'abord

$$x = 62 - y + \frac{2(29 - 11y)}{191}.$$

On pose

$$\frac{29 - 11y}{191} = z; \quad \text{d'où} \quad y = 2 - 17z + \frac{7 - 4z}{11},$$

puis

$$\frac{7 - 4z}{11} = u; \quad \text{d'où} \quad z = 1 - 2u + \frac{3(1 - u)}{4},$$

puis enfin

$$\frac{1 - u}{4} = t; \quad \text{d'où} \quad u = 1 - 4t.$$

Par suite $z = -1 + 11t$,

puis $y = 20 - 191t$,

et enfin $x = 40 + 213t$.

La seule valeur entière de t qui donne pour x et y des valeurs positives, est $t = 0$; d'où $x = 40$ et $y = 20$.

En effet :

40 couronnes valent 40 fois 5f,73, ou.....	229f,20
20 lions d'argent valent 20 fois 6f,39, ou.....	127 ,80
Total...	357f,00

299. Les 213 couronnes valent 213 fois 5f,73, c'est-à-dire 1220f,49. En divisant cette somme par la valeur du lion d'argent, ou 6f,39, on aura le nombre de lions d'argent demandé. On trouve 191.

300. Les 7 doubles souverains valent 7 fois 35f,27 ou 246f,89

15 lions d'or.....	—	15 —	26 ,17 —	392 ,55
31 lions d'argent....	—	31 —	6 ,39 —	198 ,09
55 couronnes.....	—	55 —	5 ,73 —	315 ,15
72 florins.....	—	72 —	1 ,81 —	132 ,32
			Total.....	1283f,00

301. Elle vaut la somme des nombres 40f, 20f, 10f, 5f, 2f,50, 2f, 1f, 0f,50 et 0f,25, diminuée de 0f,18, c'est-à-dire 81f,25 moins 0f,18, ou 81f,07.

302. La valeur du frédéric est exprimée par (voir le n° **294**)

$$\frac{6,600 \times 0,896}{0,290322}, \text{ ce qui donne } 20^f,369\ldots \text{ ou } 20^f,37.$$

La valeur du ducat est exprimée de même par

$$\frac{3,143 \times 0,875}{0,290322}, \text{ ce qui donne } 9^f,47.$$

303. Le titre demandé a pour expression (voir le n° **275**)

$$\frac{3076^f,11 \times 0,900}{3093^f,30}, \text{ ce qui donne } 0,894998\ldots \text{ ou } 0,895.$$

304. 1° Le poids d'argent pur qui vaut 1 franc étant 4gr,5, le poids d'argent pur qui vaut 5f,66, est exprimé par $4^{gr},5 \times 5,66$.

Le rapport de ce poids d'argent pur au poids total de la risdale $29^{gr},126$, est le titre légal de cette monnaie. Ce titre est donc

$$\frac{4^{gr},5 \times 5,66}{29^{gr},126} \quad \text{ou} \quad 0,8744....$$

Le titre de cette même monnaie au tarif sera donc $0,8744 + 0,0046$ ou 0,879. Dès lors la valeur du kilogramme de cette monnaie sera exprimée par (voir le n° 363)

$$198^{f},50 . \frac{0,879}{0,900} \quad \text{ou} \quad 193^{f},868...,$$

u à très-peu près $193^{f},87$.

La valeur de 3 kilogrammes de la même monnaie sera donc $193^{f},87 \times 3$, c'est-à-dire $581^{f},61$....

2° En divisant 3 kilog. ou 3000 grammes par $29^{gr},126$, on trouvera le nombre de risdales qui forment le poids donné; on obtient ainsi 103, et une petite fraction qui doit être négligée, puisque le nombre que l'on cherche est nécessairement entier. Or 103 risdales valent 103 fois $5^{f},66$, c'est-à-dire $582^{f},98$. On perdrait donc au change la différence entre cette somme et $581^{f},61$, c'est-à-dire $1^{f},37$.

305. 1° Le poids d'argent pur qui vaut $4^{f},96$, est $4^{gr},5 \times 4,96$ Le rapport de ce produit au poids de la risdale ou

$$\frac{4^{gr},5 \times 4,96}{26^{gr},8} \quad \text{ou} \quad 0,8328...$$

exprime donc le titre légal de la pièce. Son titre au tarif est par conséquent $0,8328 - 0,0058$ ou 0,827.

La valeur du kilogramme de cette monnaie est donc

$$198^{f},50 . \frac{0,827}{0,900} \quad \text{ou} \quad 182^{f},399... \text{ ou environ } 182^{f},40.$$

Un poids de $1^{k},34$ de cette monnaie vaudra au change

$$182^{f},40, \times 1,34 \quad \text{ou} \quad 244^{f},42.$$

2° En divisant $1^{k},340$ ou 1340 grammes par $26^{gr},8$, on trouve qu'il y est contenu exactement 50 fois; ce poids est donc celui de 50 risdales, dont la valeur est de 50 fois $4^{f},96$, c'est-à-dire 248 fr. On perdrait donc au change la différence entre cette somme et $244^{f},42$, c'est-à-dire $3^{f},58$.

306. Puisqu'on obtient la valeur d'une monnaie d'argent en multipliant son poids par son titre et en divisant le produit par

$4^{gr},5$; réciproquement, connaissant le titre et la valeur, on obtiendra le poids en multipliant $4^{gr},5$ par la valeur de la pièce et en divisant le produit par le titre. Le poids du marc danois est donc exprimé par

$$\frac{4^{gr},5 \times 0,75}{0,688}, \quad \text{ce qui revient à} \quad 4^{gr},9055....$$

Pour faire 300 francs, il faut un nombre de marcs exprimé par le quotient de 300 fr. par $0^{f},75$, c'est-à-dire 400. Le poids cherché est donc le produit de $4^{gr},9055$ par 400, c'est-à-dire $1962^{gr},20$ ou $1^{k},9622$.

307. Espagne. Puisque, pour obtenir la valeur du kilogramme d'une monnaie d'or, il faut multiplier $3093^{f},30$ par le titre de cette monnaie au tarif, et diviser le produit par 0,900; réciproquement, si l'on connaît la valeur du kilogramme, on obtiendra le titre au tarif en multipliant 0,900 par cette valeur et en divisant le produit par $3093^{f},30$. L'expression du titre de la quadruple au tarif est d'après cela

$$0,900 . \frac{2997^{f},06}{2093^{f},30}, \quad \text{ce qui revient à} \quad 0,871998...$$

ou, à très-peu près, à 0,872.

Le titre légal de la pièce est par conséquent

$$0,872 + 0,003 \quad \text{ou} \quad 0,875.$$

Cela posé, on a vu (256) que pour obtenir la valeur d'une monnaie d'or, il faut multiplier son poids par son titre, et diviser le produit par le nombre $0^{gr},290322$; connaissant le titre et la valeur de la pièce, on obtiendra donc son poids en multipliant $0^{gr},290322$ par la valeur donnée, et en divisant le produit par le titre. L'expression du poids de la quadruple est donc

$$\frac{0^{gr},290322 \times 81,51}{0,875}, \quad \text{ce qui donne} \quad 27^{gr},0447...$$

ou environ $27^{gr},045$.

308. La valeur d'un doblon est exprimée par

$$\frac{8^{gr},336 \times 0,900}{0^{gr},290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 25^{f},841....$$

La valeur de 276 doblons sera donc $25^{f},841... \times 276$, c'est-à-dire $7132^{f},116...$ ou $7132^{f},12$.

309. Ces monnaies étant au même titre que les monnaies françaises, leur valeur, comparée à celle du franc, est proportionnelle à leur poids. Ainsi, la valeur du *duro* est le nombre de francs qu'exprime le quotient de $26^{gr},290$ par 5 grammes, c'est-à-dire $5^{f},2580$ ou $5^{f},26$.

Le *medio-duro* est la moitié du duro ; son poids est donc la moitié de $26^{gr},290$, c'est-à-dire $13^{gr},145$; et sa valeur est la moitié de $5^{f},258$, c'est-à-dire $2^{f},629$ ou $2^{f},63$.

La *peseta* est le cinquième du duro ; son poids est donc le cinquième de $26^{gr},290$, c'est-à-dire $5^{gr},258$; et sa valeur est le cinquième de $5^{f},258$, c'est-à-dire $1^{f},0516$ ou $1^{f},05$.

La *medio-peseta* est la moitié de la peseta ; son poids est donc la moitié de $5^{gr},258$, c'est-à-dire $2^{f},629$; et sa valeur est la moitié de $1^{f},0516$, c'est-à-dire $0^{f},5258$ ou $0^{f},53$.

Enfin le *réal* est la moitié de la medio-peseta ; son poids est donc la moitié de $2^{gr},629$, c'est-à-dire $1^{gr},3145$; et sa valeur est la moitié de $0^{f},53$, c'est-à-dire $0^{f},265$, ou à peu près $0^{f},26$.

310. Confédération germanique. La valeur du ducat est exprimée par

$$\frac{3,490 \times 0,986}{0,290322}, \quad \text{ce qui donne} \quad 11^{f},852\ldots \text{ ou } 11^{f},85.$$

Le titre des ducats, au tarif, est 0,986 — 0,006, c'est-à-dire 0,980. La valeur du kilogramme de cette monnaie est donc exprimée par

$$3093^{f},30 . \frac{0,980}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3368^{f},26.$$

La valeur de $3^{k},141$ de cette monnaie sera par conséquent

$$3368^{f},26 \times 3,141, \text{ c'est-à-dire } 10579^{f},70466 \text{ ou } 10579^{f},70.$$

En divisant $3^{k},141$ ou 3141 grammes par $3^{gr},490$, on trouve pour quotient 900 ; le poids donné est donc celui de 900 ducats, valant 900 fois $11^{f},85$, c'est-à-dire 10665 fr. On perdrait donc la différence entre cette somme et $10579^{f},70$, c'est-à-dire $85^{f},30$.

311. La valeur du florin s'obtiendra en divisant $1325^{f},75$ par 625, ce qui donne $2^{f},1212$, ou $2^{f},12$.

Quant au poids du florin, puisque cette monnaie est au titre des monnaies françaises, son poids est à celui du franc, ou 5 grammes, comme sa valeur $2^{f},1212$ est au franc. Le poids demandé s'obtiendra donc en multipliant 5 grammes par 2,1212, ce qui donne $10^{gr},606$.

312. Royaume de Grèce. 1° Les monnaies d'or étant au même titre que les monnaies françaises, on aura, en désignant par x la valeur de la *tessaraconta-drachme*,

$$x : 20^f = 11^{gr},520 : 6^{gr},451;$$

d'où $$x = 20^f . \frac{11520}{6451}, \quad \text{ou} \quad x = 35^f,71.$$

L'*icosa-drachme*, ayant un poids moitié moindre, a aussi une valeur moitié moindre, c'est-à-dire $17^f,85$.

2° Les monnaies d'argent étant aussi au même titre que les monnaies françaises, on aura, en appelant x la valeur de la pièce de 5 *drachmes*,

$$x : 1^f = 22^{gr},385 : 5^{gr}; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{22^f,385}{5},$$

c'est-à-dire $$x = 4^f,4670..., \quad \text{ou} \quad x = 4^f,47.$$

La valeur du *phénix* ou de la *drachme* est 5 fois moindre, c'est-à-dire $0^f,894...$, ou environ $0^f,89$.

La valeur de la *demi-drachme* est moitié moindre, c'est-à-dire $0^f,447...$, ou environ $0^f,45$.

313. En opérant comme il a été dit aux n^os^ **269** et **271**, on trouvera :

1° Pour le titre de la *tessaraconta-drachme*,

$$\frac{35,64 \times 0,290322}{11,520}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,8981..., \text{ ou } 0,898;$$

2° Pour le titre de la pièce de 5 *drachmes*,

$$\frac{4,48 \times 4,50}{22,385}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,9006..., \text{ ou environ } 0,901.$$

314. Royaume de Hanovre. Le poids de chaque pièce est la soixantième partie de 798 grammes, c'est-à-dire $13^{gr},3$.

La valeur nominale de chaque pièce est la soixantième partie de 2457 fr., c'est-à-dire $40^f,95$.

Le titre légal de cette monnaie est donc exprimé (**269**) par

$$\frac{40,95 \times 0,290322}{13,3}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,89606...,$$

ou, à peu près, 0,896.

La valeur du kilogramme de cette monnaie s'obtiendra en di-

visant 2452 fr. par $0^k,798$, ce qui donne $3072^f,681...$, ou, à peu près, $3072^f,68$.

Le titre de cette monnaie, au tarif, sera donc exprimé (**275**) par

$$0,900 . \frac{3072^f,68}{3093^f,30}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,8940005..., \text{ ou } 0,894.$$

315. Puisque $4^{gr},5$ d'argent pur valent 1 fr., on obtiendra la valeur du florin dont il s'agit en divisant son poids, $13^{gr},066$ par 4,5 ; ce qui donne $2^f,903...$, ou $2^f,90$.

Quant au titre de cette monnaie, au tarif, il est exprimé (**275**) par

$$0,900 . \frac{219^f,67}{198^f,50}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,99598..., \text{ ou } 0,996 \text{ environ.}$$

316. Il faut d'abord déterminer le titre au tarif ; il a pour expression (**275**)

$$0,900 . \frac{193^f,87}{198^f,50}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,8790..., \text{ ou } 0,879.$$

Le titre légal de l'écu de Hanovre est donc 0,879 — 0,001, c'est-à-dire 0,878.

Puisque, pour obtenir la valeur d'une pièce d'argent, il faut multiplier son poids légal par son titre et diviser le produit par $4^{gr},5$; réciproquement, pour obtenir son poids légal, il faut multiplier $4^{gr}.50$ par la valeur de la pièce et diviser le produit par le titre légal, ce qui donne

$$\frac{4^{gr},50 \times 5,70}{0,878}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 29^{gr},214....$$

317. États d'Italie. Le poids de la pièce de 20 fr. étant $6^{gr},45161$, celui de la pièce de 40 fr. est $12^{gr},90322$, ou $12^{gr},903$. Deux pièces de 40 fr. pèseraient donc $25^{gr},806$. En ajoutant à ce nombre $2^{gr},77$, on obtient pour le poids de la pièce de 4 pistoles, $28^{gr},576$. Sa valeur est d'ailleurs $80^f + 6^f,12$, ou $86^f,12$. Son titre sera donc exprimé (**269**) par

$$\frac{86,12 \times 0,290322}{28,576}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,8749..., \text{ ou environ } 0,875.$$

318. Le titre, au tarif, de la *lira*, est exprimé (**275**) par

$$0,900 . \frac{199,38}{198,50}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,90398...,$$

ou, à très-peu près, 0,904. Le titre de cette monnaie gagne donc 0,004 au tarif.

319. Puisque le sequin de Toscane est supposé en or pur, il contient un poids d'or pur égal à son poids légal, c'est-à-dire $3^{gr},488$. En divisant ce poids par $0^{gr},290322$, poids de l'or pur contenu pour chaque franc dans les monnaies françaises, on aura la valeur du sequin en francs ; on trouve ainsi $12^{f},014...$ ou $12^{f},01$.

Puisque son titre perd 0,007 au tarif, il est réellement égal à l'unité moins 0,007, c'est-à-dire à 0,993. La valeur du kilogramme de cette monnaie est donc exprimée (**255**) par

$$3093^{f},30 . \frac{0,993}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3412^{f},941...$$

ou à très-peu près, $3412^{f},94$.

320. I. La moyenne des poids des deux pièces de monnaie étant $6^{gr},834$, la somme de ces pièces est le double de $6^{gr},834$ ou $13^{gr},668$. Mais le poids de la rosine surpasse de $0^{gr},284$ celui de la pistole; si donc de la somme des deux poids, ou $13^{gr},668$, on retranche l'excès du plus grand sur le plus petit, ou $0^{gr},284$, le reste $13^{gr},384$ représentera le double du plus petit; le poids de la pistole est donc la moitié de $13^{gr},384$, c'est-à-dire $6^{gr},692$; et par conséquent le poids de la rosine est $6^{gr},692 + 0^{gr},284$, c'est-à-dire $6^{gr},976$.

Si la pistole était en or pur, le titre de la rosine serait $1 - 0,0185$ ou 0,9815. La valeur de la pistole serait alors

$$\frac{6,692}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 23^{f},05026...;$$

la valeur de la rosine serait

$$\frac{6,976 \times 0,9815}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 23^{f},58396...;$$

et par conséquent la différence des valeurs des deux pièces serait $0^{f},53370$.

Si la pistole était au titre des monnaies françaises, le titre de la rosine serait $0,900 - 0,0185$ ou 0,8815. La valeur de la pistole serait alors

$$\frac{6,692 \times 0,900}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 20^{f},74523...;$$

la valeur de la rosine serait en même temps

$$\frac{6,976 \times 0,8815}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 21^{f},18100...;$$

et la différence des valeurs des deux pièces serait par conséquent $0^{f},43577....$

On voit que cette différence a diminué de $0^f,09793...$, lorsque la valeur admise pour le titre de la pistole a diminué de 0,100. Or, cette différence devant être réellement de $0^f,45$, il faut qu'elle diminue de $0^f,53370 - 0^f,45$, c'est-à-dire de $0^f,08370...$. Pour cela il est nécessaire que la valeur admise pour le titre de la pistole diminue proportionnellement; c'est-à-dire que si l'on désigne par x la quantité dont ce titre doit diminuer, il faut que l'on ait

$$x : 0,100 = 0^f,08370 : 0^f,09793$$

d'où l'on tire

$$x = 0,100 \cdot \frac{8370}{9793} = 0,08547...$$

ou à peu près 0,0855.

Le titre de la pistole est donc réellement $1 - 0,0855$, c'est-à-dire 0,9145; et le titre de la rosine est $0,9145 - 0,0185$, c'est-à-dire 0,8960.

On obtient dès lors pour la valeur de la pistole

$$\frac{6,692 \times 0,9145}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 21^f,079 \quad \text{ou} \quad 21^f,08,$$

et pour la valeur de la rosine

$$\frac{6,976 \times 0,896}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 21^f,529 \quad \text{ou} \quad 21^f,53.$$

Ces valeurs diffèrent, en effet, de $0^f,45$.

II*. On résout plus commodément ce problème par l'algèbre.

Soit x le poids de la pistole, y son titre, z sa valeur; x', y', z' les quantités analogues pour la rosine. On aura d'abord (255)

$$[1] \qquad \frac{xy}{0,290322} = z \quad \text{et} \quad \frac{x'y'}{0,290322} = z'. \qquad [2]$$

Les conditions du problème donnent ensuite :

$$[3] \qquad x' - x = 0^{gr},284, \quad z' - z = 0^f,45, \qquad [4]$$

$$[5] \qquad y - y' = 0,0185, \quad \text{enfin} \quad \tfrac{1}{2}(x' + x) = 6^{gr},834. \qquad [6]$$

L'équation [3] peut d'abord être mise sous la forme

$$[7] \qquad \tfrac{1}{2}(x' - x) = 0^{gr},142.$$

Les équations [3] et [7] donnent alors immédiatement, par addition et soustraction,

$$x' = 6^{gr},834 + 0^{gr},142 = 6^{gr},976,$$
$$x = 6^{gr},834 - 0^{gr},142 = 6^{gr},692.$$

Les équations [1] et [2] peuvent par conséquent s'écrire

$$z = \frac{6,692}{0,290322} \cdot y \quad \text{et} \quad z' = \frac{6,976}{0,290322} \cdot y',$$

et, en transportant ces valeurs dans l'équation [4] et chassant le dénominateur, on obtient

$$[8] \qquad 6,976\, y' - 6,692\, y = 0,45 \times 0,290322.$$

Les équations [5] et [8], qui ne contiennent que y et y', donnent alors

$$y = 0,9144... \quad \text{et} \quad y' = 0,8959...,$$

d'où, par suite,

$$z = 21,077... \quad \text{et} \quad z' = 21,527...,$$

ou, à très-peu près,

$$z = 21^{f},08 \qquad \text{et} \quad z' = 21^{f},53,$$

comme par la première méthode.

Remarque. Le nombre $0^{gr},290322$ n'étant qu'approché, il peut y avoir une légère différence dans les résultats, suivant que, dans la méthode dont on fait usage, ce nombre entre comme diviseur ou comme multiplicateur.

521. Les 93 pistoles valent 93 fois $21^{f},08$ ou..... $1960^{f},44$
les 145 rosines valent 145 fois $21^{f},53$ ou..... $3121,85$

Total..... $5082^{f},29$

c'est la valeur nominale demandée.

Les 93 pistoles font un poids de 93 fois $6^{gr},692$, c'est-à-dire $622^{gr},356$ ou $0^{k},622356$. Or, la valeur du kilogramme de cet or est exprimée (255) par

$$3093^{f},30 \cdot \frac{0,913}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3137^{f},981;$$

un poids de $0^{k},622356$ représente donc une valeur de

$$3137^{f},981 \times 0,622356, \quad \text{c'est-à-dire.....} \quad 1952^{f},94$$

Les 145 rosines font un poids de 145 fois $6^{gr},976$, c'est-à-dire $1011^{gr},52$ ou $1^{k},01152$. Or, la valeur du kilogramme de cet or est

$$3093^{f},30 \cdot \frac{0,892}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3065^{f},8026...;$$

A reporter... $1952^{f},94$

Report... $1952^f,94$

un poids de $1^k,01152$ de cet or représente donc une valeur de

$3065^f,8026 \times 1,01152$, c'est-à-dire..... $3101^f,12$

La valeur totale des deux espèces de monnaie, au change, serait donc..... $5054^f,06$

En divisant cette valeur par celle du kilogramme d'or monnayé français, c'est-à-dire par $3093^f,80$, on obtiendra le poids d'or français qui aurait, au change, la même valeur que les pièces toscanes; on trouve ainsi $1^k,63387$... ou environ $1^k,634$.

322. La valeur nominale du *talaro* est exprimée (**259**) par

$$\frac{27,507 \times 0,917}{4,5}, \text{ c'est-à-dire } 5^f,6053\ldots \text{ ou environ } 5^f,61.$$

Son titre au tarif est 0,910; la valeur du kilogramme est donc (**263**)

$$198^f,50 \times \frac{0,910}{0,900}, \text{ c'est-à-dire } 200^f,7055\ldots \text{ ou environ } 200^f,71.$$

La valeur nominale de la *dena* est exprimée de même par

$$\frac{39,443 \times 0,958}{4,5}, \text{ c'est-à-dire } 8^f,3969\ldots \text{ ou, à très-peu près, } 8^f,40.$$

Son titre au tarif est 0,957; la valeur du kilogramme est donc exprimée par

$$198^f,50 \times \frac{0,957}{0,900}, \text{ c'est-à-dire } 211^f,071\ldots \text{ ou } 211^f,07.$$

323. Pays-Bas. Le kilogramme de ducats de Hollande valant $3361^f,38$, le titre de cette monnaie, au tarif, est exprimé (**275**) par

$$0,900 \cdot \frac{3361,38}{3093,30}, \text{ c'est-à-dire } 0,97799\ldots \text{ ou } 0,978.$$

Puisque son titre perd 0,004 au tarif, le titre légal est $0,978 + 0,004$ ou 0,982.

La valeur du ducat de Guillaume étant $11^f,85$, le ducat de Hollande vaut $11^f,85 - 0^f,07$, c'est-à-dire $11^f,78$.

Dès lors puisque, pour obtenir la valeur d'une monnaie d'or, il faut multiplier son poids par son titre et diviser le produit par le nombre $0^{gr},290322$, réciproquement, pour obtenir son poids,

il faudra multiplier sa valeur par 0,290322 et diviser le produit par le titre, ce qui donne

$$\frac{11,78 \times 0,290322}{0,982}, \text{ c'est-à-dire } 3^{gr},4826.$$

324. La valeur nominale de la dette était de 475 fois $11^f,78$, c'est-à-dire de $5595^f,50$.

Le poids des 475 *ducats* est de 475 fois $3^{gr},482$, c'est-à-dire $1653^{gr},950$ ou $1^k,65395$. Leur valeur au change des monnaies est donc $3361^f,38 \times 1,65395$, c'est-à-dire $5559^f,554...$ ou $5559^f,55$.

Le débiteur perdrait donc la différence entre $5595^f,50$ et $5559^f,55$, c'est-à-dire $35^f,95$.

325. D'après l'énoncé, le *florin* pèse 10 grammes, et vaut $2^f,10$; son titre légal est donc exprimé (**271**) par

$$\frac{2,10 \times 4,5}{10}, \text{ c'est-à-dire } 0,945.$$

Puisque ce titre perd 0,001 au tarif, il se réduit à 0,944. La valeur du kilogramme de cette monnaie est donc exprimée (**263**) par

$$198^f,50 \,.\, \frac{0,944}{0,900}, \text{ c'est-à-dire } 208^f,204... \text{ ou } 208^f,20.$$

326. La valeur du kilogramme de florins était de $208^f,20$ moins $10^f,36$, c'est-à-dire $197^f,84$. Le titre de cette monnaie au tarif était donc exprimé (**273**) par

$$0,900 . \frac{197,84}{198,50}, \text{ c'est-à-dire } 0,8970..., \text{ ou } 0,897.$$

Le titre légal de la monnaie en question est donc 0,898; et son poids légal est exprimé (**306**) par

$$\frac{4,5 \times 2,14}{0,898}, \text{ c'est-à-dire } 10^{gr},7238..., \text{ ou environ } 10^{gr},724.$$

Remarque. L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* donne $10^{gr},766$; la différence tient à ce que la valeur du kilogramme de florins n'est donnée qu'à un centime près. On peut faire une remarque analogue pour plusieurs autres problèmes de ce paragraphe.

327. Portugal. On a vu, au n° **253**, que pour obtenir la valeur d'une pièce d'or, il faut multiplier son poids par son titre, et diviser le produit par $0^{gr},290322$; il est clair que l'on peut également diviser d'abord le titre par 0,290322, et multiplier le quo-

tient par le poids de la pièce. Cette méthode est surtout commode lorsque, comme dans le cas actuel, on a à chercher la valeur de plusieurs pièces ayant le même titre.

Le quotient de 0,917 par 0,290322 est 3,158561.... En multipliant ce nombre par le poids des différentes pièces, on obtiendra les valeurs suivantes :

Portugaise.....	$33^f,9608$,	ou	$33^f,96$
Dobra.....	90 ,4264,	ou	90 ,43
Cruzade d'or.....	3 ,3543,	ou	3 ,35
Couronne d'or.....	56 ,0107,	ou	56 ,01

La valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée (255) par

$$3093^f,30 . \frac{0,914}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3141^f,418..., \quad \text{ou} \quad 3141^f,42.$$

D'ailleurs, le poids des quatre pièces dont il s'agit est $53^{gr},176$, ou $0^k,058176$. En multipliant $3141^f,42$ par ce nombre, on obtiendra la valeur demandée; on trouve $182^f,7552...$, ou environ $182^f,76$.

328. Le titre de la *couronne* étant 0,917, la valeur de cette pièce est exprimée (259) par

$$\frac{29,608 \times 0,917}{4,5}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 6^f,033..., \quad \text{ou} \quad 6^f,03.$$

Par conséquent, 98 couronnes valent 98 fois $6^f,03$, ou $590^f,94$.

La valeur de la *cruzade* est le quotient de ce nombre par 201, c'est-à-dire $2^f,94$.

Le poids de la cruzade est donc exprimé (306) par

$$\frac{2,94 \times 4,5}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 14^{gr},700.$$

329. I. Si toutes les pièces étaient des cruzades d'argent, l'excès de la valeur des pièces d'argent sur celle des pièces d'or serait précisément égale à la valeur des pièces d'argent, c'est-à-dire à 35 fois $2^f,94$, ou $102^f,90$, somme qui surpasse 40 fr. de $62^f,90$. Or, pour chaque pièce d'argent qu'on remplacera par une pièce d'or, l'excès de la valeur de l'argent sur celle de l'or diminuera de la somme des valeurs d'une pièce d'argent et d'une pièce d'or, c'est-à-dire de $2^f,94 + 3^f,35$, ou $6^f,29$. Pour que cet excès diminue de $62^f,90$, il faut donc remplacer par des pièces d'or un nombre de pièces d'argent égal au nombre de fois que

$6^f,29$ est contenu dans $62^f,90$, c'est-à-dire 10. Le nombre des cruzades d'or est donc 10; et, par conséquent, celui des cruzades d'argent est $35 - 10$, ou 25.

Cela posé, les 10 cruzades d'or valent 10 fois $3^f,35$, ou $33^f,50$; les 25 cruzades d'argent valent 25 fois $2^f,94$, ou $73^f,50$. L'excès de la seconde valeur sur la première est bien 40 fr., comme l'exige l'énoncé.

La valeur totale des 35 pièces est la somme des nombres $33^f,50$ et $73^f,50$, c'est-à-dire 107 fr.

Les 10 cruzades d'or pèsent 10 fois $1^{gr},062$, c'est-à-dire $10^{gr}62$, ou $0^k,01062$. La valeur de ces pièces, au change des monnaies, est donc $3141^f,42 \times 0,01062$, c'est-à-dire $33^f,36188...$, ou $33^f,36$.

Les 25 cruzades d'argent pèsent 25 fois $14^{gr},700$, c'est-à-dire $335^{gr},500$, ou $0^k,3365$. Et, puisque cette monnaie est au titre des monnaies françaises, la valeur des 25 pièces, au change, est $198^f,50 \times 0,3365$, c'est-à-dire $66^f,795...$, ou $66^f,80$. La valeur totale des 35 pièces, au change des monnaies, est donc

$$33^f,36 + 66^f,80, \quad \text{ou} \quad 100^f,16.$$

On perdrait par conséquent au change $107^f - 100^f,16$, ou $6^f,84$.

II*. La première partie du problème peut être résolue plus commodément par l'algèbre. Si l'on appelle x le nombre des cruzades d'or, et y celui des cruzades d'argent, l'énoncé fournit immédiatement les deux équations

$$x + y = 35$$

et
$$2^f,94.y - 3^f,35.x = 40^f.$$

On tire de la première

$$y = 35 - x,$$

valeur qui, substituée dans la seconde, donne l'équation

$$2^f,94 \times 35 - 2^f,94.x - 3^f,35.x = 40^f,$$

ou
$$102^f,90 = 6^f,29.x + 40,$$

ou
$$6^f,29x = 62^f,90; \quad \text{d'où} \quad x = 10;$$

par suite
$$y = 35 - 10 = 25.$$

Le reste s'achèverait comme par la première méthode.

350. Prusse. D'après la règle indiquée au n° **255**, pour trouver la valeur du kilogramme d'une monnaie d'or, on voit que si le titre au tarif subit un accroissement, la valeur du kilogramme subit un accroissement proportionnel que l'on peut

calculer en multipliant $3093^f,30$ par l'accroissement du titre, et divisant le produit par 0,900. Réciproquement, si l'accroissement de la valeur du kilogramme est donné, en le multipliant par 0,900, et divisant le produit par $3093^f,30$, on obtiendra l'accroissement du titre. Si l'on fait ce calcul en prenant $20^f,622$ pour l'accroissement de la valeur du kilogramme, on trouve pour résultat 0,006. Ce nombre exprime la différence entre le titre légal du frédéric et son titre au tarif. Et, puisque la moyenne de ces deux titres est 0,900, le titre légal s'obtiendra en ajoutant à 0,900 la moitié de la différence 0,006, ce qui donne 0,903; et le titre, au tarif, s'obtiendra en retranchant de 0,900 la moitié de cette même différence, ce qui donne 0,897.

Cela posé, la valeur du frédéric est exprimée (**255**) par

$$\frac{6,682 \times 0,903}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 20^f,783..., \quad \text{ou} \quad 20^f,78;$$

et la valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée (**255**) par

$$3093^f,30 \cdot \frac{0,897}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3082^f,989..., \quad \text{ou} \quad 3082^f,99.$$

331. Puisque le *double thaler* est au titre des monnaies françaises, sa valeur, comparée à celle du franc, sera dans le rapport de $37^{gr},120$ à 5 grammes, c'est-à-dire qu'elle est le cinquième de $37^f,120$, c'est-à-dire $7^f,424...$, ou $7^f,42$.

La valeur du thaler est, par conséquent, la moitié de ce nombre, c'est-à-dire $3^f,712$, ou $3^f,71$. Et le titre légal du thaler est exprimé (**271**) par

$$\frac{3,712 \times 4^{gr},5}{22^{gr},273}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,74996..., \quad \text{ou} \quad 0,750.$$

332. ÉTATS ROMAINS. D'après ce qui a été dit au n° **255**, la valeur de la *pistole* est exprimée par

$$\frac{5,471 \times 0,917}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 17^f,2804..., \quad \text{ou} \quad 17^f,28;$$

la valeur du *sequin* est exprimée de même par

$$\frac{3,426 \times 1}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 11^f,8006..., \quad \text{ou} \quad 11^f,80;$$

et la valeur du *scudo* est exprimée par

$$\frac{1,734 \times 0,900}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 5^f,3754..., \quad \text{ou} \quad 5^f,38.$$

Cette dernière valeur aurait pu se calculer d'une autre ma-

nière; car le scudo étant au même titre que les monnaies françaises, on doit avoir, en nommant x la valeur cherchée,

$$x : 20^f = 1{,}734 : 6^{gr}{,}45161,$$

d'où $$x = 20^f . \frac{1{,}734}{6{,}45161} = 5^f{,}3754...$$

ou $5^f{,}38$, comme par l'autre méthode.

Cela posé,

300 pistoles valent	300 fois	$17^f{,}28$	ou	5184 fr.
200 sequins —	200 —	11 ,80	ou	2360
100 scudi —	100 —	5 ,38	ou	538
		Total.....		8082 fr.

Le titre de la pistole au tarif étant 0,917 — 0,008 ou 0,909, la valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée (255) par

$$3093^f{,}30 . \frac{0{,}909}{0{,}900} = 3437^f \times 0{,}909 = 3124^f{,}233$$

ou simplement $3124^f{,}23$. Et comme 300 pistoles représentent un poids de 300 fois $5^{gr}{,}471$, c'est-à-dire $1641^{gr}{,}3$ ou $1^k{,}6413$, la valeur de ces pistoles au change serait $3124^f{,}23 \times 1{,}6413$, c'est-à-dire $5127^f{,}798...$ ou $5127^f{,}80$.

Le titre du sequin au tarif étant 1 — 0,006 ou 0,994, la valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée par

$$3437^f, \times 0{,}994 = 3416^f{,}378..., \text{ ou } 3416^f{,}38.$$

Et comme 200 sequins représentent un poids de 200 fois $3^{gr}{,}426$, c'est-à-dire $685^{gr}{,}2$ ou $0^k{,}6852$, la valeur de ces sequins au change serait $3416^f{,}38 \times 0{,}6852$, c'est-à-dire $2330^f{,}903...$ ou $2330^f{,}90$.

Le titre du scudo au tarif étant 0,899, la valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée par

$$3437^f \times 0{,}899 = 3089^f{,}863... \text{ ou } 3089^f{,}86.$$

Et comme 100 scudi font un poids de $173^{gr}{,}4$ ou $0^k{,}1734$, la valeur de ces scudi au change serait $3089^f{,}86 \times 0{,}1734$, c'est-à-dire $535^f{,}7817...$ ou $535^f{,}78$.

La valeur totale de ces monnaies au change serait donc

$$5127^f{,}80 + 2330^f{,}90 + 535^f{,}78 \text{ ou } 7994^f{,}48.$$

En retranchant cette somme de la valeur nominale des mêmes pièces, c'est-à-dire de 8082^f, on obtiendra la perte demandée; on trouve $87^f{,}52$.

333*. On résout commodément cette question par l'algèbre. Soit x le poids du teston, y sa valeur, x' et y' le poids et la valeur de l'écu de Pie IX. On aura d'abord, d'après ce qui a été dit au n° **259**,

$$[1] \qquad y = \frac{x.0{,}917}{4{,}5} \quad \text{et} \quad y' = \frac{x'.0{,}900}{4{,}5}. \qquad [2]$$

L'énoncé du problème donne en outre

$$[3] \qquad x' = x + 0^{gr}{,}396 \quad \text{et} \quad y' = y - 0^{f}{,}020673. \qquad [4]$$

On tire des équations [1] et [2]

$$0{,}917\,x - 0{,}900\,x' = 4{,}5\,(y - y').$$

Si dans cette dernière relation on remplace x' et y' par leurs valeurs [3] et [4], on trouve après réductions

$$0{,}017\,x - 0{,}900.0{,}396 = 45.0{,}020673$$

ou

$$0{,}017\,x = 4{,}5.0{,}020673 + 0{,}900.0{,}396 = 0{,}4494285,$$

d'où

$$x = 26^{gr}{,}437.$$

Par suite $\quad x' = 26^{gr}{,}437 + 0{,}396 = 26^{gr}{,}833.$

Les équations [1] et [2] donnent ensuite

$$y = \frac{26{,}437.0{,}917}{4{,}5} = 5{,}387273\ldots \text{ ou } 5^{f}{,}39$$

et

$$y' = \frac{26{,}833.0{,}900}{4{,}5} = 5{,}366600 \text{ ou } 5^{f}{,}37.$$

Valeurs qui diffèrent en effet de 2 centimes, ou plus exactement, de $0^{f}{,}020673$.

334. Russie. D'après ce qui a été dit au n° **310**, le ducat de la Confédération germanique pèse $3^{gr}{,}490$, vaut $11^{f}{,}85$; et la valeur du kilogramme de cette monnaie au change est $3368^{f}{,}26$. Par conséquent le *ducat à l'aigle* pèse $3{,}490 - 0^{gr}{,}017$ ou $3^{gr}{,}473$; il vaut $11^{f}{,}85 - 0^{f}{,}26$ ou $11^{f}{,}59$; et la valeur du kilogramme de cette monnaie au change est $3368^{f}{,}26 - 51^{f}{,}56$ ou $3316^{f}{,}70$.

D'après cela le titre légal de la pièce est exprimé (**269**) par

$$\frac{11{,}59 \times 0{,}290322}{3{,}473}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0{,}96885\ldots \quad \text{ou} \quad 0{,}969.$$

Le titre de la même monnaie au tarif est exprimé (**275**) par

$$0{,}900 . \frac{3316{,}70}{3093{,}30}, \text{ c'est-à-dire } 0{,}96499\ldots \text{ ou } 0{,}965.$$

Le titre perd donc 0,004 au tarif.

335. La pièce de 40 fr. pèse $12^{gr}{,}903$; l'*impériale* de 10 *roubles* pèse donc $12^{gr}{,}903 + 0^{gr}{,}169$ ou $13^{gr}{,}072$; et elle vaut $41^{f}{,}29$. Son titre légal est donc exprimé (**269**) par

$$\frac{41{,}29 \times 0{,}290322}{13{,}072}, \text{ c'est-à-dire } 0{,}91702\ldots \text{ ou } 0{,}917.$$

336. La moitié de $13^{gr}{,}072$ est $6^{gr}{,}536$; en y ajoutant $0^{gr}{,}009$, on aura le poids de la *pièce de* 5 *roubles;* on trouve $6^{gr}{,}545$. Quant à son titre, il est égal à 0,916. La valeur de la pièce est donc exprimée (**253**) par

$$\frac{6{,}545 \times 0{,}916}{0{,}290322}, \text{ c'est-à-dire } 20^{f}{,}6502\ldots \text{ ou } 20^{f}{,}65.$$

La valeur du kilogramme de cette monnaie au change est exprimée (**255**) par

$$30{,}93^{f}{,}30 . \frac{0{,}916}{0{,}900} \text{ ou } 3437^{f} \times 0{,}916, \text{ c'est-à-dire } 3148^{f}{,}292$$

ou $3148^{f}{,}29$.

337. Le poids du *rouble*, argent, est exprimé (**306**) par

$$\frac{4{,}5 \times 4}{0{,}874}, \text{ c'est-à-dire } 20^{gr}{,}5949\ldots \text{ ou } 20^{gr}{,}595.$$

La valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée (**263**) par

$$198^{f}{,}50 . \frac{0{,}874}{0{,}900}, \text{ c'est-à-dire } 192^{f}{,}765\ldots \text{ ou } 192^{f}{,}77.$$

338. Le titre de la pièce est 0,874—0,006 ou 0,868; son poids est donc exprimé (**306**) par

$$\frac{4{,}5 \times 4}{6{,}868}, \text{ c'est-à-dire } 20^{gr}{,}7373\ldots \text{ ou } 20^{gr}{,}737.$$

339. Sardaigne. Le *carlin* pèse le quart de $182^{gr}{,}34$, c'est-à-dire $45^{gr}{,}585$; et il vaut le quart de 569^{f}, c'est-à-dire $142^{f}{,}25$. Son titre légal est donc exprimé (**269**) par

$$\frac{142{,}25 \times 0{,}290322}{45{,}585}, \text{ c'est-à-dire } 0{,}90595\ldots \text{ ou } 0{,}906.$$

La valeur du kilogramme de cette monnaie s'obtiendrait (255) en multipliant $3093^{f},30$ par le titre, s'il était connu, et en divisant le produit par 0,900; ce qui revient à multiplier 3437 fr. par le titre. La valeur des 4 carlins au change serait donc le produit de 3437 fr. par le titre et par $182^{gr},34$ ou $0^{k},18234$ qui exprime le poids de ces 4 pièces. Il en résulte que la perte supportée par ces pièces est le produit de 3437 fr. par 0,18234 et par la perte que le titre éprouve au tarif; or, les 4 pièces perdent $2^{f},50$; on obtiendra donc la perte de titre en divisant $2^{f},50$ par le produit des nombres 3437 fr. et 0,18234, c'est-à-dire par $626^{f},702...$ ou simplement par $626^{f},70$, ce qui donne 0,00398... ou 0,004.

Quant à la valeur de la *pistole*, elle est le cinquième de $142^{f},25$, c'est-à-dire $28^{f},45$.

340. Un *écu* vaut la vingt-cinquième partie de 177 fr., c'est-à-dire $7^{f},08$. Son titre étant 0,906, son poids légal est exprimé (306) par

$$\frac{7,08 \times 4,5}{0,906}, \text{ c'est-à-dire } 35^{gr},1655... \text{ ou } 35^{gr},166.$$

Le titre de cette monnaie au tarif est 0,907 ; la valeur du kilogramme est donc exprimée (236) par

$$198^{f},50 . \frac{0,907}{0,900}, \text{ c'est-à-dire } 200^{f},043... \text{ ou } 200^{f},04.$$

341. Le titre des monnaies d'or au tarif étant 0,899, la valeur du kilogramme de ces monnaies est exprimée (255) par

$$3093^{f},30 . \frac{0,899}{0,900}, \text{ ou } 3437^{f} \times 0,899, \text{ ou } 3089^{f},863,$$

ou enfin $3089^{f},86$.

Le titre des monnaies d'argent au tarif étant 0,904, la valeur du kilogramme de ces monnaies est exprimée (265) par

$$198,50 . \frac{0,904}{0,900}, \text{ c'est-à-dire, } 199^{f},382, \text{ ou } 199^{f},38.$$

Or, le titre légal de ces diverses monnaies étant le même que pour les monnaies françaises, leur poids est aussi le même que pour les monnaies françaises correspondantes. Ainsi :

Une quadruple pèse 4 fois $6^{gr},45161$, c'est-à-dire $25^{gr},80644$ ou simplement $25^{gr},806$. Une pistole de 40 livres pèse la moitié de ce poids ou $12^{gr},903$; et une pistole de 20 livres pèse la moitié

de ce dernier ou $6^{gr},451$. Un écu de 5 livres pèse 25 grammes, et la pièce d'une livre pèse 5 grammes.

Cela posé :

Les 7 quadruples pèsent 7 fois.....	$25^{gr},806$ ou $180^{gr},642$
Les 13 pistoles de 40 livres, pèsent 13 fois 12	,903 ou 167 ,739
Les 5 pistoles de 20 livres, pèsent 5 fois..	6 ,451 ou 32 ,255
Total.....	$380^{gr},636$

ou $0^{k},380636$. La valeur de ces pièces au change sera donc le produit de $3089^{f},86$ par 0,380636, c'est-à-dire $1176^{f},1106$ ou $1176^{f},11$.

Les 31 écus de 5 livres pèsent 31 fois 25 grammes ou 775 gr. Enfin les 17 pièces d'une livre pèsent 17 fois 5 grammes ou 85

Total..... 860 gr.

ou $0^{k},86$. La valeur de ces pièces au change sera donc le produit de $199^{f},38$ par 0,86, c'est-à-dire $171^{f},466$... ou $171^{f},47$.

La valeur au change de toutes les espèces considérées sera donc $1176^{f},11 + 171^{f},47$ ou $1347^{f},58$.

On verra aisément que ces pièces perdraient ainsi $4^{f},42$ par rapport à leur valeur nominale.

342. Royaume de Saxe. La valeur de l'*auguste* est exprimée (**255**) par

$$\frac{6,670 \times 0,903}{0,290322}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 20^{f},7459... \quad \text{ou} \quad 20^{f},75.$$

343. Puisque l'*écu de convention* est au titre des monnaies françaises, en nommant x sa valeur, on devra avoir

$$x : 1^{f} = 37^{gr},120 : 5^{gr}, \quad \text{d'où} \quad x = 7^{f},424 \quad \text{ou} \quad 7^{f},42.$$

Par conséquent 350 de ces écus vaudraient 350 fois $7^{f},42$ ou 2597 fr. (Si l'on tenait compte des 4 dixièmes de centime qui entrent dans la valeur de l'écu, mais qu'on ne fait pas figurer dans les tableaux des monnaies étrangères, on trouverait $2598^{f},40$. Différence en plus $1^{f},40$.)

En divisant ces 2597 fr. par $3^{f},90$, on obtiendra le nombre de *thalers* équivalent : on trouve $665\frac{35}{39}$, ou à très-peu près, 666.

344. Royaume des Deux-Siciles. 1° Le titre légal de la *pièce de 10 onces* est exprimé (**269**) par

$$\frac{129,91 \times 0,290322}{37,867}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,996.$$

Par conséquent son titre réel est 0,995.

Le poids d'or pur contenu dans 100 de ces pièces est donc les 0,995 de $3786^{gr},7$. Mais, si l'on suppose l'alliage obtenu, le poids d'or pur qu'il contiendra n'aura pas changé, et il sera les 0,900 du poids de l'alliage, c'est-à-dire les 0,900 de $3786^{gr},7$, plus les 0,900 du cuivre ajouté. Il en résulte que les 0,900 du cuivre ajouté font le même poids que les 0,095 de $3786^{gr},7$. On obtiendra donc le poids du cuivre à ajouter en multipliant $3786^{gr},7$ par 0,095 et divisant le produit par 0,900, ce qui donne $399^{gr},707$.

2° Le poids total de l'alliage serait $3786^{gr},7 + 399^{gr},707$ ou $4186^{gr},407$. En divisant ce poids par $6^{gr},451$, qui est le poids de la pièce de 20 fr., on aura le nombre de pièces de 20 fr. qui pourraient être faites avec ce poids d'alliage; on trouve pour quotient 648,9.... On pourrait donc faire 648 pièces de 20 fr.

3° Pour en faire 649, il faudrait un poids d'alliage exprimé par $6^{gr},451 \times 649$ ou $4186^{gr},699$; or, on n'en a que $4186^{gr},407$; il faudrait donc ajouter encore $0^{gr},292$ de cuivre.

Mais le poids de l'or pur contenu dans l'alliage n'a pas changé; il est représenté par $3786^{gr},7 \times 0,995$ ou $3767^{gr},766$. Le titre de l'alliage serait donc le rapport de ce poids d'or au poids total de l'alliage, c'est-à-dire

$$\frac{3767^{gr},766}{4186^{gr},699}, \quad \text{ou} \quad 0,89993....$$

Ainsi, le titre de l'alliage ne se serait abaissé que d'un peu moins de 6 cent-millièmes.

245. La différence $0^f,85$ entre les valeurs des deux pièces représente la valeur de 2 *carlins*; le *carlin* vaut donc la moitié de $0^f,85$, c'est-à-dire $0^f,425$. Par suite la pièce de 10 carlins vaut 10 fois $0^f,425$ ou $4^f,25$; et la pièce de 12 carlins vaut $4^f,25 + 0^f,85$ ou $5^f,10$.

Le poids de la pièce de 12 carlins est exprimé (**306**) par

$$\frac{5,10 \times 4,5}{0,8335}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 27^{gr},5344... \quad \text{ou} \quad 27^{gr},534.$$

On en déduit le poids du carlin en divisant ce nombre par 12, ce qui donne $2^{gr},2945$.... Par conséquent, le poids du ducat de 10 carlins est le produit de ce dernier nombre par 10, ou $22^{gr},945$.

246*. Suisse. Les 362 florins représentent un poids total de $35^{gr},166 \times 362$ ou $12730^{gr},092$; et si l'on désigne par x le nombre de florins cherché, on aura, en exprimant que le poids d'ar-

gent pur contenu dans l'alliage est égal à la somme des poids d'argent pur contenu dans les monnaies alliées,

$$(12730^{gr},092 + 12^{gr},725.x).0,900$$
$$= 12730^{gr},092 \times 0,906 + 12^{gr},725.x.0,750,$$

d'où

$$12^{gr},725\ (0,900 - 0,750)\ x = 12730^{gr},092\ (0,906 - 0,900)$$

ou $$12^{gr},725.0,150\ x = 12730^{gr},092.0,006,$$

d'où $$x = \frac{12730^{gr},092.0,006}{12^{gr},725.0,150} = 40,015...$$

ou, à très-peu près, 40.

Si, en effet, on adopte le nombre de 40 florins, qui forment un poids de 509 grammes, on aura

D'une part $12730^{gr},092$ au titre de 0,906, représentant un poids d'argent pur exprimé par $12730^{gr},092 \times 0,906$ ou.. $11533^{gr},463$

De l'autre 509 grammes au titre de 0,750, représentant un poids d'argent pur marqué par $509^{gr} \times 0,750$ ou..... 381 ,750

En tout..... $11915^{gr},810$

d'argent pur, sur $12730^{gr},092 + 509^{gr}$ ou..... $13239^{gr},092$

d'alliage; ainsi le titre de cet alliage est

$$\frac{11915,810}{13239,092} \text{ ou } 0,90004... \text{ ou, à très-peu près, } 0,900.$$

En divisant par 25 grammes le poids total de l'alliage ou $13239^{gr},092$, on aura le nombre de pièces de 5 fr. que l'on peut en tirer; on trouve 529,56... On pourrait donc obtenir 529 pièces de 5 fr.

Il resterait $14^{gr},092$ d'alliage, d'où l'on pourrait encore tirer 2 pièces de 1 fr.; et il resterait $4^{gr},092$ qui peuvent représenter la perte inévitable.

347. Suède. On a vu au n° **310** que le *ducat* de la Confédération germanique vaut $11^{f},85$; par conséquent 78 de ces ducats valent 78 fois $11^{f},85$ ou $924^{f},30$; le *ducat* de Suède vaut la soixante-dix-neuvième partie de cette somme, ou $11^{f},70$.

Le titre du ducat de la Confédération étant 0,986, celui du ducat de Suède est 0,986 — 0,0105 ou 0,9755. Par conséquent le poids légal de ce ducat est exprimé (**323**) par

$$\frac{11,70 \times 0,290322}{0,9755}, \text{ c'est-à-dire } 3^{gr},48207..., \text{ ou } 3^{gr},482.$$

Les 79 ducats de Suède pèseraient donc

79 fois $3^{gr},482$, ou . . . . . $275^{gr},078$

Le ducat de la Confédération germanique pesant $3^{gr},490$, 78 de ces ducats pèseraient

78 fois $3^{gr},490$, ou . . . . . 272 ,220

L'excès du premier poids sur le second serait donc $2^{gr},858$

348. I. Un *riksdaler* ancien vaut les $\frac{1150}{1132}$ d'un *riksdaler* nouveau; et 100 riksdalers anciens en valent $\frac{115000}{1132}$ nouveaux. D'après l'énoncé, ces $\frac{115000}{1132}$ riksdalers nouveaux, plus encore 100 riksdalers nouveaux, font 1141 fr.; en d'autres termes $\frac{115000}{1132}+\frac{113200}{1132}$, ou $\frac{228200}{1132}$ riksdalers nouveaux, font 1141 fr.; par conséquent

228200 riksdalers nouveaux valent $1141^f \times 1132$,

et 1 riksdaler nouveau vaut $\frac{1141^f \times 1132}{228200}$, ou $5^f,66$.

Le riksdaler ancien a donc pour valeur $5^f,66 . \frac{1150}{1132}$, ou $5^f,75$.

Quant au titre du riksdaler nouveau, il est exprimé (**271**) par

$\frac{5,66 \times 4,5}{33,925}$, c'est-à-dire 0,7507..., ou environ 0,751.

II. La première partie du problème peut être traitée d'une autre manière. Soit x la valeur du riksdaler ancien, et y celle du riksdaler nouveau; l'énoncé donne immédiatement les deux équations

$$1132x = 1150y \quad \text{et} \quad 100(x+y) = 1141^f.$$

On tire de la seconde

$$y = 11^f,41 - x.$$

Substituant cette valeur dans la première équation, on obtient

$$1132x = 1150 \times 11^f,41 - 1150x,$$

ou $$(1132 + 1150)x = 1150 \times 11^f,41;$$

d'où $$x = \frac{1150 \,.\, 11^f,41}{2282} = 5^f,75.$$

Par suite $$y = 11^f,41 - 5^f,75 = 5^f,66.$$

Le reste s'achèvera comme dans la première méthode.

349. Turquie. La valeur de la *pièce de* 100 *piastres* est exprimée (**253**) par

$$\frac{7,190 \times 0,916}{0,290322}, \text{ c'est-à-dire } 22^f,684..., \text{ ou } 22^f,68.$$

La pièce de 50 *piastres* pesant moitié moins, et étant au même titre, a une valeur moitié moindre, c'est-à-dire $11^f,34$.

Ceci suppose que la valeur de la piastre est la centième partie de $22^f,68$, c'est-à-dire $0^f,2268$. Dans cette hypothèse, 75 piastres valent 75 fois $0^f,2268$, ou $17^f,01$. L'erreur commise en comptant 75 piastres pour 17 fr. serait donc de 1 centime.

350. La valeur de la *pièce de* 20 *piastres* est exprimée par

$$\frac{24,068 \times 0,833}{4,5}, \text{ c'est-à-dire } 4^f,455..., \text{ ou } 4^f,45,$$

à moins d'un centime près.

La *pièce de* 10 *piastres* vaut en conséquence $2^f,22$, et la *pièce de* 5 *piastres* $1^f,11$.

La valeur des pièces indiquées dans l'énoncé se composerait donc :

De 150 fois $4^f,45$, ou	$667^f,50$
De 200 fois $2^f,22$, ou	444 ,00
De 250 fois $1^f,11$, ou	277 ,50
Total. . . .	$1389^f,00$

Mais le titre de la pièce de 20 piastres au tarif étant 0,833—0,005 ou 0,828, la valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée (**263**) par $198^f50 \,.\, \frac{0,828}{0,900}$, c'est-à-dire $182^f,62$. Or, 150 pièces de 20 piastres représentent un poids de 150 fois $24^{gr},068$, c'est-à-dire $3610^{gr},2$, ou $3^k,6102$; la valeur de ces 150 pièces au change serait par conséquent $182^f,62 \times 3,6102$, ou $659^f,29$....

De même, le titre de la pièce de 10 piastres au tarif étant 0,833 — 0,007, ou 0,826, la valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée par $198^f,50 \,.\, \frac{0,826}{0,900}$, c'est-à-dire $182^f,1788$.... ou $182^f,18$. Or 200 pièces de 10 piastres représentent un poids

de 200 fois $12^{gr},034$, c'est-à-dire $2406^{gr},8$, ou $2^{k},4068$; la valeur de ces 200 pièces au change serait donc $182^{f},18 \times 2,4068$, c'est-à-dire $438^{f},47$....

Enfin, le titre de la pièce de 5 piastres étant $0,833 - 0,009$, ou $0,824$, la valeur du kilogramme de cette monnaie est exprimée par

$$198^{f},50 . \frac{0,824}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 181^{f},737 .., \quad \text{ou} \quad 181^{f},74.$$

Or 250 pièces de 5 piastres représentent un poids de 250 fois $6^{gr},017$, c'est-à-dire $1504^{gr},25$, ou $1^{k},50425$; la valeur de ces 250 pièces au change serait donc $181^{f},74 \times 1,50425$, ou $273^{f},38$.

La valeur totale des diverses pièces au change serait donc

$$659^{f},29 + 438^{f},47 + 273^{f},38, \quad \text{ou} \quad 1371^{f},14$$

Ainsi on perdrait au change la différence entre $1389^{f},00$ et $1371^{f},14$, c'est-à-dire $17^{f},86$.

351*. Royaume de Wurtemberg. Il faut d'abord trouver le titre légal du carolin ; ce titre est exprimé (**269**) par

$$\frac{25,87 \times 0,290322}{9,744}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0,7707..., \quad \text{ou} \quad 0,771.$$

Le titre du carolin au tarif est donc $0,771 - 0,004$, ou $0,767$. Par conséquent, la valeur du kilogramme de carolins est exprimée (**255**) par

$$3093^{f},30 . \frac{0,767}{0,900}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2336^{f},179, \quad \text{ou} \quad 2336^{f},18.$$

D'ailleurs le poids légal du ducat (**310**) est $3^{gr},490$; et la valeur du kilogramme de ducats est $3368^{f},26$.

Soit x le nombre de ducats et y le nombre de carolins qui composent la somme donnée; on aura d'abord

$$[1] \qquad 11^{f},85 . x + 25^{f},87 . y = 1412 \text{ fr.}$$

Le poids des x ducats est $3^{gr},490 . x$, ou $0^{k},00349 . x$; la valeur de ces ducats au change est donc

$$3368^{f},26 \times 0,00349 . x \quad \text{ou} \quad 11^{f},7552274 . x,$$

ou simplement $11^{f},755 . x$

Pareillement : le poids des y carolins est $9^{gr},744 . y$ ou $0^{k},009744 . y$; la valeur de ces carolins au change est donc

$$2636^{f},18 \times 0,009744 . y \quad \text{ou} \quad 25^{f},68693792 . y,$$

ou simplement, $25^{f},687 . y$.

La valeur totale de ces pièces d'or au change est d'ailleurs, d'après l'énoncé, 1412 fr. — $10^f,10$, ou $1401^f,90$. On doit donc avoir l'équation

$$[2] \qquad 11^f,755 . x + 25^f,687 . y = 1401^f,90.$$

Les équations [1] et [2] détermineront x et y.

On trouve, en éliminant y,

$$x = 10 \quad \text{et par suite} \quad y = 50,$$

valeurs qu'il convient de vérifier, attendu que les coefficients de l'équation [2] ne sont qu'approchés. En adoptant ces valeurs, on obtient $1401^f,90$ pour la valeur au change des 10 ducats et des 50 carolins ; la perte est donc bien $10^f,10$, comme l'exige l'énoncé.

552*. Soit x la valeur de la pièce de 2 *thalers* et y celle de la pièce de 2 florins ; l'énoncé fournit les deux équations

$$x - y = 1^f,59 \times 2 = 3^f,18$$

et

$$10x + 20y = 159 \text{ fr.};$$

d'où l'on tire aisément

$$x = 7^f,42 \quad \text{et} \quad y = 4^f,24.$$

Comme ces monnaies sont au titre des monnaies françaises, on obtiendra leur poids en multipliant 5 grammes respectivement par 7,42 et par 4,24 ; ce qui donne pour le poids de la pièce de 2 thalers, $37^{gr},10$, et pour le poids de la pièce de 2 florins, $21^{gr},20$.

Les valeurs légales sont réellement $37^{gr},120$ et $21^{gr},212$; ce qui tient à ce que les valeurs $7^f,42$ et $4^f,24$ inscrites dans les tableaux officiels ne sont qu'approchées.

553. La valeur du *kronen-thaler* est exprimée (**259**) par

$$\frac{29^{gr},5 \times 0,870}{4,5}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 5^f,703, \quad \text{ou} \quad 5^f,70.$$

Par conséquent 530 kronen-thalers valent 530 fois $5^f,70$, ou 3021 fr.

Pour avoir le nombre de florins qui équivaut à ce nombre de francs, il faut le diviser par la valeur du florin, ou par $2^f,12$, ce qui donne pour quotient 1425. Les 530 kronen-thalers valent donc 1425 florins.

354. Principaux États hors d'Europe. La valeur de la *quadruple pagode* ou *mohur* est exprimée (**253**) par

$$\frac{11,664 \times 0,916\frac{2}{3}}{0,290322}, \text{ c'est-à-dire } 36^f,828..., \text{ ou } 36^f,83.$$

La double pagode vaut la moitié de ce nombre, ou $18^f,41$, et la pagode la moitié de ce dernier, c'est-à-dire $9^f,20$.

Les monnaies d'argent correspondantes ayant le même poids et le même titre, il suffit pour obtenir leurs valeurs de diviser les valeurs ci-dessus par $15\frac{1}{2}$, rapport de la valeur de l'or à celle de l'argent sous le même poids; on obtient ainsi :

Pour la valeur de la roupie.	$2^f,376...$,
— de la demi-roupie.	$1,188...$,
— du quart de la roupie.	$0,594...$.

355. La valeur des 1000 *sequins* est exprimée (**253**) par

$$\frac{2^{gr},600 \times 0,750 \times 1000}{0,290322}, \text{ c'est-à-dire } 6716^f,68.$$

La valeur des 200 *grouch* est exprimée (**259**) par

$$\frac{2,900 \times 0,461 \times 200}{4,5}, \text{ c'est-à-dire } 59^f,42.$$

356. 1° La valeur de la pièce de 5 *dollars* est exprimée (**253**) par

$$\frac{33,435 \times 0,900}{0,290322}, \text{ c'est-à-dire } 103^f,648..., \text{ ou } 103^f,65.$$

Par suite, la pièce de	10 dollars vaut	$51^f,824$, ou. . . .	51,82
—	5 —	25,912	25,91
—	$2\frac{1}{2}$ —	12,956	12,96
—	1 dollar (or)	$5^f,182$	5,18

Pour obtenir la valeur des pièces d'argent, il suffit, puisqu'elles sont au même titre que les monnaies françaises, de diviser leur poids par 5^{gr}, ce qui donne :

Pour le *dollar* (argent)	$5^f,3458$	ou $5^f,34$
— $\frac{1}{2}$ dollar —	2,6729	ou 2,67
— $\frac{1}{4}$ dollar —	$1^f,3364$	ou $1^f,34$

2° Le dollar (or) et le dollar (argent) étant supposés avoir la même valeur aux États-Unis, il faut que le rapport entre la valeur de l'or et celle de l'argent, sous le même poids, diffère

de $15\frac{1}{2}$, qui est le rapport légal admis en France. Pour obtenir ce rapport, on remarquera qu'il est l'inverse du rapport des poids des deux métaux pour une même valeur; on l'obtiendra donc en divisant le poids d'argent pur qui entre dans le dollar (argent) par le poids d'or pur qui entre dans le dollar (or). Et comme ces deux monnaies sont au même titre, il suffira de diviser le poids du dollar (argent) par le poids du dollar (or), c'est-à-dire 26,729 par 1,671, ce qui donne 15,995..., ou à très-peu près 16.

357. Puisque 5 *quadruples* valent 406 fr., une quadruple vaut le quarantième de 3249 fr., c'est-à-dire $81^f,225$ ou $81^f,22$. Son titre est d'ailleurs $\frac{21}{24}$, ou $\frac{7}{8}$, ou encore, 0,875; son poids est donc exprimé (**323**) par

$$\frac{0,290322 \times 81,225}{0,875}, \text{ c'est-à-dire } 26^{gr},9501.... \text{ ou } 26^{gr},950.$$

La valeur de la *piastre* est le quinzième de $81^f,225$, c'est-à-dire $5^f,415$ ou $5^f,41$. Son poids étant d'ailleurs de 27 grammes, son titre est exprimé (**271**) par

$$\frac{5,415 \times 4,5}{27} \text{ ou } \frac{5,415 \times 0,5}{3}, \text{ c'est-à-dire } 0,9025..., \text{ ou } 0,903.$$

358. Le poids de la pièce de 10000 *reis* est le quotient de 242 grammes par 27, c'est-à-dire $8^{gr},9629...$, ou $8^{gr},963$.

Par conséquent, la valeur de cette pièce est exprimée (**253**) par

$$\frac{8,963 \times 0,916\frac{2}{3}}{0,290322} \text{ ou } \frac{8,963 \times 0,91666....}{0,290322},$$

c'est-à-dire $28^f,2995....$ ou $28^f,30$.

Par suite, la pièce de 20000 reis vaut 2 fois $28^f,30$ ou $56^f,60$.

Le rapport de la valeur de l'or à celle de l'argent, sous le même poids, étant $14\frac{2}{9}$, une pièce d'argent valant 10000 reis, au même titre pèserait $8^{gr},963 \times 14\frac{2}{9}$, c'est-à-dire $127^{gr},4737....$

La pièce de 1000 reis, en argent, pèse donc le dixième de ce poids, ou $12^{gr},747$. Par suite, sa valeur est exprimée (**259**) par

$$\frac{12,747 \times 0,91666...}{4,5}, \text{ c'est-à-dire } 2^f,5966... \text{ ou } 2^f,60.$$

Par conséquent, la pièce de 2000 *reis* vaut 2 fois $2^f,5966...$, c'est-à-dire $5^f,193...$ ou $5^f,19$; et la pièce de 500 reis vaut la moitié de $2^f,60$, c'est-à-dire $1^f,30$.

§ 2. Des monnaies de compte.

359. Les 542 *thalers* valent 542 fois 3f,71 ou.... 2010f,82
Les 25 silbergroschen valent les $\frac{25}{30}$ de 3f,71 ou.... 3 ,09
Total..... 2013f,91

Pour avoir l'expression de cette somme en *livres sterlings*, il faut la diviser par 25f,21. Le reste, s'il y en a un, multiplié par 20 et divisé par 25,21, donnera les *schillings*, et le nouveau reste, s'il y en a un, multiplié par 12 et divisé par 25,21, donnera les *pences;* enfin le nouveau reste, s'il y en a un, multiplié par 4 et divisé par 25,21, donnera les *farthings*. En opérant ainsi, on trouve 79 *livres sterlings*, 17 *schillings*, 8 *pences*, 1 *farthing* et une fraction négligeable.

360. Les 1882 *roubles* valent 1882 fois 4 fr. ou.... 7528 fr.
Les 75 copecks sont les $\frac{75}{100}$, ou les $\frac{3}{4}$ de 4 fr., et valent 3 »
Total..... 7531 fr.

Pour avoir l'expression de cette somme en *thalers*, il faut la diviser par 3,71; multiplier le reste, s'il y en a un, par 30 et diviser le produit par 3,71 pour obtenir les *silbergroschen*. En opérant ainsi, on trouve 2029 *thalers*, 27 *silbergroschen*, et une fraction.

361. Les 357 *florins* valent 357 fois 2f,60 ou..... 928f,20
Les 45 *kreutzers* sont les $\frac{40}{60}$, ou les $\frac{2}{3}$ de 2f,60, c'est-à-dire 1 ,73
Total..... 929f,93

Pour obtenir l'expression de cette somme en *roubles*, il faut la diviser par 4; la partie entière du quotient exprimera les *roubles*, les centièmes exprimeront les *copecks*. On trouve ainsi 232 *roubles* et 48 *copecks*.

362. Les 519 *livres* valent 529 fois 0f,84 ou..... 444f,36
Les 16 *soldi* sont les $\frac{16}{20}$ ou les $\frac{8}{10}$ de 0f,84 ou..... 0 ,67
Total..... 445f,03

On obtiendra l'expression de cette somme en *florins* en la divisant par 2,60; multipliant le reste, s'il y en a un, par 60, et divisant le produit par 2,60 pour obtenir les *kreutzers*. On trouve ainsi : 171 *florins* et, à très-peu près, 10 *kreutzers*.

363. Les 25800 *réaux* valent 25800 fois 0f,26 ou 6708 fr. Pour convertir cette somme en dollars, on la divisera par 5f,18; la

partie entière du quotient donnera les *dollars*, les centièmes exprimeront les *cents*. On trouve : 1294 *dollars* et 98 *cents*.

364. Les 437 *risdales* de Suède valent 437 fois $5^f,75$ ou $2512^f,75$
Les 42 *schillings* sont les $\frac{42}{48}$ de $5^f,75$ ou..... 5 ,03
Les 513 *marcs-banco* valent 513 fois $1^f,88$ ou..... 964 ,44
Les 11 *schillings* sont les $\frac{11}{16}$ de $1^f,88$ ou..... 1 ,29

Total..... $3483^f,51$

Les 2897 *florins* d'Amsterdam valent 2897 fois $2^f,14$ ou $6199^f,58$
Les 75 *cents* sont les $\frac{75}{100}$ ou les $\frac{3}{4}$ de $1^f,88$ ou..... 1 ,41

Total..... $6200^f,99$
La différence entre $6200^f,99$ et $3483^f,51$ est..... $2717^f,48$

Pour exprimer cette différence en *risdales courantes* de Danemark, il faut la diviser par $4^f,96$, multiplier le reste, s'il y en a un, par 96, et diviser le produit par 4,96 pour avoir les *schillings*. On trouve en opérant ainsi, 547 *risdales*, 84 *schillings* et une fraction.

365. Les 621 *florins* de Francfort val. 521 fois $2^f,12$ ou $1316^f,52$
Les 36 *kreutzers* sont les $\frac{36}{60}$ ou les $\frac{6}{10}$ de $2^f,12$ ou... 1 ,27
Les 217 *risdales* de Munich valent 217 fois $3^f,24$ ou $703^f,08$
Les 35 *kreutzers* sont les $\frac{35}{90}$ de $3^f,24$ ou..... 1 ,26

Total..... $2022^f,13$
Les 500000 *reis* valent 500 fois $5^f,10$ ou..... 2550 fr.
La différence entre ces deux sommes est..... $527^f,87$

Pour l'exprimer en *thalers* de Saxe, il faut la diviser par $3^f,90$, multiplier le reste, s'il y en a un, par 24, et diviser le produit par 3,90 pour avoir les *gute-groschen*. En opérant ainsi, on trouve 135 *thalers*, 8 *gute-groschen*, $\frac{28}{65}$.

366. 1° Divisez 1000000 par 25,21; multipliez le reste, s'il y en a un, par 20 et divisez par 25,21 pour avoir les *schillings;* multipliez le nouveau reste, s'il y en a un, par 12, et divisez par 25,21 pour avoir les *pences;* enfin, multipliez le nouveau reste, s'il y en a un, par 4, et divisez par 25,21 pour avoir les *farthings*. On trouve 39666 *livres sterlings*, 15 *schillings*, 11 *pences*, et un peu moins de 3 *farthings*.

2° Divisez 1000000 par 3,71 ; multipliez le reste, s'il y en un, par 30 et divisez par 3,71 pour avoir les *silbergroschen*. On trouve 269541 *thalers*, 23 *silbergroschen* et une fraction.

3° Divisez 1000000 par 2,60; multipliez le reste, s'il y en a un,

par 60, et divisez par 2,60 pour obtenir les kreutzers. On trouve 38461 *florins*, 32 *kreutzers*, et une fraction.

4° La *lira* valant 1 fr., les 1000000 fr. valent 1000000 de lires.

5° Divisez 1000000 par 4, ce qui donne 125000 *roubles*.

367. Le *thaler* de Saxe vaut $3^f,90$ et le *florin* d'Autriche vaut $2^f,60$. Ces valeurs sont dans le rapport de 39 à 26, ou de 3 à 2; ainsi 2 *thalers* de Saxe valent 3 *florins* d'Autriche. On trouve, en effet, que ces deux expressions valent l'une et l'autre $7^f,80$.

Les nombres 2 et 3 étant premiers entre eux, ne peuvent être remplacés par des nombres plus petits qui soient dans le même rapport.

368. Le *scudo* de Rome vaut $4^f,96$ et le *risdale* de Danemark vaut $5^f,36$. Ces deux valeurs sont dans le rapport des nombres 496 et 536, ou, en divisant par 8, dans le rapport des nombres 62 et 67. Ainsi 67 *scudi* valent 62 *risdales*. On trouve, en effet, que ces deux expressions valent l'une et l'autre $322^f,32$.

Les nombres 67 et 62 étant premiers entre eux leur rapport ne peut être remplacé par celui de deux nombres entiers plus petits.

369. 1° La *livre sterling* vaut $25^f,21$; son rapport au franc est donc celui de 25,21 à 1, ou de 2521 à 100; ces deux nombres étant premiers entre eux, leur rapport ne peut être remplacé par celui de deux nombres entiers plus petits. Ainsi 100 *livres sterling* valent exactement 2521 *francs*.

2°* Réduisez le rapport $\frac{2521}{100}$ en fraction continue (*); l'avant-dernière réduite est $\frac{479}{19}$, et la dernière est la fraction proposée elle-même. On sait que le numérateur de la différence entre deux réduites consécutives est égal à ± 1; on a en effet

$$2521 \times 19 - 100 \times 479 = -1$$

ou, en divisant par 100,

$$25,21 \times 19 - 479 = -0,01.$$

Ainsi, 19 *livres sterling* et 479 *francs* ne diffèrent que de 1 centime.

On trouve en effet que 19 livres sterling font $478^f,99$.

370*. 1° La *livre sterling* et le *dollar* sont dans le rapport de $25^f,21$ à $5^f,18$, ou de 2521 à 518. Ces deux nombres étant pre-

(*) Voy. notre *Algèbre élémentaire*, 2e édition, n° 365.

miers entre eux, leur rapport ne peut être remplacé par celui de deux nombres plus petits; ainsi 518 *livres sterling* font 2521 *dollars*.

2° Si l'on réduit en fraction continue le rapport $\frac{2521}{534}$, on trouve pour l'avant-dernière réduite, $\frac{73}{15}$. On a donc

$$2521 \times 15 - 518 \times 73 = +1,$$

ou, en divisant par 100,

$$25^f,21 \times 15 - 5^f,18 \times 73 = +0^f,01.$$

Ainsi 15 *livres sterling* et 73 *dollars* ne diffèrent que de 1 centime.

On trouve, en effet, que 15 *livres sterling* font . . . . . $378^f,15$
et — que 73 *dollars* — . . . . . $378^f,14$

371*. 1° La *livre sterling* et la *roupie* sont dans le rapport de $25^f,21$ à $2^f,37$ ou de 2521 à 237. Ces nombres étant premiers entre eux, on ne peut exprimer leur rapport en nombres plus simples; ainsi 237 *livres sterling* valent 2521 *roupies*.

2° Si l'on réduit en fraction continue le rapport $\frac{2521}{237}$, on trouve pour l'avant-dernière réduite $\frac{1202}{113}$. Ainsi, d'après le raisonnement du n° **370**, on peut affirmer que 113 *livres sterling* et 1202 *roupies* ne diffèrent que de 1 centime. On trouve, en effet, que ces deux expressions valent, la première $2848^f,73$, et la seconde $2848^f,74$.

372*. 1° Le rapport de la *risdale* au *thaler* est celui de $5^f,75$ à $3^f,71$, ou de 575 à 371; ces deux nombres étant premiers entre eux, on dira simplement que 371 *risdales* valent 575 *thalers*.

2° Si l'on réduit en fraction continue le rapport $\frac{575}{371}$, on trouve pour l'avant-dernière réduite $\frac{31}{20}$; ainsi (**370**) on est certain que 20 *risdales* et 31 *thalers* ne diffèrent que de 1 centime. On trouve, en effet, que 20 *risdales* font 115 fr., et que 31 *thalers* font $115^f,01$.

373*. Le rapport de la *piastre* au *marc-banco* est $\frac{5^f,41}{1^f,88}$ ou $\frac{541}{188}$. Cette fraction étant réduite en fraction continue, l'avant-dernière réduite est $\frac{141}{49}$; ainsi, 49 *piastres* et 141 *marcs-banco* ne diffèrent que de 1 centime.

On trouve, en effet, que 49 *piastres* font. . . . . $265^f,09$
et — que 141 *marcs banco* — . . . . . $265^f,08$

374*. Le rapport de 1000 *reis* au florin est celui de $7^f,07$ à $2^f,14$ ou $\frac{707}{214}$. Si l'on réduit cette fraction en fraction continue, on trouve pour l'avant-dernière réduite $\frac{261}{79}$; ainsi, 79 mille *reis* valent 261 florins, à un centime près. En effet :

79 mille *reis* valent . . . . . $558^f,53$
et 261 *florins* — . . . . . $558^f,54$

375*. Le rapport du *dollar* au *réal* est $\frac{5^f,18}{0^f,26}$ ou $\frac{518}{26}$, ou $\frac{259}{13}$. Si l'on réduit cette fraction en fraction continue, on trouve pour l'avant-dernière réduite $\frac{20}{1}$; ainsi :

$$259 \times 1 - 13 \times 20 = -1$$

ou, en multipliant par 2, et divisant ensuite par 100,

$$5^f,18 - 0^f,26 \times 20 = -0^f,02.$$

Ainsi, 1 *dollar* ne diffère de 20 *réaux* que de 2 centimes.

En effet : 1 *dollar* vaut . . . . . $5^f,18$
et 20 *réaux* valent 20 fois $0^f,26$ ou . . . . . $5^f,20$.

376. Cherchons d'abord un nombre de centimes qui remplisse les conditions de l'énoncé. Le *thaler* de Saxe valant $3^f,90$, le *florin* d'Autriche $2^f,60$ et le *florin* de Bavière $2^f,16$, le nombre de centimes cherché sera le *plus petit multiple* des nombres 390, 260 et 216. Or on a

$$390 = 2.3.5.13$$
$$260 = 2^2.5.13$$
$$216 = 2^3.3^3$$

Le plus petit multiple de ces nombres est donc $2^3.3^3.5.13$ ou 14040 centimes, ou $140^f,40$. Pour faire de ce nombre un nombre exact de francs, il suffit de le multiplier par 5, ce qui donne 702 fr.; tel est le nombre de francs demandé. En effet, si l'on divise tour à tour 702 fr. $3^f,90$, par $2^f,60$, ou par $2^f,16$, on trouvera que ce nombre de francs équivaut : ou à 180 *thalers* de Saxe, ou à 261 *florins* d'Autriche, ou à 325 florins de Bavière.

377. La *piastre* du Mexique valant $5^f,41$, le *thaler* de Prusse $3^f,71$ et le *marc banco* de Hambourg $1^f,88$, il s'agit de trouver

plus petit nombre de centimes qui soit à la fois un multiple de 541, de 371 et de 188. On s'assure aisément que ces nombres sont premiers entre eux; leur plus petit multiple est donc leur produit 37733668. Ainsi le nombre demandé est 377336^{f},68.

En effet, en divisant tour à tour ce nombre par 5^{f},41, par 3^{f},71, ou par 1^{f},88, on reconnaît qu'il équivaut : ou à 69748 *piastres*, ou à 101708 *thalers*, ou à 200711 *marcs banco*.

378. 1° Le tableau du n° **359** donne les valeurs en *francs* des six autres monnaies désignées.

2° Pour obtenir en *livres sterling* les valeurs des six autres monnaies, il faut diviser leur valeur en francs par 25,21; multiplier le reste, s'il y en a un, par 20, et diviser par 25,21 pour obtenir les *schillings;* puis multiplier le nouveau reste s'il y en a un, par 12, et diviser par 25,21 pour obtenir les *pences;* enfin, multiplier encore le reste, s'il y en a un, par 4 et diviser par 25,21 pour obtenir les *farthings*.

En opérant ainsi, on trouve que :

		Liv. sterl.	*Schillings.*	*Pences.*	*Farthings.*
Le *franc*.	vaut	0	0	9	2
Le *florin* d'Autriche	—	0	2	0	3
Le *thaler* de Prusse	—	0	2	11	1
Le *rouble* de Russie	—	0	3	2	»
Le *réal* d'Espagne	—	0	0	2	2
Le *scudo* des États-Romains.	—	0	4	3	»

3° Pour obtenir en *florins* d'Autriche les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 2,60; multiplier le reste, s'il y en a un, par 60, et diviser encore par 2,60 pour obtenir les *kreutzer*. On trouve ainsi que :

Le *franc*	vaut	0 *florins*,	23 *kreutzers*,	
La *livre sterling*	—	9	41	$\frac{10}{13}$
Le *thaler* de Prusse	—	1	25	$\frac{8}{13}$
Le *rouble* de Russie	—	1	32	$\frac{4}{13}$
Le *réal* d'Espagne	—	0	6	»
Le *scudo* des États-Romains	—	2	3	$\frac{9}{13}$.

4° Pour obtenir en *thalers* de Prusse les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 3,71; multiplier le reste, s'il y en a un, par 30, et diviser de nouveau par 3,71 pour obtenir les *silbergroschen*. On trouve ainsi que :

Le *franc*	vaut	0 *thalers*,	8 *silbergroschen*	
La *livre sterling*.	—	6	23	$\frac{6}{7}$

Le *florin* d'Autriche.	vaut	0 *thalers*,	21 *silbergroschen*	»
Le *rouble* de Russie	—	1	2	$\frac{4}{7}$
Le *réal* d'Espagne	—	0	2	$\frac{1}{10}$
Le *scudo* des États-Romains	—	1	13	$\frac{1}{3}$.

5° Pour obtenir en *roubles* de Russie les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 4 ; les centièmes exprimeront des copecks. On trouve ainsi que :

Le *franc*	vaut	0 *roubles*,	25 *copecks*.
La *livre sterling*.	—	6	30
Le *florin* d'Autriche.	—	0	65
Le *thaler* de Prusse	—	0	92
Le *réal* d'Espagne	—	0	$6\frac{1}{2}$
Le *scudo* des États-Romains	—	1	27.

6° Pour exprimer en *réaux* d'Espagne les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 0,26. On trouve ainsi que :

Le *franc*	vaut	3 réaux	$\frac{11}{13}$
La *livre sterling*	—	97	»
Le *florin* d'Autriche.	—	10	»
Le *thaler* de Prusse	—	14	$\frac{7}{26}$
Le *rouble* de Russie	—	15	$\frac{5}{13}$
Le *scudo* des États-Romains	—	20	$\frac{10}{13}$

7° Pour exprimer en *scudi* des Etats-Romains les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 5,36 ; les centièmes exprimeront les *baïocchi*. On trouve ainsi que :

Le *franc*	vaut	0 *scudi*,	18 *baïocchi*	$\frac{6}{10}$
La *livre sterling*	—	4	70	$\frac{1}{3}$
Le *florin* d'Autriche	—	0	48	$\frac{1}{2}$
Le *thaler* de Prusse.	—	0	69	$\frac{1}{5}$
Le *rouble* de Russie.	—	0	74	$\frac{2}{3}$
Le *réal* d'Espagne.	—	4	4	$\frac{5}{6}$.

379. 1° Le tableau du n° 359 donne les valeurs en *francs* des six autres monnaies désignées.

2° Pour obtenir en *livres sterling* les valeurs des six autres monnaies, on opérera comme au numéro précédent (2°). On trouvera que :

		Schillings.	*Pences.*	*Farthings.*
Le *franc*	vaut	0	9	2
La *roupie* des Indes-Britanniques	—	1	10	2

		Schillings.	*Pences.*	*Farthings.*
La *piastre* d'Égypte	vaut	0	2	3
Le *dollar* des États-Unis	—	4	2	3
La *piastre* du Mexique	—	4	3	2

3° Pour exprimer en *roupies* des Indes-Britanniques les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 2,37 ; multiplier le reste, s'il y en a un, par 16, et diviser de nouveau par 2,37 pour obtenir les *annas*. On trouve ainsi que :

Le *franc*	vaut	0 *roupies*,	6 *annas*	$\frac{3}{4}$
La *livre sterling*	—	10	10	$\frac{1}{5}$
La *piastre* d'Égypte.	—	0	2	»
Le *dollar* des États-Unis.	—	2	4	$\frac{1}{10}$
La *piastre* du Mexique.	—	2	4	$\frac{1}{2}$.

4° Pour exprimer en *piastres* d'Égypte les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 0,30; multiplier le reste, s'il y en a un, par 40, et diviser de nouveau par 0,30 pour obtenir les *paras*. On trouve ainsi que :

Le *franc*	vaut	3 *piastres*,	13 *paras*	$\frac{1}{3}$
La *livre sterling*	—	84	1	$\frac{1}{3}$
La *roupie* des Indes-Britanniques	—	7	36	»
Le *dollar* des États-Unis.	—	17	32	»
La *piastre* du Mexique	—	18	1	$\frac{1}{3}$.

5° Pour exprimer en *dollars* des États-Unis les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 5,34; les centièmes exprimeront les *cents*. On trouve ainsi que :

Le *franc*.	vaut	0 *dollars*,	18 *cents*	$\frac{2}{3}$
La *livre sterling*.	—	4	72	$\frac{1}{10}$
La *roupie* des Indes-Britanniques	—	0	44	$\frac{1}{2}$
La *piastre* d'Égypte.	—	0	5	$\frac{2}{3}$
La *piastre* du Mexique.	—	1	1	$\frac{1}{3}$

6° Pour exprimer en *piastres* du Mexique les valeurs des six autres monnaies, il faut les diviser par 5,41; multiplier le reste, s'il y en a un, par 8, et diviser de nouveau par 5,41, pour avoir les *réaux*. On trouve ainsi que :

Le *franc*	vaut	0 *piastres*,	1 *réal*	$\frac{11}{23}$
La *livre sterling*.	—	4	5 *réaux*	$\frac{5}{18}$
La *roupie* des Indes-Britanniques	—	0	3	$\frac{1}{2}$
La *piastre* d'Égypte	—	0	0	$\frac{4}{9}$
Le *dollar* des États-Unis.	—	0	7	$\frac{8}{9}$.

§ 3. Du change direct.

380. I. Il faudrait payer une somme en francs équivalente, savoir :

Pour 361 *livres sterlings* 361 fois 25f,21	ou.....	9100f,81
Pour 18 *schillings* les $\frac{18}{20}$ ou $\frac{9}{10}$ de 25f,21	ou.....	22 ,689
Pour 10 *pences* les $\frac{10}{240}$ ou $\frac{1}{24}$ de 25f,21	ou.....	1 ,050
	Total.....	9124f,549

ou 9124f,55.

II. Ce calcul se fait plus commodément par la méthode des *parties aliquotes*, c'est-à-dire en décomposant le multiplicateur en parties dont chacune soit un sous-multiple simple de la précédente, ou de l'une des précédentes. Dans le cas actuel on aura :

Pour 361 *livres sterlings* 361 fois 25f,21	ou.....	9100f,810
10 *schillings* la moitié de 25f,21	ou.....	12 ,605
5 — la moitié de 12f,605	ou.....	6 ,3025
2 — le cinquième de 12f,605	ou..	2 ,521
1 — la moitié de 2f,521	ou.....	1 ,2605
6 *pences* la moitié de 1f,2605	ou.....	0 ,6302
3 — la moitié de 0f,6302	ou.....	0 ,3151
1 — le tiers de 0f,3151	ou.....	0 ,1050
	Total.....	9124f,5493

ou 9124f,55.

Cette marche, en apparence plus compliquée, est très-rapide quand on y est exercé.

381. Il faudrait payer, en monnaie anglaise, une somme équivalente à 3000 fr. Pour l'obtenir, il faut diviser 3000 fr. par 25f,21; multiplier le reste, s'il y en a un, par 20 et diviser par 25,21 pour avoir les *schillings*, puis multiplier encore le reste, s'il y en a un, par 12 et diviser de nouveau par 25,21 pour avoir les *pences*. En opérant ainsi, on trouve : 119 *livres sterl.*, 0 *schillings*, 0 *pences* ($\frac{1}{10}$ environ).

382. 1° En opérant, comme au n° 380, on aura :

Pour 361 *livres sterlings* 361 fois 25f,24	ou.....	9111f,64
10 *schillings* la moitié de 25f,24	ou.....	12 ,62
5 — la moitié du précédt produit	ou	6 ,31
2 — le cinquième de 12f,62	ou....	2 ,524
1 — la moitié du précédt produit	ou	1 ,262
	A reporter...	9134f,356

	Report. . .	9134f,356
6 *pences*	la moitié du précédent produit ou	0 ,631
3 —	la moitié du précédent produit ou	0 ,3155
1 —	le tiers du précédent produit ou	0 ,1051
	Total.....	9135f,4076

ou 9135f,41.

2° En opérant comme au n° **381**, c'est-à-dire en divisant 3000 fr. par 25f,24, on trouvera

118 *liv. st.* 17 *schill.* 2 *pences*, et une fraction négligeable.

383. A *Amsterdam*, il faudrait payer autant de *florins* que 214 ½ centimes sont contenus de fois dans 2000 francs ou 200000 centimes. On devra donc diviser 200000 par 214 ½ ou 214,5; la partie entière du quotient exprimera des *florins*, les centièmes exprimeront des *cents*. On trouve ainsi 932 *florins* 40 *cents*.

A *Hambourg*, il faudrait payer autant de *marcs banco* que 190 ½ sont contenus de fois dans 200000. On fera donc la division de 200000 par 190,5; la partie entière du quotient exprimera les *marcs banco;* on multipliera le reste, s'il y en a un, par 16 et l'on divisera par 190,5 pour avoir les *schillings;* on multipliera le nouveau reste, s'il en a un, par 12 et l'on divisera de nouveau par 190,5 pour avoir les *pfennigs*. On trouve ainsi 1049 *marcs* 13 *schillings* 10 *pfennigs*.

A *Berlin*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 372,5 centimes; la partie entière de ce quotient exprimera des *thalers*; s'il y a un reste, on le multipliera par 30, et l'on divisera de nouveau par 372,5 pour avoir les *silbergroschen*. On trouve ainsi : 536 *thalers* 19 *silbergroschen* ⅓.

A *Londres*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 2520 centimes; la partie entière du quotient exprimera les *livres sterlings;* s'il y a un reste, on le multipliera par 20 et l'on divisera par 2520 pour avoir les *schillings;* s'il y a encore un reste, on le multipliera par 12 et l'on divisera de nouveau par 2520 pour avoir les *pences*. On trouve ainsi : 79 *livres sterlings* 9 *schillings* 3 *pences* ⅗.

A *Madrid*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 517,5 centimes; la partie entière du quotient exprimera des *piastres;* s'il y a un reste, on le multipliera par 20, et l'on divisera par 517,5 pour avoir les *réaux;* s'il y a encore un reste, on le multipliera par 34 et l'on divisera de nouveau par 517,5 pour avoir les *maravédis*. On trouve ainsi : 386 *piastres* 7 *réaux* et 15 *maravédis*.

A *Cadix*, ou à *Bilbao*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 520 centimes. En opérant comme pour Madrid, on trouvera : 384 *piastres* 12 *réaux* et 10 *maravédis*.

A *Lisbonne*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 542,5 centimes; en poussant jusqu'aux millièmes, on aura les *reis*. On trouve ainsi : 368663 *reis*, ce qu'on écrit habituellement 368 *0* 663 *reis*.

A *Gênes*, le change étant à 99f $\frac{1}{4}$ pour 100 livres, ou 99 $\frac{1}{4}$ centimes pour 1 livre, la somme à payer sera le quotient de 200000 par 99 $\frac{1}{4}$ ou 99,25 ; la partie entière du quotient exprimera les *livres* ou *lires;* les centièmes exprimeront les centimes ou *centesimi*. On trouve ainsi : 2015 *lires* 11 *centesimi*.

A *Livourne*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 85 $\frac{3}{4}$ centimes ou 85,75; la partie entière du quotient exprimera les *lires;* s'il y a un reste, on le multipliera par 20 et l'on divisera par 85,75 pour avoir les *soldi;* s'il y a encore un reste, on le multipliera par 12 et l'on divisera de nouveau par 85,75 pour avoir les *denari*. On trouve ainsi : 2332 *lires* 7 *soldi* et 2 *denari*.

A *Naples*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 461,5 centimes; la partie entière du quotient exprimera les *ducats;* les centièmes exprimeront les *grains*. On trouve ainsi : 433 *ducats* et 36 *grains*, ou, comme 20 *grains* font 1 *tarin*, 433 *ducats* 1 *tarin* et 16 *grains*.

A *Vienne*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 238,5 centimes; la partie entière du quotient exprimera des *florins;* s'il y a un reste, on le multipliera par 60 et l'on divisera par 238,5 pour avoir les *kreutzers;* s'il y a encore un reste, on le multipliera par 4 et l'on divisera de nouveau par 238,5 pour avoir les *pfennigs*. On trouve ainsi : 838 *florins* 9 *kreutzers* 1 *pfennig* $\frac{1}{4}$.

A *Milan*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 85 centimes. En opérant comme pour *Livourne*, on trouvera 2352 *lires* 18 *soldi* 9 *denari* $\frac{15}{17}$, ou à très-peu près, 10 *denari*.

A *Francfort*, la somme à payer sera le quotient de 200000 centimes par 213,5 centimes; la partie entière du quotient exprimera les *florins;* s'il y a un reste, on le multipliera par 60 et l'on divisera par 213,5 pour avoir les *kreutzers;* s'il y a encore un reste, on le multipliera par 4 et l'on divisera de nouveau par 213,5 pour avoir les *pfennigs*. On trouve ainsi : 936 *florins* 46 *kreutzers*, et une fraction négligeable.

384. La lettre de change sur Londres coûterait 500 fois $25^f,20$, c'est-à-dire..... 12600 fr.

La lettre de change sur Hambourg coûterait 1250 fois $1^f,905$ ou..... $2381^f,25$

La lettre de change sur Berlin coûterait 870 fois $3^f,725$ ou..... 3240 ,75

La lettre de change sur Francfort coûterait 2500 fois $2^f,135$ ou..... 5337 ,50

La lettre de change sur Naples coûterait 420 fois $4^f,615$ ou..... $1938^f,30$

La lettre de change sur Madrid coûterait 680 fois $5^f,175$ ou..... 3519 ,00

385. A Vienne, il s'exprimerait par un nombre x de *florins* qui serait le quatrième terme de la proportion

$$238^{fr}\tfrac{1}{2} : 100^{fl} = 300^{fr} : x,$$

d'où $x = 100^{fl}\dfrac{300}{238\frac{1}{2}} = 125$ *florins* 47 *kreutzers*, environ.

A Madrid, il s'exprimerait par un nombre de *francs* triple de celui qui à Paris exprime la valeur de la *piastre*, c'est-à-dire par 3 fois $5^f,175$ ou $15^f,52$ (pour une *pistole* de change).

Pour Francfort, on remarquera que, d'après ce qui a été dit au n° **359**, le *florin* de change est les deux tiers du *thaler de change;* ainsi 100 *florins* équivalent à $\dfrac{200}{3}$ *thalers*. Et puisque ce nombre de *thalers* est coté $213^f,5$ à Paris, le nombre x de *thalers* équivalent à 300 fr. sera donné par la proportion

$$213^f,5 : 300^f = \frac{200\text{ th}}{3} : x,$$

d'où $x = \dfrac{20000\text{ th}}{213,5} = 93$ *thalers*, 40 *kreutzers* $\frac{2}{3}$.

A Berlin, le cours du change pourrait s'exprimer par un nombre x de *thalers* donné par la proportion

$$372^f,5 : 300^f = 100^{th} : x,$$

d'où $x = \dfrac{300.100}{372,5} = 80$ *thalers* 16 *silbergroschen*.

A Milan, il s'exprimerait par un nombre de *centimes* que l'on obtiendra en divisant 100 livres par le cours du change à Paris, ou 85, ce qui donnera 117 centimes $\frac{11}{17}$ ou environ $\frac{2}{3}$.

A Lisbonne, il s'exprimerait par un nombre x de *reis* donné par la proportion

$$5^f,425 : 3^f = 1000^{\text{reis}} : x,$$

d'où $$x = \frac{3000}{5,425} = 553 \textit{ reis} \text{ (à moins d'une unité).}$$

A Amsterdam, il s'exprimerait par un nombre x *de florins* donné par la proportion

$$214^f,5 : 120^f = 100^{fl} : x,$$

d'où $$x = \frac{120.100}{214,5} = 55 \textit{ florins } 94 \textit{ cents.}$$

386. Pour comparer les deux taux, on peut les ramener à exprimer tous deux un nombre de *francs* pour 100 *florins*.

Or, le cours de Vienne signifie qu'on y donne 122 *florins* $\frac{1}{2}$ pour 300 fr.; la valeur de 100 *florins* y est donc exprimée par $\frac{300^f.100}{122,5}$ ou $244^f,90$ environ. D'ailleurs le cours de Paris signifie que la valeur de 100 *florins* y est exprimée par $237^f,50$. La valeur des 100 *florins* est donc plus élevée à Vienne qu'à Paris.

387. Le cours de Paris signifie que 100 *florins* de change y valent $212^f,50$. Le cours de Francfort signifie que 94 *thalers* de change y valent 300 fr. Mais puisque le *thaler* de change vaut $\frac{3}{2}$ *florins* de change, les 94 thalers valent un nombre de *florins* marqué par $\frac{94.3}{2}$; il en résulte que 100 *florins* vaudraient, à Francfort, un nombre x de *francs* donné par la proportion

$$\frac{94.3}{2} \text{ fl. : 100 fl.} = 300 \text{ fr. : } x,$$

d'où $$x = \frac{300.100.2}{94.3} = 212^f,76.$$

Le prix de 100 *florins* est donc plus élevé à Francfort qu'à Paris.

388. Il résulte du cours de Paris que la *piastre* y vaut $5^f,20$; la *piastre* étant le tiers de la *pistole* de change, il résulte du cours de Madrid que la *piastre* y vaut le tiers de $15^f,60$, c'est-à-dire $5^f,20$. Il y a donc réciprocité.

389. Le cours de Paris signifie que 100 *livres* de Milan valent à Paris $85^f,50$. Le cours de Milan signifie que 1 *franc* y vaut

118 centièmes de *livres* ou $1^{liv},18$; on aura donc la valeur x de 100 *livres* en posant la proportion

$$1^{liv},18 : 1^{f} = 100^{liv} : x,$$

d'où $$x = \frac{100}{1,18} = 84^{f},74.$$

Les 100 *livres* ont donc une valeur plus grande à Paris qu'à Milan.

390. Le cours de Paris signifie que 100 *florins* y valent 215 fr. Le cours d'Amsterdam veut dire que 55 *florins* $\frac{1}{2}$ y valent 120 fr.; la valeur x de 100 *florins* sera donc donnée par la proportion

$$55\tfrac{1}{2} : 100 = 120^{f} : x,$$

d'où $$x = \frac{120 . 100}{55\frac{1}{2}} = 216^{f},19.$$

La valeur des 100 *florins* est donc plus grande à Amsterdam qu'à Paris.

391. I. Si l'on achète des lettres de change sur Vienne, on les payera, d'après le cours de Paris, à raison de 238 fr. les 100 *florins*, ce qui fera, pour les 2400 *florins*, 24 fois 238 fr., ou 5712 fr. Si l'on donne ordre au correspondant de Vienne de tirer sur Paris, il négociera ses traites au taux de Vienne, c'est-à-dire à raison de 124 *florins* pour 300 fr., ce qui fait $\frac{300}{124}$ de *francs* par *florin*, ou $\frac{300 \times 2400}{124}$ pour les 2400 florins; en effectuant le calcul, on trouve $5806^{f},45$.

Ainsi, pour pouvoir toucher 2400 florins, le correspondant de Vienne devra tirer sur Paris pour $5806^{f},45$, que le négociant de Paris aura à payer au moment de la présentation des traites.

Il y aurait donc avantage à faire des remises à Vienne; et l'on gagnerait, en adoptant cette méthode, l'excès de $5806^{f},45$ sur 5712 fr., c'est-à-dire $94^{f},45$.

II. On peut arriver à la même conclusion par une voie plus courte. A Paris, 100 *florins* coûtent 238 fr. A Vienne, 100 *florins* valent un nombre x de francs donné par la proportion

$$124^{fl} : 100^{fl} = 300^{f} : x,$$

d'où $$x = \frac{300^{f} \times 100}{124} = 241^{f},935.$$

Les 100 florins sont donc plus chers à Vienne qu'à Paris; il con-

vient donc de les *acheter* à Paris, c'est-à-dire de faire des remises à Vienne; et l'avantage qu'on y trouvera sera le produit de $241^f,935 - 238$ fr., ou $3^f,935$, par 24, c'est-à-dire $94^f,44$.

L'erreur d'un centime qu'on obtient ainsi vient de ce que la valeur de x n'est calculée qu'à moins d'un millième.

392. La *pistole* de change valant à Madrid $16^f,23$, la *piastre* vaut le tiers de cette somme ou $5^f,41$; tandis qu'elle ne vaut à Paris que $5^f,405$. Il y a donc avantage à acheter les 1800 piastres à Paris, c'est-à-dire à faire des remises à Madrid; et l'avantage est le produit de $5^f,41 - 5^f,405$, ou $0^f,005$, par 1800, c'est-à-dire 9 fr.

393. Puisqu'à Naples, 22,83 *ducats* valent 100 fr., 100 *ducats* vaudront un nombre x de *francs* donné par la proportion

$$22,83 : 100 = 100 : x,$$

d'où
$$x = \frac{10000}{22,83} = 438^f,02....$$

L'avantage serait donc du côté des remises; mais cet avantage est très-faible, puisqu'il ne s'élèverait qu'à 15 fois $0^f,02...$, c'est-à-dire à environ $0^f,30$.

394. D'après le cours de Paris, 100 *florins* valent 238 fr. D'après le cours de Vienne, 124 *florins* valent 300 *francs*, et par conséquent 100 florins valent un nombre x de *francs* donné par la proportion

$$124 : 100 = 300 : x,$$

d'où
$$x = \frac{30000}{124} = 241^f,93.$$

Les 100 florins ont donc plus de valeur à Vienne qu'à Paris. On en tirera donc un meilleur parti en les *vendant* à Vienne. Le négociant de Paris devra donc donner ordre à son correspondant de Vienne de lui faire des remises; et l'avantage qu'il y trouvera est exprimé par le produit des nombres $241^f,93 - 238$, ou $3^f,93$, et 35, c'est-à-dire par $137^f,55$.

395. D'après le cours de Paris, 1000 *reis* de change valent $5^f,12$. D'après le cours de Lisbonne, 585 *reis* valent 3 fr.; par conséquent 1000 *reis* valent un nombre x de *francs* donné par la proportion

$$585 : 1000 = 3^f : x,$$

d'où
$$x = \frac{3000}{585} = 5^f,11.$$

Les 1000 *reis* ont donc un peu moins de valeur à Lisbonne qu'à

Paris, et il y aurait avantage à les vendre à Paris, c'est-à-dire à tirer sur Lisbonne. Mais cet avantage est peu considérable; c'est le produit de $0^f,01$ par 380, c'est-à-dire $3^f,80$.

396. D'après le cours de Paris, 100 *florins* valent $211^f,75$ D'après le cours d'Amsterdam, 57 *florins* valent 120 fr.; par conséquent, 100 *florins* valent un nombre x de *francs* donné par la proportion

$$57 : 100 = 120^f : x,$$

d'où
$$x = \frac{12000}{57} = 210^f,52.$$

Les 100 *florins* valent donc moins à Amsterdam qu'à Paris; et par conséquent le négociant de Paris doit vendre ses 6000 *florins* à Paris; et, pour cela, tirer sur Amsterdam. Son avantage, en adoptant cette méthode, est le produit de $211^f,75 - 210^f,52$, ou $1^f,23$, par 60, c'est-à-dire $73^f,80$.

397. Il devra payer d'abord 3 fois $433^f,50$, c'est-à-dire. . . . . $1300^f,50$

L'intérêt étant de 4 pour 100 par an, revient à 1 pour 100 pour 90 jours qui forment le quart de l'année; les intérêts de $1300^f,50$ seront donc le centième de cette somme ou. . . . . $13^f,005$

Ainsi le négociant de Marseille aura à payer en tout $1313^f,505$ ou $1313^f,51$.

398. D'après le cours indiqué, 1 *marc-banco* vaut $1^f,875$ par conséquent 540 *marcs* valent 540 fois $1^f,875$ ou $1012^f,50$

L'intérêt étant à 3 pour 100 par an, revient à 1 pour 100 pour 4 mois; on aura donc l'intérêt pour 1 mois en prenant le centième de $1012^f,50$, et divisant ensuite par 4, ce qui donne. . . . . $2^f,54$

Le négociant de Paris aura donc à payer. . . . . $1015^f,04$

399. D'après le cours indiqué, $54\frac{1}{2}$ *pences* ou $\frac{109}{2}$ *pences* valant 1000 *reis*, 1 *penny* vaut $\frac{1000 \times 2}{109}$ *reis;* 240 *pences* ou 1 *livre sterling* vaut donc $\frac{1000 \times 2 \times 240}{109}$ *reis;* et 460 *livres sterling* valent $\frac{1000 \times 2 \times 240 \times 460}{109}$ *reis;* c'est-à-dire 2025688 *reis*.

L'intérêt étant à $4\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{2}$ pour 100 par an, revient à $\frac{3}{2}$ pour 100 pour 4 mois, ou à $\frac{3}{4}$ pour 100 pour 2 mois.

On obtiendra donc les intérêts cherchés en divisant par 100 le nombre de *reis* ci-dessus, ce qui donne 20256,88 et en prenant les $\frac{3}{4}$ du quotient, ce qui donne 15192,66 ou..... 15193 »

Le négociant de Lisbonne aura donc à payer... 2040881 *reis.* ou 2040 ϑ 881 *reis.*

On peut exprimer cette somme en *cruzades de change* de 400 *reis;* il suffit, pour cela, de diviser par 400, ce qui donne 510 *cruzades*, 88 *reis.*

400. Les 2600 *florins* feraient d'abord 2600 fois 58 *grains*, c'est-à-dire 150800 *grains* ou..... 1508 *ducats.*

L'intérêt étant à 4 p. 100 par an, revient à 1 p. 100 pour 3 mois qui valent 6 fois 15 jours; ou aura donc les intérêts cherchés en prenant le centième de 1508 *ducats*, ce qui donne $15^{duc},08$ et divisant par 6, ce qui donne..... $2^{duc},51$

Ainsi, le correspondant aurait à payer..... $1510^{duc},51$ ou 1510 *ducats* 51 *grains.*

401. D'après le cours indiqué, 1 *thaler* vaut $\frac{150}{104}$ de *florin;* et les 1800 *thalers* valent $\frac{150 \times 1800}{104}$ *florins*, ou $2596^{fl},154$ ou encore..... 2596 *flor.* 9 *kreutz.* 1 *pfenn.*

On obtiendra les intérêts comme au numéro précédent en prenant le centième de cette somme et divisant par 6; en opérant sur le nombre 2596,154, on obtient 4,3269 ou..... 4 » 19 » 2 »

(On convertit la fraction décimale en *kreutzers* en multipliant par 60 et ne prenant que la partie entière; multipliant la nouvelle partie décimale par 4, on obtient les *pfennigs.*)

La traite coûterait donc..... 2600 *flor.* 28 *kreut.* 3 *pfenn.*

402. Elle aura à débourser d'abord 1500 fois 42 *pences*, c'est-à-dire 63000 *pences* ou..... 262 *liv. st.* 10 *schellings.*

Il reste à calculer l'intérêt de cette somme à $4\frac{1}{2}$ p. 100 pour 50 jours. Pour cela, nous calculerons d'abord les intérêts pour 40 jours, qui forment le neuvième de l'année; le neuvième de $4\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{2}$ étant $\frac{1}{2}$, nous prendrons le centième de 63000 *pences* et nous diviserons par 2, ce qui donne 315 *pences* ou..... 1 » 6 » 3 *pences.*

Pour 10 jours, nous aurons ensuite à prendre le quart de ce que nous venons d'écrire, c'est-à-dire..... 0 » 6 » 6 » $\frac{3}{4}$

La traite coûtera donc..... 264 *liv. st.* 2 *sch.* 9 *penc.* $\frac{3}{4}$

403. On aurait d'abord à payer 2500 fois 22,20 *grains*, c'est-à-dire 55500 grains ou ..... 555 *ducats* 0 *grains.*

Il faudrait, en second lieu, tenir compte des intérêts de cette somme pour 70—30 ou 40 jours. L'intérêt pour 30 jours est le tiers de l'intérêt pour 3 mois, c'est-à-dire le tiers de 1 p. 100; on l'obtiendra donc en prenant le centième de 555 ducats, qui est $5^{duc},55$ et divisant par 3, ce qui donne. 1 » 85 »

L'intérêt pour les 10 jours restants est le tiers de celui que nous venons d'écrire, c'est-à-dire..... 0 » 62 »

La traite coûterait donc..... 557 *ducats* 47 *grains.*

404. On aura à payer d'abord 22 fois $187^f,50$, c'est-à-dire..... $4125^f,00$

L'intérêt étant à 3 p. 100 par an, revient à $\frac{1}{4}$ p. 100 pour 1 mois, et par conséquent au tiers de ce taux ou à $\frac{1}{12}$ p. 100 pour les 10 jours qui restent à s'écouler. On obtiendra donc les intérêts cherchés en divisant la somme ci-dessus par 100 et prenant le douzième, ce qui donne..... $3^f,44$

La traite coûterait donc ..... $4128^f,44$

405. D'après le cours indiqué le prix des 100 livres de Livourne est $85^f\frac{1}{8}$ ou $85^f,125$. L'intérêt à 4 p. 100 par an, revient

à 1 p. 100 pour 90 jours; il faut donc aux $85^f,125$ ajouter le centième de cette somme ou $0^f,851...$, ce qui donne $85^f,976...$ ou près de 86.

Tel est le *taux réel* du change résultant de l'addition des intérêts.

406. D'après le cours indiqué, la *livre sterling* vaut $25^f,28$

L'intérêt de $4\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{2}$ p. 100 par an revient à $\frac{3}{2}$ pour 4 mois, et à $\frac{3}{8}$ pour 1 mois. On devra donc ajouter au prix de la *livre sterling*, les $\frac{3}{8}$ p. 100 de ce prix. Pour faire le calcul commodément, on pourra, après avoir divisé le prix par 100, ce qui donne $0^f,2528$, prendre d'abord les $\frac{2}{8}$ ou le quart de ce nombre, ce qui donne $0^f,0632$
puis encore $\frac{1}{8}$ de ce même nombre, ou la moitié de celui que nous venons d'écrire, c'est-à-dire . . . . . $0^f,0316$

La *livre sterling* reviendra donc réellement à . . . . . $25^f,3748$
ou un peu plus de $25^f,37$.

407. D'après le cours indiqué, 100 *marcs banco* valent $188^f,50$; il en résulte que 100 fr. valent un nombre x de *marcs banco* donné par la proportion

$$188^f,50 : 100^f = 100^m : x,$$

d'où

$$x = \frac{100^m. \times 100}{188,50} = 53^m,0908...$$

en exprimant le quotient en décimales du marc.

Le taux de l'intérêt étant 3 p. 100 par an, l'intérêt pour 1 mois est le douzième de 3, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ p. 100; on obtiendra donc l'intérêt cherché en divisant le nombre des marcs trouvé ci-dessus par 100, ce qui donne $0^m,5309...$ et divisant par 4, ce qui donne $0^m,1327$. En ajoutant cet intérêt à la somme principale, on trouve $53^m,2235$. C'est la valeur réelle de 100 fr.

Pour en déduire le nombre y de *francs* valant au même taux 100 *marcs*, on posera la proportion

$$53^m,2235 : 100^m = 100^f : y,$$

d'où

$$y = \frac{100^f \times 100}{53,2235} = 187^f,886...$$

ou environ $187^f,89$. C'est le taux réel du change résultant de l'addition des intérêts.

408. Si le négociant de Paris fait des remises à son correspondant de Vienne, il paiera les 100 florins au prix de $238^f,000$
à quoi il devra ajouter les intérêts à 4 p. 100 pour 15 jours, lesquels s'obtiendront en divisant 238 fr. par 100, et divisant encore le résultat par 6; on trouve. . . $0^f,396$

En somme . . . . . $238^f,396$

S'il donne à son correspondant l'ordre de tirer sur lui, le change avec Paris étant à Vienne au cours de 124, les 100 florins vaudront à Vienne un nombre x de francs donné par la proportion

$$124^{fl} : 100^{fl} = 300^{fr} : x,$$

d'où $$x = \frac{300^f \times 100}{124} = 241^f,935 \ldots\ldots \quad 241^f,935$$

Mais il faut retrancher de cette somme les intérêts à 4 p. 100 pour 1 mois, lesquels s'obtiendront en divisant les $241^f,935$ par 100 et prenant le tiers du résultat; on trouve . . . . . $0^f,806$

Différence . . . . . $241^f,129$

Les 100 florins sont donc moins chers à Paris qu'à Vienne; il convient donc de les *acheter* à Paris, et pour cela, de faire des remises à Vienne. L'avantage est représenté pour chaque 100 florins par la différence entre $241^f,129$ et $238^f,396$, c'est-à-dire par $2^f,733$. Pour 2400 fr. l'avantage sera 24 fois plus grand, c'est-à-dire $65^f,592$ ou $65^f,59$, au lieu de $94^f,45$ que l'on a trouvé au n° **391**.

409. Si le négociant de Paris fait des remises à Madrid, il aura à payer pour chaque 100 piastres . . . . . $540^f,50$
à quoi il faudra ajouter les intérêts à 4 p. 100 pour 1 mois, lesquels s'obtiennent en divisant $540^f,50$ par 100 et prenant le tiers du résultat; on trouve . . . . . $1^f,80$

Total . . . . . $542^f,30$

S'il donne ordre à Madrid de tirer sur Paris, le correspondant paiera les 100 piastres

$$\frac{16^f,23}{3} \times 100 \quad \text{ou} \ldots\ldots\ldots \quad 541^f,06$$

Mais il faut retrancher de cette somme les intérêts à 4 p. 100 pour un mois; en opérant comme ci-dessus, on trouve. . . . . $2^f,70$

Différence . . . . . $539^f,70$

Les 100 piastres coûteront donc moins cher à Madrid qu'à Paris; et il convient de les *acheter* à Madrid; et, pour cela, de donner l'ordre de tirer sur Paris; et l'avantage est représenté, pour chaque 100 piastres, par la différence entre $542^f,30$ et $539^f,70$ ou $2^f,60$. Pour les 1800 piastres l'avantage sera donc 18 fois $2^f,60$ ou $46^f,80$, tandis que l'on a trouvé au n° **392** un avantage de 9 fr. à faire des remises à Madrid.

410. Si l'on fait des remises à Naples, on payera les 100 ducats au prix de..... 438^f,
à quoi il faut ajouter les intérêts à 4 p. 100 pour 15 jours, lesquels s'obtiendront en divisant 438 par 100 et prenant le sixième, soit..... $0^f,73$

Total..... $438^f,73$

Si l'on donne à Naples l'ordre de tirer sur Paris, le correspondant payera les 100 ducats un nombre x de francs donné par la proportion

$$22^d,83 : 100^d = 100^f : x,$$

d'où $$x = \frac{100^f \times 100}{22,85} = 438^f,02 \ldots\ldots \quad 438^f,02$$

Mais il faut retrancher de cette somme les intérêts à 4 p. 100 pour 1 mois, qu'on obtient en divisant $438^f,02$ par 100 et prenant le tiers, soit..... $1^f,46$

Différence..... $436^f,56$

Les 100 ducats sont donc moins chers à Naples qu'à Paris, et il convient de les acheter à Naples, c'est-à-dire de donner à Naples l'ordre de tirer sur Paris. L'avantage est exprimé pour chaque 100 ducats par la différence entre $438^f,02$ et $436^f,56$ c'est-à-dire par $1^f,46$. Pour 1500 ducats l'avantage est 15 fois plus grand, c'est-à-dire $21^f,90$, au lieu de $0^f,30$ que l'on a trouvé au n° **393**.

411. Si le négociant de Paris tire à 3 mois sur son correspondant de Vienne, celui-ci payera, d'après le cours de Paris, à raison de 100 *florins* pour 238 fr.; 300 fr. lui coûteront donc un nombre x de *florins* donné par la proportion

$$238^{fr} : 300^{fr} = 100^{fl} : x,$$

d'où $$x = \frac{100^{fl} \times 300}{238} = 126^{fl},05 \ldots\ldots \quad 126^{fl},050$$

mais il jouira des intérêts à 4 p. 100 pendant 3 mois ce qui fait 1 p. 100 ou..... 1 ,260

Différence..... $124^{fl},790$

Si le négociant de Paris donne ordre à son correspondant de Vienne de lui faire des remises à 3 mois, celui-ci payera d'après le cours de Vienne; 300 fr. lui coûteront donc.... 124 *florins*
mais il devra tenir compte à son correspondant de Paris des intérêts pour 3 mois à 4 p. 100, ce qui revient à 1 p. 100 ou..... 1 ,24

Total..... $125^{fl},24$

Les 300 fr. coûteraient donc plus cher à Vienne qu'à Paris, et il convient qu'il les achète à Paris; pour cela le négociant de Paris devra tirer directement sur son correspondant de Vienne. L'avantage que celui-ci y trouvera sera exprimé, pour chaque somme de 300 fr., par $125^{fl},24 - 124^{fl},79$ ou $0^{fl},45$. Pour 8000 fr. l'avantage sera donc $0^{fl},45 \times \frac{8000}{300}$, c'est-à-dire 12 *florins*.

412. Si le négociant de Paris tire à 2 mois sur son correspondant, celui-ci payera d'après le cours de Paris, à raison de $5^f,12$ les 1000 *reis* de change; 3 *francs* lui coûteront donc un nombre x de *reis* donné par la proportion

$$5^f,12 : 3^f = 1000 \textit{ reis} : x,$$

d'où $= \frac{1000 \times 3}{5,12} = 585,9$ *reis*..... 585,9 *reis*

mais il jouira des intérêts à 4 p. 100 pendant 2 mois; l'intérêt pour 3 mois étant 1 p. 100 ou le centième de 585,9, l'intérêt pour 1 mois en est le tiers ou 1,953, l'intérêt pour 2 mois est le double de ce dernier nombre, ou..... 3,9 *reis*

Différence..... 582 *reis*

Si le correspondant de Lisbonne doit au contraire faire des remises à Paris, il payera les 3 fr. au prix de 585 *reis*. 585 *reis*
à quoi il devra ajouter les intérêts à 4 p. 100 pour 1 mois, c'est-à-dire le tiers de 5,85 ou..... 1,9

Total..... 586,9 *reis*

Les 3 fr. étant plus chers à Lisbonne qu'à Paris, le négociant de Paris devra tirer sur son correspondant de Lisbonne. Pour chaque somme de 3 fr. le correspondant y trouvera un avantage de 4,9 *reis*; et pour 1800 fr. l'avantage sera de 600 fois 4,9 *reis* ou 2940 *reis*.

413. Si le négociant de Paris tire à 30 jours sur son correspondant d'Amsterdam, celui-ci payera d'après le cours de Paris, à raison de 100 *florins* pour $211^f,75$; par conséquent les 120 fr. lui coûteront un nombre x de florins, donné par la proportion

$$211^f,75 : 120^f = 100^{fl} : x,$$

d'où $$x = \frac{100^{fl} \times 120}{211,75} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56^{fl},66$$

d'où il faut retrancher les intérêts à 3 p. 100 pour 1 mois, ou le quart de $0^{fl},56$. . . . . $0^{fl},14$

Différence. . . . . $56^{fl},52$

Si le négociant de Paris donne à son correspondant l'ordre de lui faire des remises, celui-ci payera 120 fr. . . . . 55 *florins* auxquels il faut ajouter les intérêts à 3 p. 100 pour 1 mois, ou le quart de $0^{fl},55$. . . . . 0,14 environ

Total. . . . . $55^{fl},14$

Les 120 fr. sont donc plus chers à Paris qu'à Vienne, et il convient de les acheter à Vienne; pour cela, le négociant de Paris doit donner ordre à son correspondant de lui faire des remises. Celui-ci y trouvera, pour chaque somme de 120 fr., un avantage marqué par la différence entre $56^{fl},52$ et $55^{fl},14$, c'est-à-dire $1^{fl},38$; pour 6000 *francs*, qui valent 50 fois 120 fr., l'avantage sera donc 50 fois $1^{fl},38$ c'est-à-dire 69 *florins*.

414. L'intérêt du négociant de Paris est d'acheter les *marcs banco* le moins cher possible. S'il fait des remises à Hambourg, il payera les 100 *marcs banco* au cours de Paris, c'est-à-dire. . . . . 186^f
à quoi il faudra ajouter les intérêts à 3 p. 100 pour 3 mois; on pourra les calculer de la manière suivante :

Intérêts pour 4 mois, ou le centième de 186^f, soit	$1^f,86$	
— 2 mois, moitié du précédent nombre ou.	$0^f,93$	
— 1 mois, moitié du précédent nombre ou.	0,46	
— 3 mois, somme des deux derniers ou	$1^f,39$	$1^f,39$
Total.		$187^f,39$

Si le négociant de Paris donne ordre à son correspondant de

tirer sur lui, il payera les 100 *marcs banco* au cours de Hambourg, c'est-à-dire..... 187^f,
mais il bénéficiera des intérêts à 4 p. 100 pendant 1 mois, c'est-à-dire du tiers de $1^f,87$ ou..... $0^f,62$

Différence..... $186^f,38$

Les 100 *marcs banco* seront donc moins chers à Hambourg qu'à Paris, et il convient de les acheter à Hambourg; pour cela le négociant de Paris doit donner ordre à son correspondant de tirer sur Paris. Le correspondant y gagnera $187^f,39 - 186^f,38$ ou $1^f,01$ pour chaque somme de 100 *marcs*, et par conséquent $1^f,01 \times 18$ ou $18^f,18$ pour les 1800 *marcs*.

On pourrait convertir cette somme en *marcs banco;* on trouverait, au cours de Hambourg,

$\frac{100^m \times 18,18}{187}$, ou 9 *marcs* et un peu moins de 12 *schellings*.

415. I. Le négociant d'Amsterdam doit faire en sorte que son correspondant de Londres paye les *florins* le moins cher possible. S'il tire sur Londres à 30 jours, le correspondant payera d'après le cours d'Amsterdam, c'est-à-dire à raison de 11 *florins* pour 1 *livre sterling;* pour 100 *florins* il payera donc un nombre x de *livres sterlings* donné par la proportion

$$11^{fl} : 100^{fl} = 1^{liv\,st} : x, \quad \text{d'où } x = \frac{100^{liv\,st}}{11} = 9^{liv\,st},090,$$

mais il bénéficiera des intérêts à $4\frac{1}{2}$ pour 100 pendant un mois; soit $\frac{3}{8}$ pour cent, que l'on pourra calculer comme il suit :

1 pour 100	ou le centième de $9^{liv\,st},09$.....	$0^{liv\,st},0909$		
$\frac{2}{8}$ —	ou le quart du précédent.....	0 ,0227		
$\frac{1}{8}$ —	ou la moitié du précédent	0 ,0113		
$\frac{3}{8}$ —	ou la somme des deux précédents	0 ,034	0 ,034	
	Différence ...		$9^{liv\,st},056$	

Si le négociant d'Amsterdam donne à son correspondant de Londres l'ordre de lui faire des remises, celui-ci payera d'après le cours de Londres, c'est-à-dire que le prix des 100 *florins* sera un nombre x de *livres sterlings* donné par la proportion

$$10^{fl},50 : 100^{fl} = 1^{liv\,st} : x,$$

d'où $$x = \frac{100^{liv\,st}}{10,50} = 9^{liv\,st},523 \ldots\ldots \quad 9^{liv\,st},5238$$

A reporter... $9^{liv\,st},5238$

	Report. . .	$9^{\text{liv st}},5238$

et il devra y ajouter les intérêts pour 3 mois à 3 pour 100, que l'on peut calculer comme il suit :

Intérêts pour 4 mois ou 1 p. 100 soit . . .	$0^{\text{liv st}},095238$	
— 2 mois, moitié du précédent	0 ,04762	
— 1 mois, —	0 ,02381	
— 3 mois, somme des deux précédents . . .	$0^{\text{liv st}},07143$	$0^{\text{liv st}},0714$
	Total. . .	$9^{\text{liv st}},5952$

Les 100 *florins* seront donc plus chers à Londres qu'à Amsterdam ; le négociant d'Amsterdam doit par conséquent tirer sur Londres. Son correspondant y gagnera, pour chaque somme de 100 *florins*,

$$9^{\text{liv st}},5952 - 9^{\text{liv st}},056 \quad \text{ou} \quad 0^{\text{liv st}},539;$$

pour 12000 *florins*, somme 120 fois plus grande, l'avantage sera donc :

$0^{\text{liv st}},539 \times 120$, c'est-à-dire 64 *livres st.* 13 *schillings* 7 *pences*

II. La comparaison pourrait être faite d'une autre manière, moins directe, mais plus commode. Au lieu de dire que le négociant d'Amsterdam doit faire en sorte que son correspondant paye les *florins* le moins cher possible, on peut dire qu'il vende la *livre sterling* le plus cher possible.

Or, dans le cas où Amsterdam tire sur Londres, la *livre sterling* est vendue au prix d'Amsterdam, c'est-à-dire. . . 11 *florins*

d'où il faut déduire $\frac{3}{8}$ p. 100 ou.	$0^{\text{fl}},041$
Différence . . .	$10^{\text{fl}},959$

Dans le cas où Londres fait des remises à Amsterdam, *la livre sterling* est vendue au cours de Londres, c'est-à-dire . . $10^{\text{fl}},500$

à quoi il faut ajouter $\frac{1}{4}$ p. 100, ou	0 ,026
Total . . .	$10^{\text{fl}},526$

La *livre sterling* coûtera donc davantage à Amsterdam qu'à Londres ; par conséquent Amsterdam doit tirer sur Londres ; même conclusion que par l'autre méthode.

§ 4. Des arbitrages, des ordres de banque et des spéculations sur les changes.

416. Si le banquier de Paris faisait des remises directes à Hambourg, il payerait le *marc banco* $1^{\text{f}},90$.

Soit x le prix du *marc banco* par la voie indirecte; on aura les égalités suivantes :

$$x \textit{ francs} = 1 \textit{ marc banco},$$

$$13{,}90 \textit{ marcs banco} = 1 \textit{ livre sterling},$$

$$1 \textit{ livre sterling} = 25^{f},21.$$

Si l'on multiplie ces trois égalités membre à membre, on obtient

$$x \times 13{,}90 \times 1 = 1 \times 1 \times 25^{f},21,$$

en regardant comme abstraits tous les facteurs autres que des francs, ce qui est permis, attendu qu'à chaque facteur du premier membre correspond un facteur de même espèce dans le second, et que par conséquent la relation est *homogène* et indépendante de la nature des unités.

On tire de cette relation

$$x = \frac{1 \times 1 \times 25^{f},21}{13{,}90 \times 1} = \frac{25^{f},21}{13{,}90} = 1^{f},81366....$$

Le banquier gagnera donc, en suivant la voie indirecte, $1^{f},90 - 1^{f},81366...$, ou $0^{f},08633....$ par *marc*, ce qui fait pour les 1500 *marcs*, 1500 fois $0^{f},08633...$, c'est-à-dire $129^{f},495...$ ou $129^{f},50$.

On voit, comme l'indique l'énoncé, que la seule attention à avoir en posant les égalités qui servent à résoudre ce genre de question, consiste à faire en sorte que l'espèce d'*unités* qui a figuré au second membre de la première, figure au premier membre de la seconde, et que l'espèce d'unités qui a figuré au second membre de la seconde, figure au premier membre de la troisième.

L'inconnue écrite au premier membre de la première égalité exprimant un nombre de *francs*, le second membre de la dernière exprime aussi un nombre de *francs*, comme cela devait être.

417. Par la voie directe, le prix du *marc banco* serait encore $1^{f},90$.

Soit x le prix du *marc banco* par la voie indirecte, on aura comme ci-dessus :

$$x \textit{ francs} = 1 \textit{ marc banco},$$

$$13{,}90 \textit{ marcs banco} = 1 \textit{ livre sterling},$$

$$1 \textit{ livre sterling} = 25^{f},45;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 13{,}90 \times 1 = 1 \times 1 \times 25^{f},45,$$

et, par suite, $$x = \frac{25^{f},45}{13{,}90} = 1^{f},8309....$$

Le banquier gagnerait donc encore, à suivre la voie indirecte, $1^{f},90 - 1^{f},8309$ ou $0^{f},0691$ par *marc*, soit $0^{f},0691 \times 1500$ ou $103^{f},65$ pour les 1500 *marcs*.

418. Par la voie directe, le prix du *marc banco* serait $1^{f},90$.

Soit x le prix du *marc banco* par la voie indirecte; on aura

$$x \textit{ francs} = 1 \textit{ marc banco},$$

$$40 \textit{ marcs banco} = 34 \textit{ florins},$$

$$100 \textit{ florins} = 214 \textit{ francs};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 40 \times 100 = 1 \times 34 \times 214 \text{ fr.}$$

et $$x = \frac{214^{f} \times 34}{40 \times 100} = 1^{f},819.$$

Les *marcs banco* sont donc moins chers par la voie indirecte que par la voie directe; ainsi le banquier de Paris doit faire des remises à son correspondant d'Amsterdam, et donner l'ordre à celui-ci de faire lui-même des remises à Hambourg. L'avantage qu'il y trouve sera, pour chaque *marc banco*, $1^{f},90 - 1^{f},819$ ou $0^{f},081$; et par conséquent pour les 1500 *marcs* son bénéfice sera $0^{f},081 \times 1500$, c'est-à-dire $121^{f},50$.

419. Il faudrait, dans les calculs du numéro précédent, remplacer partout 214 par 230; on trouverait ainsi

$$x = \frac{230^{f}, \times 34}{40 \times 100} = 1^{f},955.$$

Dans le cas actuel les *marcs banco* coûteraient donc plus cher par la voie indirecte que par la voie directe, et le banquier de Paris devrait faire des remises directes à Hambourg. Il y gagnerait $0^{f},055 \times 1500$, c'est-à-dire $82^{f},50$.

420. Par la voie directe, le négociant de Marseille payera l'écu romain $5^{f},10$.

Soit x le prix de l'écu romain par la voie indirecte; on aura

$$x \textit{ francs} = 1 \textit{ écu romain},$$

$$100 \textit{ écus romains} = 123{,}75 \textit{ ducats},$$

$$1 \textit{ ducat} = 4^{f},20;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 100 \times 1 = 1 \times 123{,}75 \times 4^{f}{,}20,$$

et $$x = \frac{4^{f}{,}20 \times 123{,}75}{100} = 5^{f}{,}1975.$$

L'écu romain serait donc plus cher par la voie indirecte; ainsi le négociant de Marseille devra faire des remises directes à Rome. Il y gagnera $0^{f}{,}0975 \times 2400$, c'est-à-dire 39 fr.

421. Il faudrait, dans les calculs du numéro précédent, remplacer partout 123,75 par 121, ce qui donnerait

$$x = \frac{4^{f}{,}20 \times 121}{100} = 5^{f}{,}082.$$

Dans ce cas, l'écu romain serait moins cher par la voie indirecte que par la voie directe; le négociant de Marseille devrait donc faire des remises à Naples, et donner ordre à Naples de faire des remises à Rome. Son bénéfice en suivant cette voie serait le produit de $5^{f}{,}10 - 5^{f}{,}082$, ou $0^{f}{,}018$, par 2400, c'est-à-dire $43^{f}{,}20$.

422. La somme à payer au banquier de Londres se trouve augmentée, par l'addition de la commission, dans le rapport de 100 à $100 + \frac{1}{2}$; c'est-à-dire que cette somme se trouve multipliée par $\frac{100 + \frac{1}{2}}{100}$ ou par $1 + \frac{\frac{1}{2}}{100}$. Dans le calcul de l'arbitrage le prix de la livre sterling, $25^{f}{,}45$, devra donc être remplacé par $25^{f}{,}45 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{100}\right)$; et par conséquent, on trouvera pour l'inconnue la valeur

$$x = \frac{25^{f}{,}45}{13{,}90} \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{100}\right),$$

c'est-à-dire que, pour obtenir cette nouvelle valeur, il suffit de multiplier celle qui a été trouvée au n° **417** par $1 + \frac{\frac{1}{2}}{100}$, ce qui revient à *faire d'abord le calcul comme s'il n'y avait pas de commission, et à ajouter ensuite* $\frac{1}{2}$ *p.* 100 *au résultat.*

En effectuant le calcul on trouvera :

Ancienne valeur de x.	$1^{f}{,}8309$...
$\frac{1}{2}$ p. 100 de cette valeur	0 ,0091...
Valeur nouvelle. . .	$1^{f}{,}84$.

On voit que *lorsque*, comme dans l'exemple actuel, *la place*

débitrice (Paris) *donne l'incertain* ($25^f,45$ plus ou moins) *à la place intermédiaire* (Londres), *la commission doit être ajoutée à la valeur de l'inconnue.*

Le nombre $1^f,84$ étant inférieur à $1^f,90$, il y a encore avantage à se servir de la voie indirecte, et l'on y trouvera un bénéfice de $0^f,06 \times 1500$ ou 90 fr.

423. I. On pourrait traiter la question comme au numéro précédent. Faisons d'abord le calcul comme s'il n'y avait pas de commission à payer.

Par la voie directe, le banquier de Londres aura à payer, pour 100 *marcs banco* un nombre de *livres sterlings* marqué par $\frac{100}{12,9}$ ou $7^{\text{liv st}},7519$.

Soit x le nombre de *livres sterlings* qu'il aura à payer par la voie indirecte, on aura successivement

$$x \textit{ livres sterlings} = 100 \textit{ marcs banco},$$

$$100 \textit{ marcs banco} = 187 \textit{ francs},$$

$$25,30 \textit{ francs} = 1 \textit{ livre sterling},$$

d'ou, en multipliant membre à membre,

$$x \times 100 \times 25,30 = 100 \times 187 \times 1 \textit{ liv. st.},$$

et par conséquent

$$x = \frac{187}{25,30} = 7^{\text{liv st}},3913.$$

Pour tenir compte de la commission, on remarquera qu'elle a pour effet d'augmenter dans le rapport de 100 à $100 + \frac{1}{2}$, pour le banquier de Londres, le prix des $25^f,30$; et qu'au lieu de 1 *livre sterling*, il faut mettre partout 1 *liv. sterl.* $\times \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{100}\right)$. On trouvera donc

$$x = \frac{187}{25,30}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{100}\right),$$

ce qui donnera :

Ancienne valeur de x.....	$7^{\text{liv st}},3913$
$\frac{1}{2}$ p. 100 de cette valeur.....	0 ,0369
Total.....	$7^{\text{liv st}},4282$

On voit qu'il y a avantage à suivre la voie indirecte.

II. Mais la comparaison peut s'établir d'une manière plus com-

mode, qui est usitée dans les maisons de banque, et qui consiste à prendre pour base le *certain*.

Par la voie directe, le banquier de Londres aura 12,90 *marcs banco* pour 1 *livre sterling*.

Soit x le nombre de *marcs banco* qu'il aura pour ce même prix d'une *livre sterling* en suivant la voie indirecte. On aura

$$x \text{ marcs banco} = 1 \text{ livre sterling},$$

$$1 \text{ livre sterling} = 25{,}30 \text{ francs},$$

$$187 \text{ francs} = 100 \text{ marcs banco},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 1 \times 187 = 1 \times 25{,}30 \times 100 \text{ marcs } b.$$

et par conséquent

$$x = \frac{2530}{187} = 13{,}5293.$$

Il s'agit de tenir compte de la commission; pour cela on remarquera qu'elle a pour effet de diminuer dans le rapport de $100\frac{1}{2}$ à 100 le nombre de francs que le banquier peut obtenir pour 1 *livre sterling;* ce nombre de francs doit donc être multiplié par $\frac{100}{100+\frac{1}{2}}$; ainsi le nombre 25,30 doit être remplacé par $\frac{25{,}30 \times 100}{100+\frac{1}{2}}$; et par conséquent la valeur de x devient

$$x = \frac{2530}{187} \cdot \frac{100}{100+\frac{1}{2}}.$$

Mais on peut obtenir un résultat plus simple, en remarquant que l'on a

$$(100+\tfrac{1}{2})(100-\tfrac{1}{2}) = 100.100 - \tfrac{1}{4},$$

d'où l'on tire, en négligeant $\frac{1}{4}$ vis-à-vis de 10000,

$$\frac{100}{100+\frac{1}{2}} = \frac{100-\frac{1}{2}}{100} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{100}.$$

Par conséquent, la valeur de x devient

$$x = \frac{2530}{187}\left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{100}\right),$$

c'est-à-dire, qu'après avoir calculé la valeur de x sans tenir

compte du résultat, il faut retrancher $\frac{1}{2}$ p. 100 de ce résultat; on trouve ainsi :

Valeur ancienne de x.....	13,5293
$\frac{1}{2}$ p. 100 de cette valeur.....	0,0676
Différence.....	13,4617 *marcs b.*

On voit que *lorsque*, comme dans le cas actuel, *la place débitrice* (Londres) *donne le certain* (1 liv. sterl.) *à la place intermédiaire* (Paris), *la commission doit être retranchée de la valeur de l'inconnue.*

Le nombre 13,4617 étant supérieur à 12,90, on obtiendra, pour 1 *livre sterling*, plus de *marcs banco* par la voie indirecte que par la voie directe ; il y a donc avantage à suivre la voie indirecte.

III. Quant au bénéfice résultant du choix de la voie indirecte, on l'appréciera aisément par la première méthode. Il sera, pour 100 *marcs banco*, égal à la différence entre $7^{\text{liv st}},7519$ et $7^{\text{liv st}},4282$, c'est-à-dire à $0^{\text{liv st}},3237$. Pour 1500 *marcs banco* le bénéfice sera donc $0^{\text{liv st}},3237 \times 15$, ou $4^{\text{liv st}},8555$ ou 4 *liv. st.* 17 *sch.* 1 *penny* 1 *farthing*.

Le bénéfice total peut également s'apprécier par la seconde méthode; mais le plus simple est alors de convertir les 1500 *marcs banco* en *livres sterlings*, en adoptant successivement les deux cours de 12,90 *marcs banco* et de 13,4617 *marcs banco* pour 1 *livre sterling*, et de faire la différence des deux résultats.

Au cours de 12,90 *marcs banco* pour 1 *livre sterling*, les 1500 *marcs banco* valent $\frac{1500}{12,90}$ ou $116^{\text{liv st}},2790$.

Au cours de 13,4617 *marcs b.* pour 1 *liv. sterl.*, les 1500 *marcs b.* valent $\frac{1500}{13,4617}$ ou $111^{\text{liv st}},4272$.

La différence entre ces deux résultats, ou $4^{\text{liv st}},8518$, exprime le bénéfice demandé. On peut réduire la fraction décimale en *schillings* et *pences;* pour cela on multiplie cette fraction par 20, la partie entière du produit exprime les *schillings;* on multiplie la nouvelle fraction décimale par 12; la partie entière du nouveau produit exprime les *pences*. On trouve ainsi 4 *livres sterlings* 17 *schillings* 0 *pences* et environ 2 *farthings*.

La légère différence qu'on observe entre ce résultat et celui qu'on a obtenu plus haut, tient à ce que les divisions ne peuvent être effectuées qu'à une certaine approximation. Dans la pratique on pousse rarement les opérations au delà des millièmes; ce qu'on néglige ainsi est toujours de peu d'importance pour les résultats qu'on a en vue.

424. Considérons d'abord les deux voies directes.

1° Si Paul fait des remises à Berlin, il payera les 100 thalers d'après le cours de Paris, c'est-à-dire $372^f,25$.

2° Si Paul donne ordre à Berlin de tirer sur lui, il payera les 100 thalers, d'après le cours de Berlin, un nombre x de francs donné par la proportion

$$80,8 \textit{ thalers} : 100 \textit{ thalers} = 300 \textit{ francs} : x,$$

d'où
$$x = \frac{300^f \times 100}{80,8} \quad \text{ou} \quad 371^f,28.$$

I. Comparons maintenant les quatre voies indirectes :

1° Paul fait des remises à Hambourg ; il paye donc les 100 *marcs b.* d'après le cours de Paris, c'est-à-dire $187^f,50$. Gaspard, de Hambourg, fait des remises à Berlin ; il paye donc les *thalers*, d'après le cours de Hambourg, à raison de 153 *thalers* pour 300 *marcs b.* En appelant x la valeur de 100 *thalers* en *francs*, on aura donc

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ thalers},$$
$$153 \textit{ thalers} = 300 \textit{ marcs banco},$$
$$100 \textit{ marcs banco} = 187^f,50,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 153 \times 100 = 100 \times 300 \times 187^f,50,$$

et par conséquent

$$x = \frac{187^f,50 \times 300}{153} \quad \text{ou} \quad 367^f,64.$$

2° Paul fait des remises à Hambourg ; il paye les 100 *marcs b.* d'après le cours de Paris, c'est-à-dire $187^f,50$. Il donne ordre à Berlin de tirer sur Hambourg ; il paye donc les *thalers* d'après le cours de Berlin, à raison de 152,50 *thalers* pour 300 *marcs b.* En désignant toujours par x la valeur de 100 *thalers* en francs, on aura donc

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ thalers},$$
$$152,50 \textit{ thalers} = 300 \textit{ marcs b.},$$
$$100 \textit{ marcs b.} = 187^f,50,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 152,50 \times 100 = 100 \times 300 \times 187^f,50,$$

et par suite

$$x = \frac{187^f,50 \times 300}{152,50} \quad \text{ou} \quad 368^f,85.$$

3° Paul donne ordre à Hambourg de faire des remises à Ber-

lin; Gaspard, de Hambourg, paye les *thalers* d'après le cours de Hambourg, à raison de 153 *thalers* pour 300 *marcs b.* Le même Gaspard tire sur Paris, et fait payer à Paul les *marcs b.* d'après le cours de Hambourg, à raison de $187^f,75$ les 100 *marcs.* On a donc

$$x \text{ francs} = 100 \text{ thalers},$$
$$153 \text{ thalers} = 300 \text{ marcs } b.,$$
$$100 \text{ mars } b. = 187^f,75,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 153 \times 100 = 100 \times 300 \times 187^f,75,$$

et par suite

$$x = \frac{187^f,75 \times 300}{153} \quad \text{ou} \quad 368^f,13.$$

4° Gaspard, de Hambourg, tire sur Paris, et fait payer à Paul les *marcs b.* d'après le cours de Hambourg, à raison de $187^f,75$ pour 100 *marcs b.* Max, de Berlin, tire sur Hambourg, et fait payer les *thalers* d'après le cours de Berlin, à raison de 152,50 *thalers* pour 300 *marcs b.* On a donc

$$x \text{ francs} = 100 \text{ thalers},$$
$$152{,}50 \text{ thalers} = 300 \text{ marcs } b.,$$
$$100 \text{ marcs } b. = 187^f,75,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 152{,}50 \times 100 = 100 \times 300 \times 187^f,75,$$

et par suite

$$x = \frac{187^f,75 \times 300}{152{,}50} \quad \text{ou} \quad 369^f,34.$$

En résumé, la voie la plus avantageuse est la voie indirecte qui consiste à faire des remises à Hambourg, en donnant ordre à Hambourg de faire des remises à Berlin. Si l'on compare cette voie à la plus avantageuse des voies directes, qui consisterait à donner ordre à Berlin de tirer sur Paris, on voit qu'il vaut mieux prendre la voie indirecte; et le bénéfice résultant de ce choix sera le produit de $371^f,28 - 367^f,64$ ou $3^f,64$ par 40, c'est-à-dire $145^f,60$.

II. On peut comparer d'une manière plus simple les quatre voies indirectes. Il n'y a qu'à chercher le plus avantageux des deux changes entre Paris et Hambourg, et le plus avantageux des deux changes entre Hambourg et Berlin.

Entre Paris et Hambourg, le change le plus avantageux est celui de Paris, qui met les 100 *marcs b.* à $187^{f},50$.

Entre Hambourg et Berlin, le change le plus avantageux est celui de Hambourg, qui donne 153 *thalers* pour 100 *marcs banco.*

La meilleure voie à suivre entre Paris et Hambourg est donc que Paris fasse des remises à Hambourg; et la meilleure voie à suivre entre Hambourg et Berlin est, de même, que Hambourg fasse des remises à Berlin. C'est, en effet, la première des quatre voies indirectes essayées ci-dessus, et celle qui fait payer les 100 *thalers* le moins cher.

Il resterait donc à comparer cette voie indirecte avec la plus avantageuse des voies directes, ce qui conduirait au résultat déjà obtenu plus haut.

425. Comparons d'abord les deux voies directes. Puisque 2 *roubles* argent valent 7 *roubles* papier, connaissant le prix des 100 *roubles* papier, on en déduira le prix des 100 roubles argent en divisant 114 fr. par 2 et multipliant le quotient par 7, ce qui donne 399 fr. Il en résulte que les 100 *roubles* argent sont moins chers à Paris qu'à Saint-Pétersbourg; il convient donc de les acheter à Paris, et pour cela de faire des remises à Saint-Pétersbourg.

Comparons en second lieu les quatre voies indirectes; pour cela employons tout de suite la seconde méthode indiquée au numéro précédent. Cherchons quel est, entre Paris et Amsterdam, le cours le plus avantageux. A Paris les 100 *florins* valent $213^{f},90$. A Amsterdam on les payerait un nombre x de *francs* donné par la proportion :

$$56 \textit{ florins} : 100 \textit{ florins} = 120 \textit{ francs} : x,$$

d'où
$$x = \frac{120^{f} \times 100}{56} \quad \text{ou} \quad 214^{f},28.$$

Le cours de Paris est donc le plus avantageux, et par conséquent il conviendra que Paris fasse des remises à Amsterdam.

Cherchons de même quel est entre Amsterdam et Saint-Pétersbourg le cours le plus avantageux. A Amsterdam les 100 *roubles* papier valent un nombre x de *florins* donné par la proportion

$$20 \textit{ roubles} : 100 \textit{ roubles} = 10\tfrac{1}{2} \textit{ florins} : x,$$

d'où
$$x = \frac{10^{fl},5 \times 100}{20} \quad \text{ou} \quad 52,5 \textit{ florins}.$$

A Saint-Pétersbourg, les 100 *roubles* papier valent un nombre y de *florins* donné par la proportion

$$198 \textit{ roubles} : 100 \textit{ roubles} = 100 \textit{ florins} : y,$$

d'où $$y = \frac{100^{fl} \times 100}{198} \quad \text{ou} \quad 50{,}5 \textit{ florins}.$$

Les 100 *roubles* sont donc moins chers à Saint-Pétersbourg qu'à Amsterdam, et il conviendra que Saint-Pétersbourg tire sur Amsterdam.

Soit maintenant z la valeur en *francs* des 100 *roubles* papier par cette voie indirecte ; on aura

$$z \textit{ francs} = 100 \textit{ roubles} \text{ papier},$$

$$198 \textit{ roubles} \text{ papier} = 100 \textit{ florins},$$

$$100 \textit{ florins} = 213^f{,}90,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$z \times 198 \times 100 = 100 \times 100 \times 213^f{,}90$$

et par suite $$z = \frac{213^f{,}90 \times 100}{198} \quad \text{ou} \quad 108^f{,}30.$$

Pour en déduire le prix des 100 *roubles* argent, on n'aura qu'à multiplier par 7 et diviser par 2, ce qui donne. . . . . $378^f{,}10$

Tel est le prix des 100 *roubles* argent, quand on ne tient pas compte de la commission; pour en tenir compte, on prendra d'abord le centième de $378^f{,}10$ ce qui donne. . . . . $3^f{,}7810$

puis la moitié de ce centième ou. . . . . $1^f{,}8905$

puis encore la moitié de cette moitié ou. . . . $0^f{,}9452$

et l'on ajoutera les deux derniers résultats. . . $2^f{,}8357$ ou $2^f{,}84$

Le prix des 100 *roubles* argent, avec la commission, est donc. . . . . $379^f{,}94$

C'est donc la voie indirecte qui est la plus avantageuse, et en l'adoptant on fera, pour chaque somme de 100 roubles, un bénéfice égal à $399^f - 379^f{,}94$ ou $19^f{,}06$; pour les 2800 *roubles* le bénéfice sera donc $19^f{,}06 \times 28$, ou $533^f{,}68$.

Remarque. Au lieu de calculer d'abord la valeur des 100 *roubles* papier, pour en déduire celle des 100 *roubles* argent, on aurait

pu obtenir celle-ci directement en introduisant dans le calcul une égalité de plus. On aurait pu poser, en effet,

$$z \textit{ francs} = 100 \textit{ roubles} \text{ argent},$$

$$2 \textit{ roubles} \text{ argent} = 7 \textit{ roubles} \text{ papier},$$

$$198 \textit{ roubles} \text{ papier} = 100 \textit{ florins},$$

$$100 \textit{ florins} = 213^{f},90,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$z \times 2 \times 198 \times 100 = 100 \times 7 \times 100 \times 213^{f},90$$

et par suite $z = \dfrac{213^{f},90 \times 100 \times 7}{2 \times 198}$ ou $378^{f},10$.

Le reste s'achèverait comme ci-dessus.

426. Comparons d'abord les deux voies directes. A Amsterdam les 100 *florins* valent un nombre x de *francs* donné par la proportion

$$56 \textit{ florins} : 100 \textit{ florins} = 120^{f} : x,$$

d'où $$x = \frac{120^{f} \times 10}{56} \quad \text{ou} \quad 214^{f},28.$$

Le cours de Marseille est donc plus avantageux, et il conviendrait de faire des remises à Amsterdam.

Comparons ensuite les quatre voies indirectes. A Naples, le prix d'un *ducat* sera un nombre y de *francs* donné par la proportion

$$23 \textit{ grains} : 100 \textit{ grains} = 1^{f} : y,$$

d'où $$y = \frac{100^{f}}{23} \quad \text{ou} \quad 4^{f},35.$$

Entre Marseille et Naples, le cours le plus avantageux est donc celui de Marseille, et il conviendra que Marseille fasse des remises à Naples.

A Naples, les 40 *ducats* valent un nombre z de *florins* donné par la proportion

$$0^{d},474 : 40^{d} = 1^{fl} : z,$$

d'où $$z = \frac{40^{fl}}{0,474} \quad \text{ou} \quad 84^{fl},4.$$

Entre Naples et Amsterdam, le cours le plus avantageux est donc celui de Naples, puisque pour un même nombre de *ducats*

il donne un plus grand nombre de *florins;* il conviendra donc que Naples fasse des remises à Amsterdam.

Soit u la valeur des 100 *florins* en *francs* par cette voie, on aura

$$u \text{ francs} = 100 \text{ florins},$$

$$1 \text{ florin} = 0{,}474 \text{ ducats},$$

$$1 \text{ ducat} = 4^{f},30,$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$u \times 1 \times 1 = 100 \times 0{,}474 \times 4^{f},30$$

et $u = 4^{f},30 \times 47{,}4$ ou..... $203^{f},82$

à quoi il faut ajouter pour frais de commission la moitié de $2^{f},04$ ou..... $1{,}02$

Total..... $204^{f},84$

La voie indirecte est donc plus avantageuse que la voie directe, et pour 100 *florins* elle donne un bénéfice de $211^{f} - 204^{f},84$ ou $6^{f},16$; pour 6000 *florins* le bénéfice sera 60 fois plus grand ou $369^{f},60$.

427. I. 1° *Voie directe.* Les 100 *thalers* coûtent $366^{f},25$.

2° *Voie de Londres.* Soit x la valeur des 100 *thalers* en *francs*, on aura

$$x \text{ francs} = 100 \text{ thalers},$$

$$6 \text{ thalers } \tfrac{25}{30} \text{ ou } 6\tfrac{5}{6} \text{ thalers} = 1 \text{ livre sterling},$$

$$1 \text{ livre sterling} = 25 \text{ francs},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 6\tfrac{5}{6} \times 1 = 100 \times 1 \times 25^{f}$$

et par suite

$$x = \frac{25^{f} \times 100}{6\frac{5}{6}} = \frac{25^{f} \times 100 \times 6}{41} = 365^{f},85,$$

3° *Voie de Hambourg.* On aura dans ce cas

$$x \text{ francs} = 100 \text{ thalers},$$

$$152{,}05 \text{ thalers} = 300 \text{ marcs banco},$$

$$100 \text{ marcs banco} = 187 \text{ francs},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 152{,}05 \times 100 = 100 \times 300 \times 187^{f}$$

et par suite $$x = \frac{187^{f} \times 300}{152{,}05} = 368^{f}{,}95.$$

4° *Voie d'Amsterdam.* On aura par cette voie

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ thalers},$$

$$143{,}54 \textit{ thalers} = 250 \textit{ florins},$$

$$100 \textit{ florins} = 210 \textit{ francs},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 143{,}54 \times 100 = 100 \times 250 \times 210 \text{ fr.}$$

et par suite $$x = \frac{210^{f} \times 250}{143{,}54} = 365^{f}{,}75.$$

En récapitulant, on voit que les 100 *thalers* coûteraient :

Par la voie directe.....	366f,25	
— de Londres.....	365 ,85	
— de Hambourg.....	368 ,95	
— d'Amsterdam.....	365 ,75	

La voie d'Amsterdam est donc la plus avantageuse.

II. Si l'on tient compte de la commission, on trouve

1° Par la voie de Londres.....	365f,85	
Plus la moitié de 3f,66 ou.....	1f,83	
Total...	367f,68	367f,68
2° Par la voie de Hambourg.....	368f,95	
Plus la moitié de 3f,69 ou.....	1f,84	
Plus la moitié de cette moitié, ou.....	0f,92	
Total...	371f,71	371f,71
3° Par la voie d'Amsterdam.....	365f,65	
Plus la moitié de 3f,66, ou.....	1f,83	
Total...	367f,58	367f,58

Dans ce cas, la voie directe serait la plus avantageuse, puisqu'elle permet d'acheter les 100 *thalers* au prix de 366f,25.

Le bénéfice, par rapport à la voie d'Amsterdam, qui est la plus avantageuse après la voie directe, serait, pour chaque somme de 100 *thalers*, 367f,58 — 366f,25, ou 1f,33 ; pour les 1800 *thalers* le bénéfice serait 18 fois plus grand, c'est-à-dire 23f,94.

428. 1° *Voie directe.* Le prix du ducat est $4^f,30$.

2° *Voie par Hambourg.* Si x désigne le prix du ducat, on a successivement

$$x \textit{ francs} = 1 \textit{ ducat},$$
$$43 \textit{ ducats} = 100 \textit{ marcs banco},$$
$$100 \textit{ marcs banco} = 188^f,50;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 43 \times 100 = 1 \times 100 \times 188^f,50,$$

et, par suite, $$x = \frac{188^f,50}{43} \quad \text{ou} \quad 4^f,38.$$

3° *Voie par Vienne.* On a par cette voie

$$x \textit{ francs} = 1 \textit{ ducat},$$
$$57 \textit{ ducats} = 100 \textit{ florins},$$
$$100 \textit{ florins} = 241 \textit{ francs},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$x \times 57 \times 100 = 1 \times 100 \times 241 \text{ fr.}$$

et, par suite, $$x = \frac{241^f}{57} \quad \text{ou} \quad 4^f,22.$$

4° *Voie par Hambourg et Vienne.* Ainsi que l'indique l'énoncé, le calcul de l'arbitrage dans le cas de deux places intermédiaires se fait, comme dans le cas d'une seule, en écrivant les égalités qui expriment le taux du change entre les places successives, et en ayant soin que l'espèce d'unités qui a figuré au second membre de chaque égalité figure au premier membre de l'égalité suivante. On multiplie les égalités membre à membre ; on obtient ainsi une égalité homogène, d'où l'on tire la valeur de l'inconnue en divisant les deux membres par le produit des facteurs qui multiplient cette inconnue. S'il y a un facteur commun aux deux membres, il est commode de le faire d'abord disparaître.

Dans le cas actuel, les égalités se succéderont dans l'ordre suivant : Paris et Naples, Naples et Vienne, Vienne et Hambourg, Hambourg et Paris; c'est-à-dire

$$x \textit{ francs} = 1 \textit{ ducat},$$
$$57 \textit{ ducats} = 100 \textit{ florins},$$
$$149,5 \textit{ florins} = 200 \textit{ marcs banco},$$
$$100 \textit{ marcs banco} = 188^f,50.$$

Le second membre de la dernière égalité est de même espèce que l'inconnue, comme cela devait être.

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 57 \times 149{,}5 \times 100 = 1 \times 100 \times 200 \times 188^{f}{,}50,$$

d'où $$x = \frac{188^{f}{,}50 \times 200}{57 \times 149{,}5} \quad \text{ou} \quad 4^{f}{,}42.$$

5° *Voie par Vienne et Hambourg.* On aura dans ce cas

$$x \textit{ francs} = 1 \textit{ ducat},$$

$$43 \textit{ ducats} = 100 \textit{ marcs banco},$$

$$200 \textit{ marcs banco} = 149{,}5 \textit{ florins},$$

$$100 \textit{ florins} = 241 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 43 \times 200 \times 100 = 1 \times 100 \times 149{,}5 \times 241 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{241^{f} \times 149{,}5}{43 \times 200} \quad \text{ou} \quad 4^{f}{,}18.$$

La voie la plus avantageuse est donc la voie par Vienne et Hambourg, c'est-à-dire que si, pour fixer les idées, les remises sont préférables aux traites, le banquier de Paris devra faire des remises à Vienne, en donnant ordre à Vienne de faire des remises à Hambourg, et à Hambourg de faire des remises à Naples.

Par rapport à la voie directe, le bénéfice sera de $4^{f}{,}30 - 4^{f}{,}18$ ou $0^{f}{,}12$ pour chaque ducat; le bénéfice total s'élèvera donc à $0^{f}{,}12 \times 3000$ ou 360 fr.

429. 1° *Voie directe.* Les 100 *thalers* coûtent $371^{f}{,}50$.

2° *Par Londres.* Si x désigne la valeur des 100 *thalers* en *francs*, on aura

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ thalers},$$

$$6 \text{ thalers } \tfrac{24}{30} \quad \text{ou} \quad 6{,}8 \textit{ thalers} = 1 \textit{ livre sterling},$$

$$1 \textit{ livre sterling} = 25^{f}{,}30.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 6{,}8 \times 1 = 100 \times 1 \times 25^{f}{,}30,$$

d'où $x = \dfrac{25^{f}{,}30 \times 100}{6{,}8}$ ou. . . . . $372^{f}{,}06$

A quoi il faut ajouter $\frac{1}{2}$ p. 100 ou. . . . . $1^{f}{,}86$

Total. . . $373^{f}{,}92$ $373^{f}{,}92$

3° *Par Amsterdam.* On aura par cette voie

$$x \text{ francs} = 100 \text{ thalers},$$
$$143{,}5 \text{ thalers} = 250 \text{ florins},$$
$$100 \text{ florins} = 213^{f},90.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 143{,}5 \times 100 = 100 \times 250 \times 213^{f},90,$$

d'où $x = \dfrac{213^{f},90 \times 250}{143{,}5}$, ou . . . . . $372^{f},64$

plus $\frac{1}{2}$ p. 100 ou . . . . . $1^{f},86$

Total. . . $374^{f},50$ $374^{f},50$

4° *Par Londres et Amsterdam.* On a dans ce cas

$$x \text{ francs} = 100 \text{ thalers},$$
$$143{,}5 \text{ thalers} = 250 \text{ florins},$$
$$12 \text{ florins} = 1 \text{ livre sterling},$$
$$1 \text{ livre sterling} = 25^{f},30.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 143{,}5 \times 12 \times 1 = 100 \times 250 \times 1 \times 25^{f},30,$$

d'où $x = \dfrac{25^{f},30 \times 100 \times 250}{143{,}5 \times 12}$ ou . . . . . $367^{f},30$

A quoi il faut ajouter deux fois $\frac{1}{2}$ p. 100 c'est-à-dire 1 p. 100 ou . . . . . $3^{f},67$

Total . . . $370^{f},97$ $370^{f},97$

5° *Par Amsterdam et Londres.* On aura

$$x \text{ francs} = 100 \text{ thalers},$$
$$6{,}8 \text{ thalers} = 1 \text{ livre sterling},$$
$$1 \text{ livre sterling} = 12 \text{ florins},$$
$$100 \text{ florins} = 213^{f},90.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 6{,}8 \times 1 \times 100 = 100 \times 1 \times 12 \times 213^{f},90,$$

d'où $x = \dfrac{213^{f},90 \times 12}{6{,}8}$ ou. . . . . $377^{f},47$

plus 1 p. 100 ou. . . . . $3^{f},77$

Total . . . $381^{f},24$ $381^{f},24$

La voie la plus avantageuse est donc la voie indirecte par Londres et Amsterdam; c'est-à-dire que si, pour fixer les idées, les remises sont préférables aux traites, le banquier de Paris devra faire des remises à Londres, donner ordre à Londres de faire des remises à Amsterdam, enfin donner ordre à Amsterdam de faire des remises à Berlin.

Par rapport à la voie directe, le bénéfice sera $371^f,50 - 370^f,97$ ou $0^f,53$ pour chaque somme de 100 *thalers;* pour les 4000 *thalers* le bénéfice sera donc 40 fois plus grand, ou $21^f,20$.

430. On a vu au n° **418** que, par la voie directe, le prix du *marc-banco* est $1^f,90$, tandis que par la voie d'Amsterdam il vaut $1^f,819$. D'après ce qui a été expliqué dans l'énoncé, la voie directe est celle qu'il conviendrait d'adopter, puisqu'elle ferait payer au correspondant de Hambourg un plus petit nombre de *marcs-banco* pour un même nombre de francs.

Au prix de $1^f,90$ par *marc*, il devra payer un nombre de *marcs* égal au quotient de 3000 fr. par $1^f,90$, c'est-à-dire 1578 *marcs* 15 *schillings*.

Au prix de $1^f,819$ ou $1^f,82$ il aurait eu à payer un nombre de *marcs* égal au quotient de 3000 fr. par $1^f,82$, c'est-à-dire 1648 *marcs* et environ 6 *schillings*. La différence entre ces deux nombres, c'est-à-dire 69 *marcs* 7 *schillings*, exprime le bénéfice du correspondant de Hambourg par l'emploi de la voie directe.

431. I. Comparons d'abord les deux voies directes.

1° Si Paris tire sur Berlin, les 100 *thalers* seront payés d'après le cours de Paris, c'est-à-dire 370 fr.

2° Si Berlin fait des remises à Paris, les 100 *thalers* seront payés d'après le cours de Berlin, c'est-à-dire un nombre x de *francs* donné par la proportion :

$$81 \textit{ thalers} : 100 \textit{ thalers} = 300 : x$$

d'où
$$x = \frac{300^f \times 100}{81} \quad \text{ou} \quad 370^f,37$$

Comparons en second lieu les quatre voies indirectes :

1° Si Paris tire sur Hambourg, et que Hambourg tire sur Berlin, il faut adopter, entre Paris et Hambourg, le cours de Paris, c'est-à-dire $188^f,50$, et, entre Hambourg et Berlin, le cours de Hambourg, c'est-à-dire 152 *thalers*. En appelant x la valeur des 100 *thalers* en *francs* on aura donc :

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ thalers}$$
$$152 \textit{ thalers} = 300 \textit{ marcs b}^{\circ}$$
$$100 \textit{ marcs b}^{\circ} = 188^f,50.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 152 \times 100 = 100 \times 300 \times 188^{f},50,$$

d'où $$x = \frac{188^{f},50 \times 300}{152} \quad \text{ou} \quad 372^{f},04.$$

2° Si Paris tire sur Hambourg et que Berlin fasse des remises à Hambourg, il faut adopter entre Paris et Hambourg le cours de Paris, c'est-à-dire $188^{f},50$, et, entre Hambourg et Berlin, le cours de Berlin, c'est-à-dire 152,5 *thalers*. On aura donc

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ thalers},$$

$$152,5 \textit{ thalers} = 300 \textit{ marcs banco},$$

$$100 \textit{ marcs banco} = 188^{f},50.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 152,5 \times 100 = 100 \times 300 \times 188^{f},50,$$

d'où $$x = \frac{188^{f},50 \times 300}{152,5} \quad \text{ou} \quad 370^{f},82.$$

3° Si Hambourg fait des remises à Paris et tire en même temps sur Berlin, il faut adopter, entre Paris et Hambourg, le cours de Hambourg, c'est-à-dire 188 fr., et, entre Hambourg et Berlin, le cours de Hambourg, c'est-à-dire 152 *thalers*. On aura donc

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ thalers},$$

$$152 \textit{ thalers} = 300 \textit{ marcs banco},$$

$$100 \textit{ marcs banco} = 188 \text{ fr.}$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 152 \times 100 = 100 \times 300 \times 188 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{188^{f} \times 300}{152} \quad \text{ou} \quad 371^{f},05.$$

4° Si Hambourg fait des remises à Paris et que Berlin fasse des remises à Hambourg, il faut adopter, entre Paris et Hambourg, le cours de Hambourg, c'est-à-dire 188 fr., et, entre Hambourg et Berlin, le cours de Berlin, c'est-à-dire 152,5 *thalers*. On aura donc

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ thalers},$$

$$152,5 \textit{ thalers} = 300 \textit{ marcs banco},$$

$$100 \textit{ marcs banco} = 188 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 152{,}5 \times 100 = 100 \times 300 \times 188 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{188^{\text{f}} \times 300}{152{,}5} \quad \text{ou} \quad 369^{\text{f}},83.$$

La voie la plus avantageuse (pour le correspondant de Berlin) est celle qui donne le plus grand nombre de francs pour 100 *thalers*, c'est donc celle dans laquelle Paris tire sur Hambourg et Hambourg sur Berlin, et qui met les 100 *thalers* à $372^{\text{f}},04$.

Après cette voie, la plus avantageuse est celle dans laquelle Hambourg fait des remises à Paris, et tire en même temps sur Berlin ; elle met les 100 *thalers* à $371^{\text{f}},05$.

A $372^{\text{f}},04$ les 100 *thalers*, 12000 fr. valent un nombre de *thalers* qui est le quotient de 12000 fr. par $3^{\text{f}},7204$, c'est-à-dire 3225 *thalers* 14 *silbergroschen* environ.

A $371^{\text{f}},05$ les 100 *thalers*, 12000 fr. valent un nombre de *thalers* qui est le quotient de 12000 fr. par $3^{\text{f}},7105$, c'est-à-dire 3234 *thalers* 19 *silbergroschen* à peu près.

Par la première voie le correspondant de Berlin gagne donc la différence entre ces deux nombres, ou 9 *thalers* 5 *silbergroschen* environ.

II. On aurait pu, comme au n° **424**, découvrir plus promptement celle des quatre voies indirectes qui est la plus avantageuse. Entre Paris et Hambourg, le cours le plus avantageux (pour le correspondant) est celui de Paris, puisqu'il donne un plus grand nombre de *francs* pour les 100 *marcs banco*. Entre Hambourg et Berlin, le change le plus avantageux (toujours pour le correspondant) est celui de Hambourg, puisqu'il donne moins de *thalers* pour les 300 *marcs banco*. La plus avantageuse des quatre voies indirectes est donc celle dans laquelle Paris tire sur Hambourg, et Hambourg sur Berlin.

432. On a trouvé au n° **428** pour le prix du ducat, savoir :

par la voie directe.....	$4^{\text{f}},30$;
par Hambourg.....	$4^{\text{f}},38$;
par Vienne.....	$4^{\text{f}},22$;
par Hambourg et Vienne..	$4^{\text{f}},42$;
par Vienne et Hambourg..	$4^{\text{f}},18$;

La voie la plus avantageuse (pour le correspondant de Naples), c'est-à-dire celle qui donne le plus grand nombre de *francs* pour un même nombre de ducats, est donc la voie par Hambourg et Vienne.

Le banquier de Paris pourra, par exemple, tirer sur Hambourg en donnant à Hambourg l'ordre de se couvrir en tirant sur Vienne, et à Vienne l'ordre de se couvrir en tirant sur Naples.

Si l'on compare cette voie par Hambourg et Vienne à la voie par Hambourg seule qui est, après celle-là, la plus avantageuse, on peut rechercher le bénéfice qui résultera, pour le correspondant de Naples, de l'adoption de la meilleure voie.

A $4^f,42$ par ducat, les 15000 fr. vaudront un nombre de ducats qui sera le quotient de 15000 par 4,42, c'est-à-dire $3393^d,66$ ou 3393 *ducats* 66 *grains*.

A $4^f,38$ par ducat, les 15000 fr. eussent valu un nombre de ducats qui est le quotient de 15000 par 4,38, c'est-à-dire $3424^d,65$ ou 3424 *ducats* 65 *grains*.

La différence de ces deux nombres, ou 30 *ducats* 99 *grains*, exprime le bénéfice résultant, pour le correspondant de Naples, de l'adoption de la voie la plus avantageuse.

433. I. L'ordre à exécuter, traduit en langage vulgaire, revient à celui-ci : *acheter* des piastres à 517 *centimes*, et récupérer la somme ainsi dépensée en *vendant* des *marcs banco* à 187 *centimes*. Mais le change avec Madrid s'étant élevé de 517 à 522, le prix des piastres se trouve multiplié par le rapport de 522 à 517, c'est-à-dire par $\frac{522}{517}$. Pour compenser l'accroissement de dépense par l'accroissement de recette, il faut augmenter dans le même rapport le prix des *marcs banco*, c'est-à-dire multiplier 187 par ce rapport, ce qui donne

$$\frac{187 \times 522}{517} \text{ ou } 188,81.$$

Ainsi, il faut vendre les 100 *marcs* au prix de $188^f,81$.

II. On voit que le change inconnu est donné par le quatrième terme de la proportion

$$517 : 522 = 187 : x,$$

laquelle exprime que les deux changes varient *dans le même rapport*.

434. I. L'ordre à exécuter consiste à acheter des *ducats* à $4^f,28$ et à vendre des *thalers* à $3^f,72$. Mais le change avec Berlin étant descendu à $3^f,70$, le prix des *thalers* se trouve multiplié par le rapport de 370 à 372 ou par $\frac{370}{372}$. Pour qu'il y ait compensation entre la diminution de la recette et celle de la dépense, il

faut que le prix des *ducats* soit multiplié par le même rapport; il reviendra donc

$$\frac{4^{f},28 \times 370}{372}, \text{ c'est-à-dire } 4^{f},257 \text{ ou } 4^{f}26.$$

II. On voit que le change inconnu est le quatrième terme de la proportion

$$372 : 370 = 4^{f}28 : x,$$

qui exprime que les deux changes varient proportionnellement.

III. Il résulte de la solution de ce problème et du précédent que, *lorsque la place qui reçoit l'ordre donne l'*INCERTAIN *aux deux autres, les changes varient en raison directe.*

435. I. L'ordre à exécuter consiste à acheter des *marcs banco* à raison de $13\frac{8}{16}$ ou 13,5 pour 1 *livre sterling*, et à vendre des *livres* de Piémont à raison de 25,30 pour 1 *livre sterling*. Le change avec Hambourg étant tombé à 12 *marcs* pour 1 *livre sterling*, il faut un plus grand nombre de *livres sterling* pour faire un même nombre de *marcs banco;* et le prix des *marcs banco* à acheter se trouve augmenté, dans le rapport de 12 à 13,5; c'est-à-dire que ce prix est multiplié par $\frac{13,5}{12}$. Pour que la recette compense la dépense, il faut que le prix des *livres* de Piémont à vendre soit augmenté dans le même rapport; et pour cela il faut que le nombre de *livres* données en échange d'une *livre sterling* varie dans le rapport inverse, ou soit multiplié par $\frac{12}{13,5}$; le nombre de *livres* cherché est donc

$$25^{liv},30 \times \frac{12}{13,5} \text{ ou } 22^{liv},48.$$

II. Le change inconnu est le quatrième terme de la proportion

$$13,5 \textit{ marcs} : 12 \textit{ marcs} = 25^{liv},30 : x,$$

qui exprime que les deux changes varient en raison directe.

436. I. L'ordre à exécuter consiste à acheter des *thalers* à raison de $6^{th}\frac{24}{30}$ ou $6^{th},8$ pour 1 *livre sterling*, et à vendre des *livres* autrichiennes à raison de $30^{liv},40$ pour 1 *livre sterling*. Le change avec Livourne s'étant élevé à 32 *livres*, il faut moins de *livres sterlings* pour faire un même nombre de *livres* autrichiennes, et le prix des *livres* autrichiennes à vendre se trouve diminué dans

le rapport de 32 à 30,40, c'est-à-dire que ce prix est multiplié par $\frac{30,40}{32}$. Pour que la recette compense la dépense, il faut que le nombre de *livres sterlings* nécessaire pour acheter les *thalers* se trouve diminué dans le même rapport, ce qui exige que le nombre de *thalers* achetés pour 1 *livre sterling* varie dans le rapport inverse, et soit multiplié par $\frac{32}{30,40}$; le nombre de *thalers* cherché est donc

$\frac{6^{th},8 \times 32}{30,40}$, c'est-à-dire $7^{th},15$ ou 7 *thalers* 4 *silbergroschen* $\frac{1}{2}$.

II. Le change inconnu est le quatrième terme de la proportion

$$30^{liv},40 : 32^{liv} = 6^{th},8 : x,$$

qui exprime que les deux changes varient en raison directe.

III. Il résulte de la solution de ce problème et du précédent que, *lorsque la place qui reçoit l'ordre donne le* CERTAIN *aux deux autres, les changes varient en raison directe.*

437. I. Le change avec Londres ayant monté de 13 à 14 *marcs banco*, il faut un plus grand nombre de *marcs banco* pour faire un même nombre de *livres sterlings;* le prix des *livres sterlings* à vendre a donc augmenté dans le rapport de 13 à 14, c'est-à-dire que ce prix est multiplié par $\frac{14}{13}$. Pour que la dépense soit compensée par la recette, il faut que le prix des *thalers* à acheter augmente dans le même rapport et soit multiplié par $\frac{14}{13}$, ou, ce qui revient au même, que le nombre de *thalers* achetés pour 300 *marcs banco* varie dans le rapport inverse et soit multiplié par $\frac{13}{14}$; ce nombre de *thalers* est donc $152^{th} \times \frac{13}{14}$, ou 141 *thalers* 4 *silbergroschen* environ.

II. Le change inconnu est le quatrième terme de la proportion

$$14^{marcs} : 13^{marcs} = 152 \textit{ thalers} : x,$$

qui exprime que les changes varient dans le rapport inverse.

438. I. Le change avec Amsterdam étant monté de 195 *roubles* à 198, le prix des *florins* à acheter a augmenté dans le rapport de ces nombres, c'est-à-dire qu'il est multiplié par $\frac{198}{195}$. Pour que la dépense soit compensée par la recette, il faut que le prix

des *livres sterlings* à vendre augmente dans le même rapport et soit aussi multiplié par $\frac{198}{195}$, ce qui exige que le nombre de *pences* donnés pour 1 *rouble* argent, varie dans le rapport inverse, et soit multiplié par $\frac{195}{198}$; le nombre de *pences* cherché est donc

$$\frac{38 \,.\, 195}{198} \quad \text{ou} \quad 37{,}4 \textit{ pences.}$$

II. Le change inconnu est le quatrième terme de la proportion

$$198^{\text{roubles}} : 195^{\text{roubles}} = 38 \textit{ pences} : x,$$

qui exprime que les changes varient dans le rapport inverse.

III. Il résulte de la solution de ce problème et du précédent que, *lorsque la place qui reçoit l'ordre donne le* CERTAIN *à l'une des deux autres et l'*INCERTAIN *à la seconde, les changes varient en raison inverse.*

439. Le Londres a baissé de $0^f{,}20$ sur $25^f{,}30$; la baisse pour 100 sera le quatrième terme de la proportion

$$25^f{,}30 : 0^f{,}20 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0{,}789.$$

Le Hambourg a baissé de 1,5 sur 188,5; la baisse pour 100 est le quatrième terme de la proportion

$$188{,}5 : 1{,}5 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0{,}795.$$

Le Berlin a baissé de 3 sur 372,5; la baisse pour 100 est le quatrième terme de la proportion

$$372{,}5 : 3 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0{,}803.$$

Le papier qui a éprouvé la baisse la moins considérable est donc le papier sur Londres; ainsi c'est sur Londres que le banquier de Paris devra tirer.

Comme la place qui reçoit l'ordre (Paris) donne l'*incertain* aux deux autres (Madrid et Londres), il faudra, pour que les intérêts du correspondant de Vienne ne soient pas lésés, que les changes varient en raison directe (434); en appelant x le change auquel on pourra remettre du papier sur Madrid, on aura donc

$$25^f{,}30 : 25^f{,}10 = 518 : x,$$

d'où $$x = 518 . \frac{251}{253}, \quad \text{ou} \quad x = 513{,}9.$$

Pour pouvoir exécuter l'ordre de son correspondant, il faudra

donc que le banquier de Paris trouve à acheter du papier sur Madrid à raison de $513^f,90$ les 100 piastres de change.

440. Appelons x le prix des 100 *roubles* papier.

1° En adoptant la voie de Berlin et le cours de Paris, on aura

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ roubles},$$
$$100 \textit{ roubles} = 30 \textit{ thalers},$$
$$100 \textit{ thalers} = 370 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 100 \times 100 = 100 \times 30 \times 370 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{370^f \times 30}{100} \quad \text{ou} \quad x = 111 \text{ fr.}$$

2° En adoptant la voie de Berlin et le cours de Berlin, on aura

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ roubles},$$
$$100 \textit{ roubles} = 30 \textit{ thalers},$$
$$80 \textit{ thalers} = 300 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 100 \times 80 = 100 \times 30 \times 300 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{300^f \times 30}{80} \quad \text{ou} \quad x = 112^f,50.$$

3° En adoptant la voie de Vienne et le cours de Paris, on aura

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ roubles},$$
$$100 \textit{ roubles} = 44,5 \textit{ florins},$$
$$100 \textit{ florins} = 257 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 100 \times 100 = 100 \times 44,5 \times 257 \text{ fr.}$$

d'où $$x = \frac{257^f \times 44,5}{100} \quad \text{ou} \quad x = 114^f,36.$$

4° En adoptant la voie de Vienne et le cours de Vienne, on a

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ roubles},$$
$$100 \textit{ roubles} = 44,5 \textit{ florins},$$
$$115 \textit{ florins} = 300 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 100 \times 115 = 100 \times 44{,}5 \times 300 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{300^{\text{f}} \times 44{,}5}{115} \quad \text{ou} \quad x = 116^{\text{f}},08.$$

441. 1° Puisqu'il faut entre Paris et Berlin adopter le change de Paris, le banquier de Paris devra remettre à son correspondant de Berlin du papier sur Berlin même, et lui donner ordre de remettre à Vienne du papier sur Saint-Pétersbourg; et puisqu'il faut, entre Vienne et Paris, adopter le cours de Vienne, le banquier de Paris devra donner ordre à son correspondant de Vienne de lui faire des remises.

2° Le bénéfice brut sera $116^{\text{f}},08 - 111$ fr. ou $5^{\text{f}},08$ sur 111; le bénéfice brut pour 100 s'obtiendra en multipliant 5,08 par 100 et divisant par 111, ce qui donne 4,576.

3° Les deux commissions de $\frac{1}{2}$ p. 100 font d'abord 1 p. 100. Les intérêts à $4\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{2}$ p. 100 par an, valent $\frac{3}{2}$ p. 100 pour 4 mois ou 120 jours; pour 20 jours qui sont le sixième de 120 jours, il faudra prendre le sixième de $\frac{3}{2}$, ce qui donne $\frac{1}{4}$. On a donc à déduire du bénéfice brut $1\frac{1}{4}$ ou 1,250; il reste par conséquent pour le bénéfice net 3,326 ou un peu plus de 3,3 p. 100.

Remarque. A 400 fr. les 100 *roubles* argent, les 100 *roubles* papier reviendraient aux $\frac{2}{7}$ de 400 fr., c'est-à-dire à $114^{\text{f}},28$. Ainsi à Paris on les payerait plus cher qu'à Berlin, et on les vendrait moins cher qu'à Vienne; la voie par Berlin et Vienne est donc celle qu'il fallait adopter.

442. En suivant la même marche qu'aux deux numéros précédents, on cherchera d'abord ce que valent les 100 *ducats* par la voie de Rome et par la voie d'Amsterdam, en adoptant soit le cours de ces deux places, soit le cours de Marseille.

1° En adoptant la voie de Rome et le cours de Marseille, et désignant par x la valeur des 100 *ducats*, on aura

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ ducats},$$

$$100 \textit{ ducats} = 80 \textit{ écus romains},$$

$$1 \textit{ écu} = 5{,}15 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 100 \times 1 = 100 \times 80 \times 5^{\text{f}},15,$$

d'où $$x = 5^{\text{f}},15 \times 80 \quad \text{ou} \quad x = 412 \text{ fr.}$$

2° En adoptant la voie de Rome et le cours de Rome, on aura

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ ducats},$$

$$100 \textit{ ducats} = 80 \textit{ écus} \text{ romains},$$

$$18{,}60 \textit{ écus} = 100 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 100 \times 18{,}60 = 100 \times 80 \times 100 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{100^{\text{f}} \times 80}{18{,}60} \quad \text{ou} \quad x = 430^{\text{f}},10.$$

3° En adoptant la voie d'Amsterdam et le cours de Paris, on aura

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ ducats},$$

$$40 \textit{ ducats} = 81\tfrac{1}{2} \textit{ florins},$$

$$100 \textit{ florins} = 215^{\text{f}},50.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 40 \times 100 = 100 \times 81{,}5 \times 215^{\text{f}},50,$$

d'où $$x = \frac{215^{\text{f}},50 \times 81{,}5}{40} \quad \text{ou} \quad x = 439^{\text{f}},08.$$

4° En adoptant la voie d'Amsterdam et le cours d'Amsterdam, on aura

$$x \textit{ francs} = 100 \textit{ ducats},$$

$$40 \textit{ ducats} = 81\tfrac{1}{2} \textit{ florins},$$

$$56 \textit{ florins} = 120 \textit{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 40 \times 56 = 100 \times 81{,}5 \times 120 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{120^{\text{f}} \times 100 \times 81{,}5}{40 \times 56} \quad \text{ou} \quad x = 436^{\text{f}},60.$$

Le prix le moins élevé répond à la voie de Rome et au cours de Marseille; le prix le plus élevé répond à la voie d'Amsterdam et au cours de Marseille. Il y aura donc bénéfice à acheter des *ducats* à Rome et à les revendre à Amsterdam.

Pour réaliser l'opération, d'après la même méthode qu'au numéro précédent, puisqu'il faut, entre Marseille et Rome, adopter le cours de Marseille, le banquier de Marseille devra remettre à son correspondant de Rome du papier sur Rome même,

et lui donner ordre de remettre à Amsterdam du papier sur Naples. Et, puisqu'il faut, entre Amsterdam et Marseille, adopter le cours de Marseille, le banquier de Marseille devra tirer sur son correspondant d'Amsterdam.

Le bénéfice brut sera $439^f,08 - 412$ fr. ou $27^f,08$ sur 412 fr.; on aura le bénéfice *brut* pour 100 en multipliant $27^f,08$ par 100 et divisant par 412, ce qui donne 6,572... pour 100.

On aura à déduire : d'abord 1 p. 100 pour les deux commissions; en second lieu, on a vu que $4\frac{1}{2}$ pour 100 par an donnent $\frac{3}{2}$ p. 100 pour 120 jours; pour 12 jours les intérêts seront le dixième de $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\frac{3}{20}$ ou 0,15. On aura donc à déduire en tout 1,15; et il restera pour le bénéfice *net* 5,422 ou un peu plus de 5,4 pour 100.

Remarque. Les 100 *ducats* valant à Marseille 430 fr., y coûteraient plus cher qu'à Rome, et s'y vendraient moins cher qu'à Amsterdam; la voie par Rome et Amsterdam était donc préférable.

443. Le banquier de Paris pourra remettre à son correspondant de Saint-Pétersbourg du papier sur Berlin, acheté à Paris à 370 fr. les 100 *thalers*, et lui donner l'ordre de lui remettre en retour du papier sur Vienne, acheté à Saint-Pétersbourg à $44\frac{1}{2}$ *florins* les 100 *roubles* papier, et qu'il négociera à Paris, à 257 fr. les 100 *florins*.

Le prix d'achat des 100 *roubles* sera, comme par la première méthode, 111 *francs*.

Le prix de vente par la voie de Vienne, mais au cours de Paris, s'obtiendra en posant les égalités :

$$x \text{ francs} = 100 \text{ roubles papier},$$

$$1 \text{ rouble} = 27 \text{ kreutzers},$$

$$60 \text{ kreutzers} = 1 \text{ florin},$$

$$100 \text{ florins} = 257 \text{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 1 \times 60 \times 100 = 100 \times 27 \times 1 \times 257 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{257^f \times 27}{60} \quad \text{ou} \quad x = 115^f,65....$$

Le bénéfice brut sera $115^f,65 - 111$ fr. ou $4^f,65$ pour 111 fr.; le bénéfice pour 100 s'obtiendra, comme plus haut, en multipliant 4,65 par 100 et divisant par 111, ce qui donne 4,189.

On aura à déduire $\frac{1}{2}$ p. 100 de commission à Saint-Pétersbourg, et 2 fois $\frac{1}{8}$ p. 100 à Paris, ce qui fait 1 p. 100. Quant aux intérêts de la somme engagée, ils seront de $\frac{1}{4}$ p. 100 comme au n° **441**, puisque la durée de l'opération est supposée la même; on aura donc à déduire en tout, comme au numéro cité 1,250;
et il restera pour le bénéfice *net* . . . . . 2,939 p. 100;
résultat un peu inférieur à celui qu'a fourni la première méthode.

444. Le banquier de Marseille pourra remettre à son correspondant de Naples du papier sur Rome, acheté à Marseille à $5^f,15$ pour 1 *écu romain*, et lui donner ordre de remettre en retour du papier sur Amsterdam, acheté à Naples à 48 *grains* pour 1 *florin*, et qui sera négocié à Marseille à $215^f,50$ les 100 *florins*.

L'achat de 100 *ducats* par la voie de Rome coûtera 412 fr., comme au n° **442**.

La vente des 100 *ducats* par la voie d'Amsterdam, et au cours de Marseille, produira un nombre x de *francs* qu'on déduira des égalités suivantes :

$$x \text{ francs} = 100 \text{ ducats},$$
$$1 \text{ ducat} = 100 \text{ grains},$$
$$48 \text{ grains} = 1 \text{ florin},$$
$$100 \text{ florins} = 215^f,50.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 1 \times 48 \times 100 = 100 \times 100 \times 1 \times 215^f,50,$$

d'où $$x = \frac{215^f,50 \times 100}{48} \quad \text{ou} \quad x = 448^f,95.$$

Le bénéfice brut serait $448^f,95 - 412$, ou $36^f,95$ pour 412 fr.; multipliant 36,95 par 100 et divisant par 412, on obtient le bénéfice brut pour 100; on trouve. 8,968
d'où il faut retrancher, comme au n° **442**. 1,150
puisque, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, les frais sont les mêmes; il reste donc, pour le bénéfice *net*. 7,818

ou un peu plus de 7,8 pour 100, résultat supérieur à celui du numéro cité.

445. La spéculation consiste évidemment à acheter des *livres sterlings* par la voie d'Amsterdam, et à les revendre par la voie de Madrid.

Soit x le prix d'achat de la *livre sterling* par la voie d'Amsterdam, on aura

$$x \text{ francs} = 1 \text{ livre sterling},$$
$$1 \text{ livre sterling} = 11 \text{ florins},$$
$$100 \text{ florins} = 214 \text{ francs}.$$

Multipliant membre à membre, il vient

$$x \times 1 \times 100 = 1 \times 11 \times 214 \text{ fr.},$$

d'où $$x = \frac{214^f \times 11}{100} \quad \text{ou} \quad x = 23^f,54.$$

Soit y le prix de vente de la *livre sterling*, on aura

$$y \text{ francs} = 1 \text{ livre sterling},$$
$$1 \text{ livre sterling} = 240 \text{ pences},$$
$$36 \text{ pences} = 1 \text{ piastre de change},$$
$$4 \text{ piastres de change} = 3 \text{ piastres effectives},$$
$$1 \text{ piastre effective} = 5^f,25.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$y \times 1 \times 36 \times 4 \times 1 = 1 \times 240 \times 1 \times 3 \times 5^f,25,$$

d'où $$y = \frac{5^f,25 \times 240 \times 3}{36 \times 4} \quad \text{ou} \quad y = 26^f,25.$$

Le bénéfice brut sera $26^f,25 - 23^f,54$, ou $2^f,71$ sur $23^f,54$; multipliant 2,71 par 100 et divisant par 23,54 on obtient pour le bénéfice brut, rapporté à 100 11,51
d'où il faut retrancher 1,25
il reste donc, pour le bénéfice net . . . . . 10,26 p. 100.

446. La spéculation consiste à vendre des *ducats* de Naples par la voie de Londres, et à en acheter par la voie de Hambourg.

Soit x le prix de vente de 100 *ducats*, on aura

$$x \text{ francs} = 100 \text{ ducats},$$
$$5,7 \text{ ducats} = 1 \text{ livre sterling},$$
$$1 \text{ livre sterling} = 25^f,30.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$x \times 5,7 \times 1 = 100 \times 1 \times 25^f,30,$$

d'où $$x = \frac{25^f,30 \times 100}{5,7} \quad \text{ou} \quad x = 443^f,86.$$

Soit y le prix d'achat des 100 *ducats*, on aura

$$y \text{ francs} = 100 \text{ ducats},$$
$$1 \text{ ducat} = 100 \text{ grains},$$
$$44 \text{ grains} = 1 \text{ marc banco},$$
$$100 \text{ marcs banco} = 187 \text{ fr.}$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$y \times 1 \times 44 \times 100 = 100 \times 100 \times 1 \times 187 \text{ fr.},$$

d'où $$y = \frac{187^f \times 100}{44} \quad \text{ou} \quad y = 425 \text{ fr.}$$

Le bénéfice brut sera donc $443^f,86 - 425$ ou $18^f,86$ sur 425; multipliant 18,86 par 100 et divisant par 425, on obtient pour le

bénéfice brut rapporté à 100	4,437
d'où il faut retrancher pour les frais	1,500
il reste donc pour le bénéfice *net*	2,937

ou un peu moins de 3 p. 100.

§ 5. Du commerce des métaux précieux.

447. On calculera d'abord la valeur du lingot d'après le tarif qui est $3437^f \times 3,145$ ou . . . . . $10809^f,36$.

Puis on ajoutera les 2 millièmes	21 ,62
ce qui donne pour la valeur totale	$10830^f,98$.

448. On a vu que la valeur du kilogramme d'or au titre des monnaies françaises, vaut, déduction faite des frais de fabrication, $3093^f,30$.

La valeur du lingot, d'après le tarif, est donc

$3093^f,30 \times 2,531$ ou	$7829^f,14$
Ajoutant les 2 millièmes, ou	15 ,66
on obtient pour la valeur demandée	$7845^f,80$

449. La somme des valeurs des deux lingots, c'est-à-dire la somme des nombres $10830^f,98$ et $7845^f,80$ est $18676^f,78$.

En divisant cette dernière somme par 219, on aura le prix d'une quadruple. On trouve $84^f,82$.

450. Pour obtenir le prix demandé, il suffit de diviser 468 fois 40 fr., c'est-à-dire 18720 fr. par 219, ce qui donne $85^f,479$ ou à très-peu près $85^f,48$.

Le bénéfice obtenu est la différence entre 18720 fr. et $18676^f,78$, c'est-à-dire $43^f,22$.

451. Jusqu'à concurrence de la valeur de l'or déposé. Pour l'obtenir, on se rappellera que le kilogramme d'or à 900 millièmes vaut, avec la retenue au change des monnaies, $3093^f,30$, et que la valeur est proportionnelle au titre; en nommant donc x la valeur du kilogramme d'or à 980 millièmes, on aura

$$900 : 980 = 3093^f,30 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 3368^f,26.$$

La valeur des $4^k,565$ sera donc $3368^f,26 \times 4,565$, c'est-à-dire $15376^f,1069$ ou $15376^f,11$.

452. Il faut d'abord calculer la valeur du lingot. D'après ce qui vient d'être rappelé ci-dessus, la valeur du kilogramme d'or à 916 millièmes est

$$\frac{3093^f,30 \times 916}{900} \quad \text{ou} \quad 3437^f \times 0,916.$$

La valeur des $2^k,950$ sera donc $3437^f \times 0,916 \times 2,95$

ou	$9287^f,46$
à quoi il faut ajouter les 2 millièmes de prime, ou. . .	18 ,57
Total. . .	$9306^f,03$

Pour obtenir le nombre de ducats demandé, il reste à diviser cette somme par $11^f,80$, ce qui donne 787,07 ou, en nombre entier, 787.

453. Les 463 *souverains* à $25^f,30$ représentent une valeur totale de $11713^f,90$ Mais cette somme est la valeur du lingot augmentée des 2 millièmes de cette valeur, c'est-à-dire que c'est la valeur du lingot multipliée par 1,002; il faut donc la diviser par 1,002 pour avoir la valeur du lingot; on trouve $11690^f,518$....

La valeur du kilogramme d'or à 950 millièmes est

$$3437^f \times 0,950 \quad \text{ou} \quad 3265^f,15.$$

On obtiendra donc le poids du lingot en divisant $11690^f,518$ par $3265^f,15$, ce qui donne $3^k,58039$....

454. Les 500 *ducats* à $11^f,75$ représentent une valeur de 5875 fr. Mais, comme cette somme est la valeur du lingot augmentée des 2 millièmes, ou multipliée par 1,002, il faut la diviser par 1,002 pour avoir la valeur du lingot, ce qui donne $5862^f,27$.

Or la valeur du kilogramme d'or au titre cherché est le produit de 3437 fr. par ce titre; et la valeur de $1^k,860$ de cet or est le

produit de 3437 fr. par le titre et par 1,860, ou, ce qui revient au même, le produit de $3437^f \times 1,86$, ou $6392^f,82$ par ce titre. On obtiendra donc le titre demandé en divisant $5862^f,27$ par $6392^f,82$, ce qui donne 0,917008..., ou simplement 0,917.

455. Il gagne $0^f,20$ par quadruple, ou $0^f,20 \times 120$, c'est-à-dire 24 fr. sur les 120 *quadruples*.

En 15 jours, son bénéfice a été de $0^f,20$ sur $85^f,50$; en un an, il serait 24 fois plus considérable ou $4^f,80$ sur $85^f,50$. On obtiendra le bénéfice pour 100 en multipliant 4,80 par 100 et divisant par 85,5, ce qui donne 5,614 ou un peu plus de 5,6 pour 100.

456. Son bénéfice est $0^f,15$ par *souverain*, ou $0^f,15 \times 400$, c'est-à-dire 60 *francs* pour les 400 *souverains*.

Il gagne $0^f,15$ sur $25^f,20$ en un mois; en un an, le gain serait 12 fois plus grand, ou $1^f,80$ sur $25^f,20$; le bénéfice pour 100 s'obtiendra en multipliant $1^f,80$ par 100 et divisant le produit par 25,20, ce qui donne 7,142... pour 100.

457. Son bénéfice est de $0^f,15$ par *ducat*, et par conséquent $0^f,15 \times 1000$ ou 150 fr. pour les 1000 *ducats*.

Un bénéfice de $0^f,15$ sur $11^f,75$ représente $\frac{0^f,15 \times 100}{11^f,75}$ ou 1,27659... pour 100. Ce nombre est contenu dans 10 autant de fois que le nombre de jours cherché est contenu dans 360 jours, qui forment l'année commerciale; on aura donc le nombre de jours cherché, en divisant 10 par 1,27659... et divisant ensuite 360 jours par le quotient obtenu; ce qui revient à multiplier 360 jours par 1,27659, et à diviser le produit par 10. On obtient ainsi 45,957... ou, en nombre entier, 46 jours.

On serait arrivé au même résultat en posant la proportion

$$10 : 1,27659... = 360^j : x, \quad \text{d'où} \quad x = 45,9...$$

ou 46 jours.

458. La valeur du lingot, au change des monnaies, est de 4 fois $3093^f,30$, c'est-à-dire. . . . . $12373^f,20$
En y ajoutant 2 pour 1000 ou. . . . . $24^f,75$
on obtient. . . . . $12397^f,95$
pour le prix de vente de ce lingot.

Les 492 *souverains* à $25^f,20$ valent. . . . . $12398^f,40$
il a donc fallu ajouter la différence, ou. . . . . $0^f,45$

Les *souverains* ayant monté de $0^f,15$, leur valeur totale a augmenté de 492 fois $0^f,15$ ou de . . . . . $73^f,80$
Cette valeur totale est donc devenue . . . . . $12472^f,20$

Les 147 *quadruples* à 84f,90 valent 12480f,30
il a donc fallu ajouter la différence 8f,10
Les *quadruples* ayant monté de 0f,70, leur valeur totale a augmenté de 147 fois 0f,70 ou de. 102f,90
Cette valeur totale est donc devenue. 12583f,20
Les 1076 *ducats* à 11f,70 valent. 12589f,20
il a donc fallu ajouter. 6f
Les *ducats* ayant monté de 0f,15, leur valeur totale a augmenté de 1076 fois 0f,15 ou de. 161f,40
Cette valeur totale est donc devenue. 12750f,60
Si on en retranche le prix de vente du lingot. 12397f,95

on aura le bénéfice total. 352f,65

Ce bénéfice doit être rapporté à la somme engagée, qui se compose de la valeur intrinsèque du lingot, ou 12373f,20, et des sommes successivement ajoutées pour parfaire les payements à chaque opération, savoir 0f,45, puis 8f,10, puis 6 fr., en tout 12387f,75.

On obtiendra le bénéfice pour 100 en multipliant 352f,65 par 100, et divisant par 12387f,75, ce qui donne 2,8467.... Mais ce résultat se rapporte à la durée de l'opération, qui a été de 3 mois; pour l'année, il serait 4 fois plus considérable, c'est-à-dire 11,3868... ou un peu moins de 11,4 pour 100.

Ce résultat n'est pas rigoureusement exact, attendu que les sommes de 8f,10 et de 6 fr. ajoutées dans le courant des opérations n'ont pas été engagées pendant 3 mois; mais ces sommes sont trop peu importantes, eu égard à la valeur totale engagée, pour qu'il soit nécessaire de tenir compte de la différence.

459. On aurait d'abord à recevoir le produit de 220f,555... par 3,561, c'est-à-dire. 785f,40
plus le produit du millième de cette somme, ou de 0f,7854 par 20,5, soit 16f,10

En tout . . . 801f,50

460. Elle rapporterait d'abord le produit de 198f,50, prix du kilogramme d'argent à 900 millièmes, par 6,837 ou 1507f,93,
plus le produit du millième de cette somme, ou de 1f,50793 par 19,5, c'est-à-dire 29f,49

En tout . . . 1537f,33

461. La valeur du kilogramme d'argent au titre de 900 mil-

lièmes étant $198^f,50$, on aura celle du kilogramme d'argent au titre de 960 millièmes, en posant la proportion

$$900 : 960 = 198^f,50 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 211^f,733...$$

La valeur des lingots est donc $211^f,733 \times 8,5$ ou. . . $1799^f,73$
Il faut y ajouter 20 pour 1000 ou 20 fois $1^f,799$...,
c'est-à-dire. . . . . $36^f,00$
On obtient donc en tout. . . . . $1835^f,73$

En divisant cette somme par $5^f,50$, on obtiendra le nombre de *piastres* qu'elle représente; on trouve 333,7. On adoptera donc 334. Mais 334 piastres à $5^f,50$ font. . . . . 1837^f
Il faudra donc ajouter la différence. . . . . $1^f,27$

462. Les 500 *piastres* à $5^f,55$ valent. . . . . 2775 *francs.* Mais ce prix est celui du lingot, augmenté de 19,75 par 1000, ou, ce qui revient au même, multiplié par 1,01975; il faut donc diviser 2775 fr. par 1,01975 pour avoir la valeur intrinsèque du lingot; on trouve $2721^f,255$...

Or la valeur du kilogramme d'argent au titre de 0,920 est, d'après ce qui a été plus haut,

$$\frac{198^f,50 \times 920}{900} \quad \text{ou} \quad 2029^f,11.$$

On aura donc le poids total du lingot en divisant $2721^f,255$ par $2029^f,11$, ce qui donne $1^k,34110$; ou à très-peu près $1^k,341$.

463. Les 90 *aigles* à $25^f,90$ valent. . . . . 2331 fr.

Cette somme représente la valeur des lingots, augmentée de 20,20 par 1000, ou multipliée par 1,0202; on aura donc la valeur intrinsèque des lingots en divisant 2331 fr. par 1,0202, ce qui donne $2284^f,846$... ou $2284^f,85$.

Pour avoir la valeur intrinsèque des lingots, si leur titre était connu, on multiplierait $198^f,50$ par ce titre et par le poids donné 11,632, puis on diviserait le produit par 0,900; le résultat de ce calcul devrait être $2284^f,85$. On obtiendra donc le titre demandé en faisant les calculs inverses, c'est-à-dire en multipliant $2284^f,85$ par 0,900, et en divisant le produit par celui des nombres $198^f,50$ et 11,632.

Le produit de $2284^f,85$ par 0,900 est . . . . . $2056^f,365$
Le produit de $198^f,50$ par 11,632 est . . . . . $2308^f,952$

Le quotient du premier de ces nombres par le second sera le titre demandé; on trouve 0,8906.

464. Le banquier gagne $0^f,10$ sur $5^f,45$; le gain pour 100 s'obtiendra en multipliant $0^f,10$ par 100 et divisant le produit par 5,45; on trouve 1,83486.... Mais ce gain se rapporte à 20 jours; pour l'année, ou 360 jours, le gain serait 1,83486... $\times$ 18, c'est-à-dire 33,02748... ou environ 33 pour 100.

465. Les 400 *souverains* à $25^f,35$ font. . . . . 10140 fr.

Si l'on divise ce nombre par $5^f,40$, la partie entière du quotient exprimera le nombre de *piastres* achetées, et le reste exprimera la portion des 10140 fr. non employée. En faisant la division, on trouve pour la partie entière du quotient 1877, et pour reste $4^f,20$; le nombre des *piastres* achetées est donc 1877, et la somme employée est 10140 fr. moins $4^f,20$, c'est-à-dire $10135^f,80$.

Les *piastres* ayant haussé de $0^f,30$, le prix de vente surpasse le prix d'achat de $0^f,30 \times 1877$ ou de $563^f,10$, ce qui porte le prix de vente à $10135^f,80 + 563^f,10$ ou $10698^f,90$.

Les *souverains* ayant baissé de $0^f,15$, le prix auquel on les rachète doit être inférieur à 10140 fr. de 400 fois $0^f,15$ ou 60 fr.; ce qui met le prix de rachat à 10080 fr.

En retranchant 10080 fr. de $10698^f,90$, on obtient le bénéfice; on trouve $618^f,90$.

Ce bénéfice est rapporté à la somme engagée $10135^f,80$; le bénéfice pour 100 s'obtiendra en multipliant 618,90 par 100 et divisant le produit par 10135,80, ce qui donne 6,1067.... Mais ce nombre se rapporte à la durée de l'opération qui a été de 2 mois; pour l'année entière, le gain serait 6 fois plus grand, ou 36,6402....

466*. Le kilogramme d'or à 0,950 vaut $3437^f \times 0,950$ ou $3265^f,15$; les 2 kilogrammes valent donc. . . . . $6530^f,30$
ajoutant 2 fois le millième de cette somme, ou . . . . . 13 ,06

on obtient pour le prix de vente de l'or. . . . . $6543^f,36$

Le kilogramme d'argent à 0,900 vaut $198^f,50$; les 3 kilogrammes valent donc . . . . . $595^f,50$
ajoutant 20 fois le millième, ou 2 fois le centième . . . 11 ,91

on obtient pour le prix de vente de l'argent . . . . . $607^f,41$

La vente des deux métaux a donc produit en totalité $7150^f,77$
et si l'on en retranche $0^f,27$, il reste . . . . . $7150^f,50$

En désignant par x le nombre des *quadruples* et par y celui des *piastres*, on aura donc pour première équation

$$[1] \qquad 84,90\,x + 5,40\,y = 7150^f,50.$$

Les *quadruples* ayant haussé de $0^f,60$ et les *piastres* de $0^f,30$, on aura ensuite

$$[2] \qquad 0^f,60\,x + 0^f,30\,y = 88^f,50;$$

c'est la seconde équation du problème. En multipliant par 100 et divisant par 30, on la met sous la forme

$$[3] \qquad 2\,x + y = 295.$$

Éliminant y entre les équations [1] et [3], on obtient une équation en x d'où l'on tire

$$x = 75.$$

L'équation [3] donne alors

$$y = 145.$$

Il y avait donc 75 *quadruples* et 145 *piastres*.

§ 6. De l'intérêt simple et des comptes courants et d'intérêts.

467. A 6 p. 100, l'intérêt sera

$$\frac{2400 \times 6 \times 175}{36000} \quad \text{ou} \quad 70^f.$$

A 5 p. 100, on aura

$$\frac{2400 \times 5 \times 175}{36000} \quad \text{ou} \quad 58^f,33.$$

A $4\frac{1}{2}$ p. 100, on aura

$$\frac{2400 \times 4\frac{1}{2} \times 175}{36000} \quad \text{ou} \quad 52^f,50.$$

A 4 p. 100, on aura

$$\frac{2400 \times 4 \times 175}{36000} \quad \text{ou} \quad 46^f,66.$$

A 3 p. 100, on aura enfin

$$\frac{2400 \times 3 \times 175}{36000} \quad \text{ou} \quad 35^f.$$

468*. Pour résoudre cette question, il faut, dans la formule [1] du numéro précédent, faire $n = 1$ et $i = 1$, ce qui donne

$$1 = \frac{at}{36000}$$

et en tirer la valeur de a, ce qui donne

$$a = \frac{36000}{t}.$$

Pour $t = 6$, on trouve	.....	6000^f
— $t = 5$, —	.....	7200
— $t = 4\frac{1}{2}$, —	.....	8000
— $t = 4$, —	.....	9000
— $t = 3$, —	.....	12000.

469. Dans cet exemple, le *nombre* est le produit de 2400 par 175, c'est-à-dire 420000 fr.

Si le taux est 6, le *diviseur fixe* est, comme on l'a vu, 6000;

l'intérêt est donc $\frac{420000^f}{6000}$ ou $\frac{420}{6}$, c'est-à-dire . . 70^f.

Si le taux est 5, le *diviseur fixe* est. 7200;

l'intérêt est donc $\frac{420000}{7200}$ ou $\frac{4200}{72}$, c'est-à-dire. . $58^f,33$.

Si le taux est $4\frac{1}{2}$, le *diviseur fixe* est 8000;

l'intérêt est donc $\frac{420000}{8000}$ ou $\frac{420}{8}$, c'est-à-dire . . $52^f,50$.

Si le taux est 4, le *diviseur fixe* est. 9000;

l'intérêt est donc $\frac{420000}{9000}$ ou $\frac{420}{9}$, c'est-à-dire . . $46^f,66$;

Enfin, si le taux est 3, le *diviseur fixe* est. 12000;

l'intérêt est donc $\frac{420000}{12000}$ ou $\frac{420}{12}$, c'est-à-dire . . 35^f.

Ces résultats sont précisément ceux qui ont été obtenus au n° **467**.

470. 1° Si le taux est 6, le *multiplicateur fixe* est

$$\frac{1}{6000} \text{ ou } 0,00016666...$$

Si le taux est 5, le *multiplicateur fixe* est

$$\frac{1}{7200} \text{ ou } 0,00013888....$$

Si le taux est $4\frac{1}{2}$, le *multiplicateur fixe* est

$$\frac{1}{8000} \text{ ou } 0{,}00012500....$$

Si le taux est 4, le *multiplicateur fixe* est

$$\frac{1}{9000} \text{ ou } 0{,}00011111....$$

Enfin, si le taux est 3, le *multiplicateur fixe* est

$$\frac{1}{12000} \text{ ou } 0{,}00008333....$$

2° Le *nombre*, ou le produit de la somme par le nombre de jours, est ici le même qu'au n° **469**, c'est-à-dire 420000 fr.

Si le taux est 6 pour 100, l'intérêt sera donc

$420000^f \times 0{,}00016666...$, c'est-à-dire $69^f{,}997...$ ou 70 fr.

Si le taux est 5 pour 100, l'intérêt sera

$420000^f \times 0{,}00013888...$, c'est-à-dire $58^f{,}329...$ ou $58^f{,}33$.

Si le taux est $4\frac{1}{2}$ pour 100, l'intérêt sera

$420000 \times 0{,}000125$, c'est-à-dire $52^f{,}50$.

Si le taux est 4 pour 100, l'intérêt sera

$420000 \times 0{,}00011111...$, c'est-à-dire $46^f{,}66$.

Enfin, si le taux est 3 pour 100, l'intérêt sera

$420000 \times 0{,}00008333...$, c'est-à-dire $34^f{,}998...$ ou 35 fr.

Remarque. Pour obtenir un degré suffisant d'exactitude par cette méthode, il faut que les *multiplicateurs fixes* soient calculés avec un grand nombre de décimales.

471. Le *nombre* étant toujours 420000 fr., l'intérêt à 6 pour 100 s'obtiendra en divisant le *nombre* par 6000, ce qui donne. . . . . 70^f

Si le taux est 5, il faut retrancher le *sixième*, ou. . 11 ,66...,

il reste donc. . . . . $58^f{,}33$.

Si le taux est $4\frac{1}{2}$, il faut, de l'intérêt à 6 pour 100, ou. 70^f

retrancher le *quart* de ce nombre, ou. . . . . 17 ,50,

il reste donc . . . . . $52^f{,}50$.

Si le taux est 4, il faut, de l'intérêt à 6 pour 100, ou. 70^f

retrancher le *tiers* de ce nombre, ou. . . . . 23 ,33,

il reste donc . . . . . $46^f{,}66$.

Enfin, si le taux est 3, il suffit de prendre la moitié de l'intérêt à 6 pour 100, c'est-à-dire la moitié de 70 fr., qui est 35 fr.

472*. Pour l'obtenir il faut, dans la formule du n° **467**, faire $t = 6$ et $n = 60$, ce qui donne

$$i = \frac{a \times 6 \times 60}{36000} \quad \text{ou} \quad i = \frac{a}{100};$$

ainsi, dans ce cas, l'*intérêt est le centième de la somme placée.*

473. L'intérêt pour 60 jours étant le centième de la somme placée, on a d'abord, pour ces 60 jours..... 24 fr.

On trouvera ensuite successivement :

Pour 120 jours, le double du nombre précédent, ou...		48 fr.
— 40 jours, le tiers	—	16
— 10 jours, le quart	—	4
— 5 jours, la moitié	—	2
	Total...	70 fr.

comme on l'a trouvé par les autres méthodes.

474. L'intérêt à 6 pour 100 pour 60 jours est..... $46^f,815$

Pour 180 jours, on prendra le triple de ce nombre, ou..			140 ,445
— 30	—	le sixième de celui-ci, ou..	23 ,407...
— 15	—	la moitié de ce dernier, ou.	11 ,703...
— 1	—	le quinzième de celui-ci, ou.	0 ,780...
— 1	—	— —	0 ,780
Pour 227 jours, l'intérêt à 6 pour 100 est donc.....			$177^f,115$...
Retranchant le quart de ce nombre, ou.....			44 ,278
on obtient pour l'intérêt à $4\frac{1}{2}$ pour 100.....			$132^f,837$

ou $132^f,84$.

475. L'intérêt à 6 pour 100 pour 60 jours est..... $39^f,194$

Pour 120 jours, on prendra le double de ce nombre, ou.			78 ,388
— 20	—	le sixième de celui-ci, ou..	13 ,064
— 4	—	le cinquième de ce dernier, ou.....	2 ,612
— 4	—	ce même cinquième.....	2 ,612
— 1	—	le quart de celui-ci, ou....	0 ,653
Pour 149 jours, on aura donc.....			$97^f,329$
Retranchant le douzième de ce nombre, ou.....			8 ,110
on obtient pour reste l'intérêt à $5\frac{1}{2}$ p. 100, c'est-à-dire.			$89^f,219$

ou $89^f,22$.

476. Du 1er juillet au 22 août il y a 52 jours, et du 1er juillet au 27 septembre il y a 88 jours.

Pour le premier billet, le *nombre* est donc 3600 × 52, ou 187200; pour le second billet, le *nombre* est 2850 × 88, ou..... 251680.

La somme totale énoncée dans les deux billets est

$$3600^f + 2860^f \text{ ou } 5460;$$

la somme des *nombres* est 187200 + 251680, ou..... 438880.

L'effet unique doit énoncer une somme de 5460 fr.; et puisque la somme totale des intérêts doit être la même que pour les deux billets séparés, il faut que le *nombre* soit aussi le même, c'est-à-dire qu'en multipliant 5460 fr. par le nombre de jours compris du 1er juillet à l'échéance cherchée, on trouve pour produit 438880. On obtiendra donc ce nombre de jours en divisant 438880 par 5460, ce qui donne 80,4. On devra adopter 80 jours; l'*échéance commune* sera donc le 19 septembre, attendu que du 1er juillet au 19 septembre il y a en effet 80 jours, savoir 30 jours de juillet, 31 jours d'août et 19 jours de septembre.

Remarque. En réalité, il y aura une légère différence sur la somme des intérêts, parce que le nombre de jours cherché devant nécessairement être entier, il a fallu négliger la fraction qui accompagnait le quotient 80,4; mais cette différence sera peu considérable.

A 6 pour 100, par exemple, on trouverait pour la somme des intérêts des deux billets séparés..... 73f,13,
et pour le billet unique..... 72 ,80.
Différence... 0f,33.

477. Du 21 mars au 30 mars il y a 9 jours,
— 3 avril — 13 — ,
— 29 — — 39 — ,
— 15 mai — 55 — ,
— 7 juin — 78 — .

En multipliant les sommes par les jours, on formera donc le tableau suivant:

Sommes.		*Jours.*		*Nombres.*
1870 fr.	.....	9	.....	16830
918	.....	13	.....	11934
2000	.....	39	.....	78000
500	.....	55	.....	27500
1200	.....	78	.....	93600
6488 fr.				227864

La somme énoncée dans le billet unique devra donc être 6488 fr.; et, puisque l'intérêt total doit être le même, le *nombre* devra être égal à 227864; c'est-à-dire qu'en multipliant la somme 6488 fr. par le nombre de jours compris depuis le 21 mars jusqu'à l'échéance cherchée, on doit obtenir pour produit 227864. On déterminera donc ce nombre de jours en divisant 227864 par 6488, ce qui donne 35,1. On adoptera 35 jours; l'échéance cherchée sera donc le 25 avril; car, du 21 mars au 25 avril, il y a 35 jours, savoir 10 jours de mars et 25 jours d'avril.

La règle générale à suivre pour trouver l'*échéance commune*, est donc de calculer, pour chacun des billets, le *nombre* qui, divisé par le *diviseur fixe* correspondant au taux considéré, donnerait l'intérêt de ce billet, et de diviser la somme des *nombres* ainsi obtenus par la somme totale énoncée dans les billets réunis. On a de la sorte le nombre de jours compris depuis le jour de l'opération jusqu'au jour de l'échéance cherchée.

Remarque. Comme on ne calcule le quotient qu'à une unité près, puisque le nombre de jours cherché doit être entier, il peut y avoir une légère différence entre la somme des intérêts des billets séparés et l'intérêt du billet unique.

Dans l'exemple qui précède, si le taux est 6 pour 100, auquel cas le diviseur fixe est 6000, on trouvera :

Pour le 1er billet, un intérêt de	.....		2f,80
— 2e — —	.....		1 ,99
— 3e — —	.....		13 ,00
— 4e — —	.....		4 ,58
— 5e — —	.....		15 ,60
	Total...		37f,97

Pour le billet unique, on aura le *nombre* en multipliant 6488 fr. par 35, ce qui donne 227080; et l'intérêt en divisant par 6000, ce qui donne 37f,84; différence 0f,13.

478. Il faut faire d'abord la balance des intérêts. Pour cela, on remarquera que du 7 mars au 29 avril il y a 53 jours; on calculera d'abord les intérêts des 4800 fr. à 6 pour 100 pour ces 53 jours; le *nombre* est ici 4800f × 53 ou 254400; divisant par le *diviseur fixe* qui, pour le taux de 6 pour 100, est 6000, on trouve 42f,40, qui sont dus par Jacques, et devraient, par conséquent, être portés à son débit.

Le 29 avril, Jacques remet une valeur de 5680 fr., qui éteint sa dette; à partir de ce jour, c'est Pierre qui doit la différence entre 5680 fr. et 4800 fr., c'est-à-dire 880 fr., laquelle somme va porter intérêt à 5 pour 100.

Du 29 avril au 1er juin il y a 32 jours; le *nombre* est donc ici 880 × 32 ou 28160; divisant par le *diviseur fixe* qui, pour le taux de 5 pour 100, est 7200, on trouve 3f,91 qui sont dus à Jacques, et devraient par conséquent être portés à son crédit.

La différence entre 42f,40 et 3f,91 est 38f,49; c'est le solde des intérêts, dus finalement par Jacques, et qui devront être portés à son débit.

La somme 4800 fr. déjà portée au débit, plus ces 38f,49, font 4838f,49; retranchant ce total de la somme 5680 fr. portée au crédit, on obtient une différence de 841f,51, dus en définitive à Jacques. On dira donc que le compte se solde par un crédit de 841f,51.

479. Commençons encore par faire la balance des intérêts.

Du 4 juin au 25 du même mois il y a 21 jours; pendant ce temps, la somme de 2400 fr. fournie par Pierre porte intérêt à 6 pour 100.

Le *nombre* est ici 2400 × 21 ou 50400, et en divisant par 6000, on obtient 8f,40 à porter au débit de Jacques.

Le 25 juin, Pierre fournit une nouvelle somme de 500 fr., qui s'ajoute aux 2400 fr. déjà fournis par lui, et la somme 2900 fr. porte intérêt à 6 pour 100 jusqu'au 17 juillet, c'est-à-dire pendant 22 jours; le *nombre* est 2900 × 22 ou 63800; divisant par 6000, on obtient 10f,63 à porter de nouveau au débit de Jacques.

Le 17 juillet, Jacques remet une valeur de 3400 fr., qui éteint sa dette; c'est maintenant Pierre qui doit la différence 500 fr., laquelle porte intérêt à 5 pour 100 jusqu'au 9 août, c'est-à-dire pendant 23 jours; le *nombre* est 500 × 23 ou 11500; divisant par 7200, on obtient 1f,59 dus par Pierre, et qui doivent être portés au crédit de Jacques.

Le 9 août, Pierre fournit 1800 fr., qui éteignent sa dette de 500 fr.; c'est maintenant Jacques qui doit la différence 1300 fr., laquelle porte intérêt à 6 pour 100 jusqu'au 28 août, c'est-à-dire pendant 19 jours; le *nombre* est ici 1300 × 19 ou 24700; divisant par 6000, on obtient 4f,11 à porter au débit de Jacques.

Le 28 août, Jacques remet une valeur de 660 fr.; sa dette se trouve diminuée d'autant et réduite à 640 fr.; cette somme porte

intérêt à 6 pour 100 jusqu'au 1er septembre, c'est-à-dire pendant 4 jours; le *nombre* est donc 640 × 4 ou 2560; en divisant par 6000, on obtient 0f,42 à porter encore au débit de Jacques.

Si l'on fait la somme des divers intérêts portés au débit, savoir 8f,40, plus 10f,63, plus 4f,11, plus encore 0f,42, on trouve 23f,56; retranchant 1f,59 d'intérêt porté au crédit, on obtient pour reste 21f,97 : c'est le solde des intérêts qui doit être porté au débit.

On trouvera donc au débit du compte de Jacques 2400 fr., plus 500 fr., plus 1800 fr., plus 21,97 d'intérêt, en somme 4721f,97. Au crédit du même compte, on trouvera 3400 fr., plus 660 fr., ou 4060 fr. La différence entre 4721f,97 et 4060 fr., c'est-à-dire 661f,97, formera le solde définitif. Ainsi le compte se solde par un débit de 661f,97; c'est-à-dire qu'en fin de compte Jacques se trouve redevoir 661f,97 à Pierre, à la date du 1er septembre.

480. Faisons d'abord le décompte des intérêts. Mais auparavant remarquons qu'il n'y a pas lieu d'avoir égard aux dates des remises faites par Samuel, mais seulement à la date de l'échéance de chaque billet, date à laquelle la somme énoncée dans le billet entre dans la caisse d'Urbain, et commence à porter intérêt en faveur de Samuel.

Du 3 avril au 16 juin il y a 74 jours, pendant lesquels les 10000 fr. fournis par Urbain portent intérêt à 5 pour 100; le *nombre* est donc 10000 × 74 ou 740000; divisant par 7200, on obtient 102f,77 à porter au débit de Samuel.

Du 16 juin au 2 juillet il y a 16 jours, pendant lesquels il n'y a plus que la différence entre 10000 fr. et 4500, c'est-à-dire 5500 fr., qui continue à porter intérêt; le *nombre* est alors 5500 × 16 ou 88000; divisant par 7200, on obtient 12f,22 à porter également au débit.

Du 2 juillet au 11 août il y a quarante jours, pendant lesquels c'est la somme des valeurs 5500 fr. et 2600 fr., c'est-à-dire 8100 fr., qui porte intérêt à 5 pour 100; le *nombre* est ici 8100 × 40 ou 324000; divisant par 7200, on obtient 45 fr. à porter encore au débit.

Le 11 août, la remise de Samuel éteint sa dette, et le surplus, c'est-à-dire 620 fr., porte intérêt à 4 ½ pour 100 en faveur de Samuel jusqu'au 28 septembre, c'est-à-dire pendant 48 jours; le *nombre* est 620 × 48 ou 29760; divisant par 8000, qui est le *diviseur fixe* correspondant au taux de 4 ½, on trouve 3f,72 à porter au crédit de Samuel.

Du 28 septembre au 4 octobre il y a 6 jours, pendant lesquels c'est la somme des valeurs 620 fr. et 600 fr., c'est-à-dire 1220 fr., qui porte intérêt à $4\frac{1}{2}$ pour 100 en faveur de Samuel; le *nombre* est ici 1220×6 ou 7320; divisant par 8000, on obtient $0^f,91$ à ajouter au crédit de Samuel.

Du 4 octobre au 6 novembre, c'est-à-dire pendant 33 jours, Samuel redevient le débiteur d'Urbain pour une somme égale à la différence entre 1800 fr. et 1220 fr., c'est-à-dire pour une somme de 580 fr.; le *nombre* est donc 580×33 ou 19140; divisant par 7200, on obtient $2^f,65$ à porter au débit de Samuel.

Le 6 novembre, la remise de Samuel éteint de nouveau sa dette, et le surplus, c'est-à-dire 520 fr., porte intérêt à $4\frac{1}{2}$ p. 100 en sa faveur jusqu'au 15 du même mois, c'est-à-dire pendant 9 jours; le *nombre* est donc 520×9 ou 4680; divisant par 8000, on obtient $0^f,58$ à porter au crédit de Samuel.

Enfin, du 15 novembre au 31 décembre, c'est-à-dire pendant 46 jours, Samuel redevient le débiteur d'Urbain pour $3000^f - 520^f$, c'est-à-dire pour 2480 fr.; le nombre est donc 2480×46 ou 114080; divisant par 7200, on obtient $15^f,84$ à porter au débit de Samuel.

La somme des intérêts portés au débit est ainsi $102^f,77$, plus $12^f,22$, plus 45 fr., plus $2^f,65$, plus $15^f,84$, ou $178^f,48$.

La somme des intérêts portés au crédit est $3^f,72$, plus $0^f,91$, plus $0^f,58$, ou $5^f,21$.

La balance des intérêts est donc

$$178^f,48 - 5^f,21 \quad \text{ou} \quad 173^f,27.$$

La somme des valeurs fournies par Urbain est

$$10000^f + 2600^f + 1800^f + 3000^f, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 17400^f.$$

La somme des valeurs fournies par Samuel est

$$4500^f + 8720^f + 600^f + 1100^f, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 14920.$$

Ajoutant au total du débit, 17400 fr., les $173^f,27$ d'intérêt, on obtient $17573^f,27$; et si l'on en retranche le total du crédit, ou 14920 fr., on obtiendra le solde définitif; on trouve $2653^f,27$.

C'est-à-dire qu'en fin de compte Samuel reste débiteur d'Urbain pour $2653^f,27$.

D'après ces calculs, on pourra établir le compte de la manière suivante :

DOIT. *Samuel, chez Urbain et Cie, s/c arrêté le 31 décembre 1856.* AVOIR.

10000	»	à Caisse	3 avril	D. 10000	du 3 avril au 16 juin.	102	77	»	»	16 juin	P. Effets à recevoir	4500	»
2600	»	à Caisse	2 juillet	A. 4500									
1800	»	à Caisse	4 octobre	5500	du 16 juin au 2 juillet.	12	22	»	»	11 août	P. Effets à recevoir	8720	»
3000	»	à Caisse	15 nov.	D. 2600									
				8100	du 2 juillet au 11 août.	45	»	»	»	28 sept.	P. Effets à recevoir	600	»
				A. 8720									
				620	du 11 août au 28 sept.	»	»	3	72	6 nov.	P. Effets à recevoir	1100	»
				A. 600									
				1220	du 28 sept. au 4 octobre.	»	»	0	91				
				D. 1800									
				580	du 4 octobre au 6 nov.	2	65	»	»				
				A. 1100									
				520	du 6 nov. au 15 nov.	»	»	0	58				
				D. 3000									
				2480	du 15 nov. au 31 déc.	15	84	»	»				
173	27	Intérêts en m/ faveur.			Balance des intérêts. . .	»	»	173	27		Solde. . .	2653	27
17573	27											17573	27

481. Pour obtenir les intérêts du crédit, on aurait eu à diviser les mêmes *nombres* par 7200, au lieu de les diviser par 8000; ces intérêts eussent donc été plus grands; et on les obtiendrait en multipliant ceux déjà obtenus par 8000 et divisant par 7200, ce qui revient à les multiplier par 10 et à diviser ensuite par 9. La somme des intérêts portés au crédit, au lieu d'être $5^f,21$, serait donc

$$\frac{5^f,21 \times 10}{9} \quad \text{ou} \quad 5^f,79.$$

Dès lors la balance des intérêts eût donné $172^f,69$ au lieu $173^f,27$; et le solde définitif eût été $2652^f,69$ au lieu de $2653^f,27$. La différence n'est que 58 centimes.

482. 1° Si l'on emploie la méthode Hambourgeoise, on aura d'abord à calculer l'intérêt de 3640^f du 17 avril au 25 juin, c'est-à-dire pendant 69 jours; le *nombre* sera donc 3640×69 ou 251160; divisant par 6000, on obtient $41^f,86$.

On fera ensuite la différence entre 3640^f et 2400^f, qui est 1240^f, et l'on aura à calculer l'intérêt de cette différence du 25 juin au 30 septembre, c'est-à-dire pendant 97 jours; le *nombre* sera donc 1240×97 ou 120280; divisant par 6000, on trouve $20^f,04$.

En ajoutant les deux résultats, $41^f,86$ et $20^f,04$, on obtiendra le total des intérêts à inscrire au débit de Jacques; c'est ici le solde des intérêts; on trouve $61^f,90$.

Si l'on emploie la méthode directe, on calculera l'intérêt de 3640^f du 17 avril au 30 septembre, c'est-à-dire pendant 166 jours; le nombre sera 3640×166 ou 604240; divisant par 6000, on obtient $100^f,70$.

On calculera ensuite l'intérêt de 2400^f du 25 juin au 30 septembre, c'est-à-dire pendant 97 jours; le *nombre* sera 2400×97 ou 232800; divisant par 6000, on obtient $38^f,80$.

On fera enfin la différence entre les intérêts calculés, et l'on aura pour le solde des intérêts $100^f,70 - 38^f,80$ ou $61^f,90$.

Ou mieux encore, on fera la différence entre les *nombres* obtenus 604240 et 232800, qui est 371440, et en divisant par 6000 on aura immédiatement la balance des intérêts; on trouve effectivement $61^f,90$.

2° Soit a la valeur fournie par Pierre, et N le nombre de jours compris entre la date de sa remise et celle du règlement de compte. Soit b la valeur fournie par Jacques, et n le nombre de jours compris entre la date de sa remise et celle du règlement de compte. Enfin soit d le *diviseur fixe* correspondant au taux de l'intérêt.

Par la méthode Hambourgeoise, le solde des intérêts sera

$$\frac{a(N-n)}{d}+\frac{(a-b)n}{d},$$

attendu que $N-n$ est le nombre de jours compris entre la remise de Pierre et celle de Jacques.

En effectuant les calculs indiqués, on obtient

$$\frac{aN}{d}-\frac{an}{d}+\frac{an}{d}-\frac{bn}{d},$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{aN}{d}-\frac{bn}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{aN-bn}{d}.$$

Or aN et bn sont les *nombres* que l'on obtient quand on calcule les intérêts des valeurs a et b, depuis le jour de leur remise jusqu'au jour du règlement de compte; l'expression

$$\frac{aN-bn}{d}$$

exprime donc le résultat du calcul par la méthode directe. Donc les deux méthodes donnent des résultats identiques.

Remarque. Il est bon de remarquer que le succès de la démonstration tient à ce que le taux de l'intérêt, et par conséquent le *diviseur fixe d*, est le même au débit et au crédit; s'il en était autrement, les termes $-\frac{an}{d}$ et $+\frac{an}{d}$ ne seraient plus égaux, ils ne s'entredétruiraient donc pas, et les deux méthodes donneraient des résultats différents.

485. 1° Dans ce cas, on aura d'abord pour la méthode Hambourgeoise, 41f,86 d'intérêts fournis par 3640f du débit, du 17 avril au 25 juin. Mais, à cette date, la dette de Jacques se trouve éteinte, et l'on a à calculer les intérêts fournis par l'excès de 4900f sur 3640f, c'est-à-dire par 1260f, du 25 juin au 30 septembre, ou pendant 97 jours; le *nombre* est alors 1260×97 ou 122220; et en divisant par 6000, on obtient 20f,37 qui doivent être portés au crédit de Jacques.

La balance des intérêts s'obtient donc en retranchant ces 20f,37 des 41f,86 trouvés plus haut, ce qui donne 21f,49 à inscrire au débit.

En employant la méthode directe, on aura d'abord, comme plus haut, 100f,70 d'intérêts fournis par les 3640f, du 17 avril au 30 septembre.

On aura ensuite à calculer les intérêts de 4900f, du 25 juin au

30 septembre, ou pendant 97 jours; le nombre sera donc 4900 × 97 ou 475320; divisant par 6000, on obtient 79f,21, qui devraient être portés au crédit. En retranchant donc ces 79f,21 des 100f,70, on obtiendra le solde des intérêts; on trouve comme par l'autre méthode 21f,49.

Ou, mieux encore, en retranchant le *nombre* 475320 du *nombre* 604240 trouvé plus haut, ce qui donne pour différence 128920, et divisant cette différence par 6000, on obtient le solde des intérêts 21f,486... ou 21f,49.

2° En conservant les notations du numéro précédent, on aura pour le solde des intérêts, par la méthode Hambourgeoise,

$$\frac{a(N-n)}{d} - \frac{(b-a)n}{d},$$

ou, en effectuant et simplifiant,

$$\frac{aN}{d} - \frac{bn}{d}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{aN-bn}{d},$$

ce qui revient au résultat fourni par la méthode directe. Donc encore les deux méthodes donnent des résultats identiques.

484. Déterminons d'abord les *nombres* du débit.

Du 3 avril au 31 décembre, il y a 272 jours; multipliant par 10000, on obtient.....	2720000
Du 2 juillet au 31 décembre, il y a 182 jours; multipliant par 2600, on trouve.....	473200
Du 4 octobre au 31 décembre, il y a 88 jours; multipliant par 1800, on obtient.....	158400
Du 15 novembre au 31 décembre, il y a 46 jours; multipliant par 3000, on trouve.....	138000
Total des *nombres* du débit.....	3489600

Déterminons de même les *nombres* du crédit.

Du 16 juin au 31 décembre, il y a 198 jours; multipliant par 4500, on trouve.....	891000
Du 11 août au 31 décembre, il y a 142 jours; multipliant par 8720, on obtient.....	1238240
Du 28 septembre au 31 décembre, il y a 94 jours; multipliant par 600, on trouve.....	56400
Du 6 novembre au 31 décembre, il y a 55 jours, multipliant par 1100, on obtient.....	60500
Total des *nombres* du crédit.....	2246140

Retranchant la somme des nombres du crédit de celle des nom-

bres du débit, on obtient 1243460; et en divisant par 7200, on trouve pour le solde des intérêts 172f,70.

Au n° 481 on a trouvé 172f,69; la légère différence de 1 centime, qu'on observe entre les deux résultats, provient des fractions de centime qui ont été négligées à chaque opération partielle dans la méthode Hambourgeoise.

485. On se rappellera qu'il faut écarter les dates des remises d'effets pour n'avoir égard qu'à la date de leur échéance.

Déterminons les *nombres* du débit.

Du 11 janvier au 31 octobre, il y a 294 jours, attendu que l'année 1856 est bissextile; multipliant 1500 par 294, on obtient 441000, et, en supprimant les deux derniers chiffres à droite... 4410

Du 19 février au 31 octobre, il y a 255 jours, parce que l'année est bissextile; multipliant 2000 par 255 et supprimant les deux derniers chiffres à droite, on obtient..... 5100

Du 8 avril au 31 octobre, il y a 206 jours; multipliant par 2640 et supprimant deux chiffres, on trouve..... 5438

Du 4 juin au 31 octobre, il y a 149 jours; multipliant par 4600 et supprimant deux chiffres, on obtient..... 6854

Du 17 juillet au 31 octobre, il y a 106 jours; multipliant par 400 et supprimant deux chiffres, on trouve... 424

Total des *nombres* au débit..... 22226

Déterminons de même les *nombres* du crédit.

Du 31 mars au 31 octobre, il y a 214 jours; multipliant par 3140 et supprimant deux chiffres, on trouve en forçant le dernier chiffre conservé..... 6720

Du 15 avril au 31 octobre, il y a 199 jours; multipliant par 850 et supprimant deux chiffres, on obtient..... 1691

Du 19 mai au 31 octobre, il y a 165 jours; multipliant par 3000 et supprimant deux chiffres, on trouve..... 4950

Du 30 septembre au 31 octobre, il y a 31 jours, multipliant par 1850 et supprimant deux chiffres, on obtient. 573

Total des *nombres* au crédit..... 13934

La différence entre la somme des *nombres* du débit et celle des *nombres* du crédit est 8292; divisant, non pas par 6000, mais bien par 60, on obtient pour le solde des intérêts 138f,20 à porter au débit.

L'ensemble des sommes inscrites au débit, y compris la balance des intérêts, est alors 11278f,20; et le total des sommes inscrites au crédit est 8840 fr., la différence, ou 2438f,20, forme le solde en faveur de Simon.

Le compte peut donc être présenté de la manière suivante :

DOIT. *Rémy, de Bordeaux, chez Simon et Cie, s/c arrêté le* 31 *octobre* 1856. AVOIR.

1500	»	Espèces	11 janvier	294	4410	3140	»	Bordereau	31 mars	214	6720
2000	»	d°	19 février	255	5100	850	»	d°	15 avril	199	1691
2640	»	d°	8 avril	206	5438	3000	»	d°	19 mai	165	4950
4600	»	d°	4 juin	149	6854	1850	»	d°	30 septembre	31	573
400	»	d°	17 juillet	106	424			Différence des nombres...		»	8292
138	20	Balance des intérêts.			22226						22226
						2438	20	Solde en ma faveur.			
11278	20					11278	20				

DOIT. *Jacques, de Marseille, chez Pierre et Cie, s/c arrêté le* 31 *décembre* 1856. AVOIR.

10000	»	Espèces	3 avril	272	27200	4500	»	Bordereau	16 juin	198	8910
2600	»	d°	2 juillet	132	4732	8720	»	d°	11 août	142	12382
1800	»	d°	4 octobre	88	1584	600	»	d°	28 septembre	94	564
3000	»	d°	15 novembre	46	1380	1100	»	d°	6 novembre	55	605
			Pour le nombre rouge du crédit.....		765	1500	»	d°	20 novembre	51	(765)
								Différence des nombres...		»	13200
					35661						35661
183	33	Balance des intérêts.				1163	33	Solde en ma faveur.			
17583	33					17583	33				

DOIT. *Rémy, de Bordeaux, chez Simon et Cie, s/c arrêté le* 31 *octobre* 1856. AVOIR.

1500	»	Espèces	11 janvier	294	4410	3140	»	Bordereau	31 mars	214	6720
2000	»	d°	19 février.	255	5100	850	»	d°	15 avril	199	1691
2640	»	d°	8 avril	206	5438	3000	»	d°	19 mai	165	4950
4600	»	d°	4 juin	149	6854	1850	»	d°	30 septembre	31	573
400	»	d°	17 juillet	106	424	680	»	d°	29 novembre	29	(197)
1000	»	N|R sur Bordeaux	31 décembre	61	(610)	1380	»	d°	12 janvier	73	(1007)
			Balance des nes rouges..		594	»	»	Différence des nombres...		»	8886
148	10	Balance des intérêts.									
					22820						22820
						1388	10	Solde en ma faveur.			
12288	10					12288	10				

486. Le *nombre* à inscrire en rouge au crédit de Jacques, et en noir à son débit, est 1500 × 51, c'est-à-dire 76500, ou simplement 765 en supprimant les deux derniers chiffres; ce nombre divisé par 72 donne 10f,625 ou 10f,63 d'intérêts. On aura donc à ajouter au débit ces 10f,63; mais en même temps le crédit sera augmenté de 1500 fr.; il en résulte que le solde définitif, qui était 2652f,70, diminuera de 1500 et augmentera de 10f,63; ce nouveau solde sera donc 1163f,33, c'est ce qu'exprime le compte de la page 200.

Le nombre 765, mis entre parenthèses au crédit, devrait, dans un compte manuscrit, être mis à l'encre rouge.

487. Du 31 octobre au 29 novembre il y a 29 jours; multipliant par 680, et supprimant deux chiffres, on obtient 197 à porter en *nombre rouge* au crédit de Rémy.

Du 31 octobre au 31 décembre il y a 61 jours; multipliant par 1000, et supprimant deux chiffres, on obtient 610 à porter en *nombre rouge* au débit.

Du 31 octobre au 12 janvier il y a 73 jours; multipliant par 1380, et supprimant deux chiffres, on obtient 1007 à porter en *nombre rouge* au crédit.

La somme des *nombres rouges* au crédit est ainsi 197 + 1007, ou 1204; retranchant 610, seul *nombre rouge* du débit, il reste 594 à porter à l'encre noire au débit.

La différence des *nombres* est alors 8886, en n'ayant aucun égard aux *nombres rouges*. Divisant 8886 par 60, on obtient 148f,10 d'intérêts à porter au débit.

Le total des sommes du débit, y compris les 1000 fr. de la traite de Simon et les 148f,10 d'intérêt, devient 12288f,10. Le total des sommes du crédit, y compris les 680 fr. et les 1380 fr., articles nouveaux, devient 10900 fr. Il en résulte que le solde en faveur de Simon se trouve réduit à 1388f,10. C'est ce qu'exprime le compte de la page 201.

Les nombres placés entre parenthèses représentent les *nombres rouges*.

488. 1° *Méthode ancienne*. Du 6 juin au 30 septembre il y a 116 jours; multipliant par 4000, et supprimant deux chiffres, on obtient 4640. Du 15 juillet au 30 septembre il y a 77 jours; multipliant par 1960, et supprimant deux chiffres, on trouve 1509. L'excès de 4640 sur 1509 est 3131; divisant par 72, on obtient 43f,48. Cet intérêt, ajouté aux 4000 fr. du débit, donne 4043f,48;

retranchant les 1960 du crédit, on trouve $2534^f,48$ pour le *solde* du compte.

Méthode nouvelle. Du 1er avril au 6 juin il y a 66 jours; multipliant par 4000, et supprimant deux chiffres, on trouve 2640.

Du 1er avril au 15 juillet il y a 105 jours; multipliant par 1960, et supprimant deux chiffres, on obtient 2058.

La balance préparatoire des capitaux, ou $4000^f - 1960^f$, donne 2040 fr.; multipliant par le nombre de jours compris du 1er avril au 30 septembre, c'est-à-dire par 182, on trouve, après avoir supprimé les deux derniers chiffres à droite, en forçant le dernier chiffre conservé, parce que le suivant serait un 8, le *nombre* 3713 qu'il faut porter du côté de la balance, c'est-à-dire au crédit dans la colonne des *nombres*.

La balance des nombres, c'est-à-dire $2058 + 3713 - 2640$ ou 3131, divisée par 72, donne $43^f,48$, qu'il faut porter du côté de cette balance, c'est-à-dire au débit.

La balance définitive donne alors $4000^f + 43^f,48 - 1960^f$ ou $2534^f,48$ pour le solde créditeur, comme par la première méthode.

2° *Méthode ancienne.* Soit a la valeur inscrite au débit, m le nombre de jours compris entre son échéance et la date de l'arrêté de compte. Soit b la valeur inscrite au crédit, n le nombre de jours compris entre son échéance et la date de l'arrêté de compte.

Les *nombres* correspondants seront am et bn; leur balance sera donc $am - bn$, en supposant, pour fixer les idées, que le *nombre* du débit l'emporte sur celui du crédit. Cette balance, divisée par le diviseur fixe correspondant au taux de l'intérêt, donnera les intérêts à ajouter au débit pour faire ensuite la balance qui donne le *solde*.

Méthode nouvelle. Soit m' le nombre de jours compris depuis l'époque fixe jusqu'à l'échéance de la valeur a, n' le nombre des jours compris depuis l'époque fixe jusqu'à l'échéance de la valeur b. Soit N le nombre de jours compris depuis l'époque fixe jusqu'à la date de l'arrêté de compte; on aura

$$m + m' = n + n' = \mathrm{N}.$$

Cela posé, la balance préparatoire des capitaux donnera $a - b$, si a est supposé plus grand que b, et le *nombre* correspondant sera $(a - b)\mathrm{N}$, qu'il faudra écrire du côté de la balance, c'est-à-dire au crédit.

La balance des nombres donnera donc, si bn' est plus grand que am',

$$(a - b)\,\mathrm{N} + bn' - am',$$

ou

$$a(\mathrm{N} - m') - b(\mathrm{N} - n'),$$

ou encore

$$am - bn,$$

c'est-à-dire le même résultat que par la première méthode ; il en résulte que les intérêts, et, par suite, le *solde* définitif seront aussi les mêmes.

On peut rendre la démonstration générale, en convenant de regarder comme positifs les capitaux ou les nombres portés au débit, et comme négatifs les capitaux ou les nombres portés au crédit, de telle sorte qu'une valeur négative au débit équivaudra à la même valeur positive au crédit, et *vice versa*.

Mais alors il faut bien remarquer que les *nombres* qu'on obtient dans la méthode rétrograde sont des *nombres négatifs;* car ils répondent à des intérêts qui ne courent pas encore au profit de celui qui doit recevoir la valeur correspondante, et qui, par conséquent, doivent être censés courir contre lui. Ainsi, dans l'exemple qui précède, les intérêts des 4000 fr. payés à Jacques ne courent au profit de Pierre qu'à partir du 6 juin ; du 1er avril au 6 juin ils ne sont pas dus à Pierre, et sont, en conséquence, censés courir au profit de Jacques ; on porte néanmoins le *nombre* 4640 au débit, mais il faut le regarder comme négatif, c'est-à-dire comme s'il était au crédit.

Cela posé, par l'ancienne méthode, la balance des nombres sera dans tous les cas

$$am - bn$$

à porter au crédit.

Dans la méthode nouvelle, la balance préparatoire des capitaux sera

$$(a - b)\,\mathrm{N}$$

à porter au crédit.

La balance des *nombres* serait $am' - bn'$ au crédit s'ils étaient positifs ; mais puisqu'ils sont négatifs, il faut écrire au crédit $bn' - am'$.

La balance des *nombres* donnera donc, au crédit,

$$(a - b)\,\mathrm{N} + bn' - am',$$

ou

$$a(\mathrm{N} - m') - b(\mathrm{N} - n'),$$

ou

$$am - bn$$

comme par l'ancienne méthode. Les intérêts, et par suite le solde, seront donc les mêmes que dans le premier cas.

439. 1° *Ancienne méthode.* Du 30 septembre au 10 novembre il y a 41 jours; multipliant par 640, et supprimant les deux derniers chiffres, on obtient 262, *nombre* qu'il faut écrire au débit. La balance des *nombres* donne alors

$$4640 + 262 - 1509, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3393.$$

Divisant par 72, on obtient $47^{f},125$, ou $47^{f},12$ à porter au débit.

La balance définitive donne donc

$$4000^{f} + 47^{f},12 - 1960^{f} - 640^{f}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1447^{f},12$$

à inscrire au crédit pour solde.

Méthode nouvelle. Du 1er avril au 10 novembre il y a 223 jours; multipliant par 640, et supprimant deux chiffres, on obtient 1427 à inscrire au crédit dans la colonne des *nombres*.

La balance préparatoire des capitaux donne

$$4000^{f} - 1960^{f} - 640, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1400^{f}.$$

Multipliant par 182, et supprimant deux chiffres, on trouve 2548 à porter au crédit dans la colonne des *nombres*.

La balance des *nombres* donne alors

$$2058 + 1427 + 2548 - 2640, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3393.$$

Divisant par 72, on obtient $47^{f},12$, intérêts qu'il faut porter au débit; par conséquent, la balance définitive donne

$$4000^{f} + 47^{f},12 - 1960^{f} - 640^{f}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1447^{f},12,$$

comme par la première méthode.

2° Soit c la remise de Jacques, dont l'échéance tombe k jours après la date de l'arrêté de compte.

Par l'ancienne méthode, et en regardant comme positifs les nombres du débit, et comme négatifs ceux du crédit, on aura pour la balance des *nombres*

$$am + ck - bn,$$

à porter au crédit.

Par la méthode nouvelle, on aura d'abord pour la balance préparatoire des capitaux,

$$a - b - c;$$

d'où le *nombre*

$$(a - b - c)\mathrm{N},$$

à porter au crédit.

La balance des *nombres* donnera par conséquent

$$(a - b - c)\mathrm{N} + bn' + c(\mathrm{N} + k) - am',$$

ou

$$a(\mathrm{N} - m') + ck - b(\mathrm{N} - n'),$$

ou encore

$$am + ck - bn,$$

à porter au crédit, comme par la première méthode. Dès lors les intérêts, et par suite le solde définitif, seront les mêmes.

490. Déterminons d'abord les *nombres* du débit.

Du 11 janvier au 11 janvier il y a 0 jours; d'où le *nombre* 0.

Du 11 janvier au 19 février il y a 39 jours; multipliant par 2000, et supprimant deux chiffres, on obtient 780.

Du 11 janvier au 8 avril il y a 88 jours, attendu que 1856 est une année bissextile; multipliant par 2640, et supprimant deux chiffres, on trouve 2323.

Du 11 janvier au 4 juin il y a 145 jours; multipliant par 4600, et supprimant deux chiffres, on trouve 6670.

Du 11 janvier au 17 juillet il y a 188 jours; multipliant par 400, et supprimant deux chiffres, on obtient 752.

Enfin, du 11 janvier au 31 décembre il y a 355 jours; multipliant par 1000, et supprimant deux chiffres, on trouve 3550.

Déterminons de même les *nombres* du crédit.

Du 11 janvier au 31 mars il y a 80 jours, puisque l'année est bissextile; multipliant par 3140, et supprimant deux chiffres, on obtient 2512.

Du 11 janvier au 15 avril il y a 95 jours; multipliant par 850, et supprimant deux chiffres, on trouve 807.

Du 11 janvier au 19 mai il y a 129 jours; multipliant par 3000, et supprimant deux chiffres, on obtient 3870.

Du 11 janvier au 30 septembre il y a 263 jours; multipliant par 1850, et supprimant deux chiffres, on trouve 4865.

Du 11 janvier au 29 novembre, il y a 323 jours; multipliant par 680, et supprimant deux chiffres, on obtient 2196.

Enfin, du 11 janvier 1856 au 12 janvier 1857, il y a 367 jours; multipliant par 1380, et supprimant deux chiffres, en forçant le dernier parce que le suivant serait plus grand que 5, on trouve 5065.

La balance préparatoire des capitaux donne 12140^{f} — 10900^{f} ou 1240 fr.; il faut multiplier cette somme par le nombre de jours compris du 11 janvier au 31 octobre, c'est-à-dire par 294; on trouve, en supprimant deux chiffres, 3646 qu'il faut écrire au crédit à la colonne des *nombres*.

La balance des *nombres* donne alors 22961 — 14075, c'est-à-dire 8886 qu'il faut écrire comme solde au-dessous de la colonne des *nombres* du débit. Divisant par 60, puisque les intérêts sont calculés à 6 pour 100, on obtient 148^{f},10 que l'on écrit au débit à la colonne des capitaux.

La balance définitive des capitaux donne alors 12288^{f},10 moins 10900 fr., c'est-à-dire 1388^{f},10 que l'on écrit au crédit comme solde au bas de la colonne des capitaux.

Ce solde est celui qui a été obtenu par la méthode ancienne avec *nombres rouges* au n° 487. La méthode rétrograde évite ces *nombres rouges*, causes constantes d'erreurs; et ce n'est pas un de ses moindres avantages.

D'après les calculs qui précèdent, le compte peut-être présenté comme il suit :

DOIT. *Rémy, de Bordeaux, chez Simon et Cie, s/c arrêté le* 31 *octobre* 1856. AVOIR.

1500	»	Espèces	11 janvier	0	0	3140	»	Bordereau	31 mars	80	2512
2000	»	d°	19 février	39	780	850	»	d°	15 avril	95	807
2640	»	d°	8 avril	88	2323	3000	»	d°	19 mai	129	3870
4600	»	d°	4 juin	145	6670	1850	»	d°	30 septembre	263	4865
400	»	d°	17 juillet	188	752	680	»	d°	29 novembre	323	2196
1000	»	d°	31 décembre	355	3550	1380	»	d°	12 janvier	367	5065
		Balance des nombres. . .		»	8886			Balance préparatoire des capitaux,	fr. 1240	294	3646
					22961						22961
148	10	Intérêts.				1388	10	Solde en ma faveur.			
12288	10					12288	10				

491. Le compte demandé aura la forme suivante : la légère différence de 2 centimes qu'on trouvera entre le solde de ce compte et celui du n° **480**, tient à la suppression des deux derniers chiffres dans la colonne des *nombres*, tant au crédit qu'au débit.

Samuel, s/c chez Urbain, valeur au 31 décembre 1856.

Espèces.	10000	»	»	»	»	»	3	Avril.	74	5 p. 100.	7400	4 1/2 p. 100.	»
Bordereau.	»	»	4500	»	5500	»	16	Juin.	16		880		»
Espèces.	2600	»	»	»	8100	»	2	Juillet.	40		3240		»
Bordereau	»	»	8720	»	620	»	11	Août.	48		»		298
D°.		»	600	»	1220	»	28	Septembre.	6		»		73
Espèces.	1800	»	»	»	580	»	4	Octobre.	33		191		»
Bordereau	»	»	1100	»	520	»	6	Novembre.	9		»		47
Espèces.	3000	»	»	»	2480	»	15	Novembre.	46		1141		»
Balance des intérêts. . .	173	25	»	»							12852		418
Solde.	»	»	2653	25									
	17573	25	17573	25									

§ 7. De l'escompte.

492. Pour obtenir la valeur cherchée, il faut calculer l'intérêt de 1000 fr. pendant 3 mois, à 6 pour 100, et retrancher cet intérêt du capital 1000 fr. énoncé dans le billet.

L'intérêt de 1000 fr. à 6 pour 100 pendant 60 jours (**472**) est 10f,
L'intérêt de 1000 fr. à 6 pour 100 pendant 30 jours est 5
L'intérêt pour 3 mois ou 90 jours est donc 15f

Retranchant 15 fr. de 1000 fr., on obtient pour reste 985 fr.; c'est la valeur actuelle du billet.

493. L'intérêt de 4500 à 6 pour 100 pendant 60 jours est 45f
L'intérêt de 4500 à 6 pour 100 pendant 120 jours est. 90f
— — 6 — 4,50
— — 3 — 2,25
— — 129 jours. . . . 96f,75
Retranchant le sixième, ou. 16f,12
on obtient l'intérêt à 5 pour 100, ou 80f,63

Il ne reste plus qu'à retrancher cet escompte de 4500 fr., ce qui donne pour la valeur actuelle du billet, 4419f,37.

494. Les mois dans le commerce étant évalués à 30 jours, 5 mois font 150 jours, et 5 mois 17 jours font 167 jours.

Pour 60 jours, l'intérêt de 6680 fr. à 6 pour 100 est 66f,80
pour 120 jours, on double le nombre précédent, ce qui donne 133f,60
Pour 30 jours, on prend la moitié de l'intérêt pour 60 jours, soit. 33f,40
Pour 12 jours, on prend le dixième de l'intérêt pour 120 jours, soit 13f,36
Pour 4 jours, on prend le tiers du nombre précédent, ou. 4f,45
Pour 1 jour, on prend le quart du nombre précédent, ou 1f,11
Pour 167 jours, on trouvera donc. 185f,92
Pour avoir l'intérêt à $5\frac{1}{2}$ pour 100, il faut retrancher $\frac{1}{2}$ sur 6 ou le douzième, soit 15f,49
L'escompte est donc. 170f,43

et par conséquent la valeur actuelle du billet est ce qui reste de 6680 fr., quand on en retranche 170f,43, c'est-à-dire 6509f,57.

495. Le centième de 1000 fr. est 10 fr., dont la moitié est 5 fr.; cette commission devra être retranchée des 985 fr. trouvés au n° **492**; on toucherait donc 980 fr.

Le centième de 4500 fr. est 45 fr., dont la moitié est 22f,50; cette commission devra être retranchée des 4419f,37 obtenus au n° **493**; on toucherait donc 4396f,87.

Le centième de 6680 fr. est 66f,80, dont la moitié est 33f,40; cette commission devra être retranchée des 6509f,57 trouvés au n° **494**; on toucherait donc 6476f,17.

496. On calculera d'abord l'escompte.

1° Les 2 mois et 5 jours font 65 jours :

Pour 60 jours, l'intérêt à 6 p. 100 de 3217f,60 est	32f,176	
Pour 5 jours, on prendra le douzième, ou	2f,681	
Pour 65 jours, on aura donc	34f,857	34f,857

2° Les 3 mois et 11 jours font 101 jours :

Pour 60 jours, l'intérêt à 6 p. 100 de 849f,50 est	8f,495	
Pour 20 jours, on prendra le tiers ou	2f,832	
— 20 — —	2f,832	
— 1 — — le vingtième ou	0f,141	
Pour 101 jours, on aura donc	14f,300	14f,300

3° Pour 60 jours, l'intérêt à 6 p. 100 de 1940 fr. est 19f,400

Pour 20 jours, on prendra le tiers ou	6f,467	
— 2 — le dixième	0f,646	
— 1 — la moitié	0f,323	
Pour 23 jours, on aura donc	7f,436	7f,436

4° Les 5 mois et 25 jours font 175 jours :

Pour 60 jours, l'intérêt à 6 p. 100 de 650 fr. est	6f,500	
Pour 120 jours on doublera	13f,000	
— 40 — on prendra le tiers	4f,333	
— 10 — le quart	1f,083	
— 5 — la moitié	0f,541	
Pour 175 jours on aura donc	18f,957	18f,957

5° Un mois et 19 jours font 49 jours :

Pour 60 jours, l'intérêt à 6 p. 100 de 2244f,45 est.	22f,444	
Pour 20 jours, on prendra le tiers.	7f,481	
— 20 — —	7f,481	
— 6 — on prendra le dixième de l'intérêt pour 60 jours, soit.	2f,244	
— 3 — on prendra la moitié, ou. . .	1f,122	
Pour 49 jours on aura donc.	18f,328	18f,328
La somme des intérêts à 6 pour 100 serait donc. . . .		93f,878
Retranchant le sixième, ou.		15f,646
on obtient pour l'intérêt à 5 pour 100, ou l'escompte. .		78f,232
Il faut maintenant additionner les sommes énoncées dans les divers effets; on trouve 8901f,55. Le centième de cette somme est 89f,0155, dont le quart est 22f,2538 et les trois quarts 66f,7614		66f,761
La retenue totale sera donc		144f,993

En la retranchant de 8901f,55, on aura la somme touchée par le négociant; on trouve 8756f,56.

497*. On tire de la formule [1]

$$a = \frac{36000.e}{tn},$$

ou, en remplaçant e par 63f,20, t par 6 et n par 79, attendu que 2 mois et 19 jours font 79 jours,

$$a = \frac{36000.63^f,20}{6.79} = \frac{6000.63^f,20}{79},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$a = 4800 \text{ fr.}$$

498*. On tire de la même formule

$$t = \frac{36000.e}{a.n}.$$

Faisant $e = 63^f,80$, $a = 3480$ fr., et $n = 132$, attendu que 4 mois et 12 jours font 132 jours, on aura

$$t = \frac{36000.63^f,80}{3480^f,132}, \quad \text{ou} \quad t = 5;$$

le taux de l'escompte était donc 5 pour 100.

499*. On tire de la même formule

$$n = \frac{36000.e}{a.t}.$$

Faisant $e = 19^f,25$, $a = 1750$ fr. et $t = 5,5$ on obtient

$$n = \frac{36000.19^f,25}{1750^f.5,5} \quad \text{ou} \quad n = 72.$$

L'échéance était donc à 2 mois et 12 jours.

500*. Il faut d'abord chercher quel a été l'escompte total.

Le centième de 6000 fr. est 60 fr., dont la moitié est 30 fr. Si l'on retranche cette commission des 6000 fr., il reste 5970 fr.

L'escompte total a donc été $5970^f - 5917$ fr., c'est-à-dire 53 fr.

Cela posé :

Désignons par x et y les sommes cherchées; on a d'abord l'équation

[1] $$x + y = 6000 \text{ fr.}$$

L'escompte du premier billet est exprimé par

$$\frac{x.6.45}{36000} \quad \text{ou} \quad \frac{45x}{6000}.$$

L'escompte du second est exprimé de même par

$$\frac{y.6.85}{36000} \quad \text{ou} \quad \frac{85y}{6000}.$$

On a donc pour seconde équation

$$\frac{45x + 85y}{6000} = 53 \text{ fr.},$$

$$\text{ou} \quad 45x + 85y = 6000.53,$$

ou, en divisant par 5,

[2] $$9x + 17y = 63600.$$

De la première équation l'on tire

$$y = 6000 - x.$$

Substituant dans la seconde, on obtient

$$9x + 17.6000 - 17x = 63600,$$

ou, en effectuant et transposant,

$$102000 - 63600 = 17x - 9x,$$

c'est-à-dire

$$38400 = 8x,$$

d'où

$$x = 4800,$$

par suite

$$y = 6000 - 4800 = 1200.$$

Les sommes énoncées étaient donc 4800 fr. pour le premier billet et 1200 fr. pour le second.

501*. Désignons par e, e', e'' les trois escomptes, et par n, n', n'' les nombres de jours exprimant les échéances correspondantes; on aura les équations :

$$e = \frac{1800^{\text{f}}.5.n}{36000}, \quad e' = \frac{1800^{\text{f}}.5.n'}{36000}, \quad e'' = \frac{1800^{\text{f}}.n''}{36000},$$

ou

$$[1] \qquad e = \frac{1}{4}n, \quad e' = \frac{1}{4}n', \quad e'' = \frac{1}{4}n'',$$

auxquelles il faut joindre

$$[2] \qquad \frac{n}{17} = \frac{n'}{19} = \frac{n''}{23}$$

et

$$[3] \qquad e + e' + e'' = 73^{\text{f}},75.$$

On a donc 6 équations pour déterminer les 6 inconnues.

Les équations [1] donnent, en multipliant par 4 et ajoutant membre à membre,

$$n + n' + n'' = 4(e + e' + e'') = 73^{\text{f}},75 \times 4 = 295.$$

Les relations [2] donnent, d'après une propriété connue,

$$\frac{n}{17} = \frac{n + n' + n''}{17 + 19 + 23} = \frac{295}{59} = 5, \quad \text{d'où....} \quad n = 85,$$

$$\frac{n'}{19} = \frac{n}{17} = 5, \quad \text{d'où....} \quad n' = 95,$$

$$\frac{n''}{23} = \frac{n}{17} = 5, \quad \text{d'où....} \quad n'' = 115.$$

Par suite :

$$e = \frac{1}{4}n = \frac{85}{4} \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad e = 21^{f},25,$$

$$e' = \frac{1}{4}n' = \frac{95}{4} \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad e' = 23^{f},75,$$

$$e'' = \frac{1}{4}n'' = \frac{115}{4} \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad e'' = 28^{f},75.$$

On peut vérifier que la somme des trois escomptes fait bien $73^{f},75$.

502 *. Soient a et a' les sommes cherchées, n et n' les nombres de jours exprimant les échéances correspondantes. On aura

$$52^{f} = \frac{a.6.n}{36000}, \qquad 28^{f},60 = \frac{a'.6.n'}{36000},$$

d'où

$$[1] \qquad an = \frac{52^{f}.36000}{6} = 312000$$

et

$$[2] \qquad a'n' = \frac{28^{f},60.36000}{6} = 171600,$$

équations auxquelles il faut joindre

$$[3] \qquad a + a' = 6600^{f} \quad \text{et} \quad n - n' = 12. \qquad [4]$$

On a donc 4 équations pour déterminer les 4 inconnues a, a', n et n'.

La dernière donne

$$n' = n - 12.$$

On tire des deux premières

$$a = \frac{312000}{n} \quad \text{et} \quad a' = \frac{171600}{n'} = \frac{171600}{n-12},$$

valeur qui, substituée dans [3], donne l'équation

$$\frac{312000}{n} + \frac{171600}{n-12} = 6600,$$

laquelle, simplifiée et ordonnée, prend la forme

$$[5] \qquad 11n^{2} - 938n + 6240 = 0.$$

On en tire

$$n = \frac{469 \pm \sqrt{(469)^2 - 6240.11}}{11}$$

ou

$$n = \frac{469 \pm \sqrt{151321}}{11} = \frac{469 \pm 389}{11}.$$

En prenant le signe supérieur, on obtient

$$n = \frac{858}{11} \quad \text{ou} \quad n = 78, \quad \text{d'où} \quad n' = 78 - 12 = 66.$$

En prenant le signe inférieur, on obtiendrait pour n une valeur positive, mais moindre que 12; la valeur correspondante de n' serait donc négative, et ne pourrait convenir à la question.

Il faut donc s'en tenir aux valeurs $n = 78$ et $n' = 66$.

La première, substituée dans la valeur de a,

$$a = \frac{312000}{n},$$

donne

$$a = \frac{312000}{78} = 4000.$$

Il en résulte

$$a' = 6600^f - 4000^f = 2600^f.$$

503*. Appelons t le taux de l'escompte et n le nombre de jours qui exprime l'échéance; on aura d'abord

$$[1] \qquad 49^f,40 = \frac{3120^f . n . t}{36000}, \quad \text{d'où} \quad nt = 570.$$

L'escompte demeurant le même quand n se change en $n + 19$ et t en $t - 1$, on aura de même

$$[2] \quad 49^f,30 = \frac{3120^f (n + 19)(t - 1)}{36000}, \quad \text{d'où} \quad (n+19)(t-1) = 570.$$

On a donc deux équations pour déterminer les deux inconnues n et t.

L'équation [2] développée devient

$$nt + 19t - n - 19 = 570,$$

ou, en supprimant d'une part nt et de l'autre 570 qui sont deux quantités égales, en vertu de l'équation [1],

$$19t - n - 19 = 0,$$

d'où

$$n = 19t - 19 = 19(t - 1).$$

Cette valeur, substituée dans l'équation [1], donne

$$19(t-1)t = 570 \quad \text{ou} \quad (t-1)t = 30,$$

ou

$$t^2 - t = 30.$$

On en tire

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+30.4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2},$$

c'est-à-dire

$$t = \frac{1 \pm 11}{2}.$$

Le taux t devant être essentiellement positif, on ne peut adopter que le signe supérieur, ce qui donne $t = 6$.

Par suite

$$n = 19.5 = 95.$$

L'effet était donc à 95 jours, ou 3 mois et 5 jours d'échéance, et le taux de l'escompte était 6 pour 100.

On vérifie que si l'échéance était à $95 + 19$ ou 114 jours, mais que le taux de l'escompte fût $6 - 1$ ou 5 pour 100, l'escompte resterait le même. On aurait, en effet, en appelant e cet escompte,

$$e = \frac{3120^f.5.114}{36000} = 49^f,40,$$

comme dans le premier cas.

504. Puisqu'il doit retenir 6^f sur 106^f, sur 1590^f il retiendra un escompte x donné par la proportion

$$106^f : 6^f = 1590^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1590^f \times 6}{106} = 90^f.$$

505. Il eût été égal à l'intérêt de 1590^f à 6 pour 100 pour un an, c'est-à-dire à 6 fois le 100e de 1590^f, ou à $95^f,40$. L'escompte en dedans est donc moins onéreux que l'escompte en dehors pour celui qui présente un effet à l'escompte; et, par cela même, il est moins favorable à l'escompteur.

506. L'escompte x serait donné par la proportion

$$103^f : 3^f = 2472^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2472^f.3}{103} = 72^f.$$

507*. L'intérêt de 100^f pour 360 jours étant t, l'intérêt pour 1 jour serait $\frac{t}{360}$, et l'intérêt pour n jours sera $\frac{nt}{360}$. Si Jean, qui doit 100^f aujourd'hui, ne paye que dans n jours, il devra donc

payer $100^f + \frac{nt}{360}$; il souscrira donc un billet de $100^f + \frac{nt}{360}$ payable dans n jours. Si Pierre veut le faire escompter le jour même, le banquier ne payera que 100^f; il retiendra donc $\frac{nt}{360}$ sur $100 + \frac{nt}{360}$. Sur a il retiendra donc un escompte e donné par la proportion

$$100 + \frac{nt}{360} : \frac{nt}{360} = a : e,$$

ou, en multipliant par 360 les deux termes du premier rapport,

$$36000 + nt : nt = a : e,$$

d'où

[1] $$e = \frac{ant}{36000 + nt};$$

telle est la formule générale de l'escompte en dedans.

508. On aurait, dans ce cas,

$$a = 3660^f, \quad t = 6, \quad n = 30 \times 2 + 20 = 80.$$

Par conséquent

$$e = \frac{3660^f.6.80}{36000 + 6.80} = \frac{3660^f.80}{6080} = 48^f,15.$$

509. On aurait ici

$$a = 4890^f, \quad t = 5, \quad n = 30 \times 4 + 21, \quad \text{ou} \quad n = 141.$$

Par conséquent

$$e = \frac{4890^f.5.141}{36000 + 5.141} = \frac{4890^f.141}{7341} = 93^f,92.$$

510*. Soit a la somme énoncée dans le billet, t le taux de l'intérêt, n le nombre de jours exprimant l'échéance, et e l'escompte en dehors; on a trouvé au n° **507**,

$$e = \frac{ant}{36000 + nt}.$$

L'intérêt de e est, d'après la formule du n° **467**,

$$\frac{ent}{36000}.$$

En l'ajoutant à l'escompte en dedans, on obtient

$$e + \frac{ent}{36000}, \quad \text{ou bien} \quad e \times \frac{36000 + nt}{36000}.$$

Si l'on remet pour e sa valeur ci-dessus, on trouve

$$\frac{ant}{36000+nt}\times\frac{36000+nt}{36000},$$

ou, en supprimant le facteur $36000+nt$ commun au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{ant}{36000},$$

c'est précisément l'expression de l'escompte en dehors (492).

511*. On tire de la formule [1] du n° **507**,

$$a=\frac{e(36000+nt)}{nt}.$$

On a ici $e=108$, $n=90$ et $t=6$; par conséquent

$$a=\frac{108(36000+540)}{540},\quad \text{ou}\quad a=7308^{\text{f}}.$$

512*. On a trouvé au n° **510** que l'excès de l'escompte en dehors sur l'escompte en dedans est

$$\frac{ent}{36000},$$

en appelant e l'escompte en dedans.

Dans le cas actuel, cette différence est de 20 centimes; on a d'ailleurs $n=30\times3+6=96$ et $t=5$; on peut donc écrire

$$\frac{e.96.5}{36000}=0^{\text{f}},20,$$

d'où l'on tire $$e=\frac{0^{\text{f}},20\times36000}{480}=15^{\text{f}}.$$

Il en résulte que l'escompte en dehors a pour valeur $15^{\text{f}},20$. La somme a énoncée dans le billet sera donc donnée par la relation

$$\frac{a.96.5}{36000}=15^{\text{f}},20;\quad \text{d'où}\quad a=\frac{15^{\text{f}},20\times36000}{96.5},$$

ou $$a=1140^{\text{f}}.$$

513*. On tire de la formule [1] du n° **507**,

$$e(36000+nt)=ant,\quad \text{ou}\quad e.36000+ent=ant;$$

d'où $$(a-e)nt=e.36000,$$

et, par suite, $$t=\frac{e.36000}{(a-e)n}.$$

Dans le cas actuel, on a $e = 39^f$, $a = 5239^f$, et $n = 45$; par conséquent

$$t = \frac{39.36000}{5200.45}, \quad \text{ou} \quad t = 6.$$

Le taux de l'escompte était donc 6 pour 100.

514*. On a trouvé, au numéro précédent,

$$(a - e)nt = e.36000;$$

on en tire

$$n = \frac{e.36000}{(a - e)t}.$$

Dans le cas actuel, on a $e = 24^f,50$, $a = 2474^f,50$, et $t = 5$, par conséquent

$$n = \frac{24^f,50.36000}{2450.5}, \quad \text{ou} \quad n = 72.$$

Ainsi le billet était payable dans 72 jours, ou dans 2 mois et 12 jours.

515*. D'après l'énoncé, l'escompte en dedans est les $\frac{4}{100}$ ou $\frac{1}{25}$ de la somme énoncée dans le billet. La formule [1] du n° **507** donne donc

$$\tfrac{1}{25}a = \frac{a.n.5}{36000 + n.5};$$

supprimant le facteur a, et faisant disparaître les dénominateurs, on obtient

$$36000 + 5n = 125n, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{36000}{120} = 300.$$

L'échéance était donc à 300 jours, ou 10 mois.

516*. D'après les formules des n^{os} **467** et **507**, on doit avoir

$$\frac{an.6\frac{1}{4}}{36000 + n.6\frac{1}{4}} = \frac{an.6}{36000},$$

ou

$$\frac{an.25}{144000 + 25n} = \frac{an}{6000}.$$

Divisant de part et d'autre par an, et faisant ensuite disparaître les dénominateurs, on obtient

$$6000.25 = 144000 + 25n;$$

d'où

$$25n = 150000 - 144000 = 6000,$$

et

$$n = \frac{6000}{25} = 240.$$

L'échéance du billet était donc à 240 jours, ou 8 mois.

517*. En conservant les notations précédentes, on a, en vertu des formules des n^{os} **467** et **507**, et d'après les données

$$[1] \qquad n = n' \times 12$$

et

$$[2] \qquad \frac{6060.n.5}{36000 \times n.5} = \frac{6000.n'.6}{36000} = n',$$

d'où

$$6060.5n = (36000 + 5n)\,n',$$

ou, en mettant pour n' sa valeur tirée de l'équation [1],

$$6060.5n = (36000 + 5n)(n - 12).$$

En effectuant les calculs, réduisant et ordonnant, on met cette dernière équation sous la forme

$$n^2 + 1128n - 86400 = 0.$$

Cette équation n'a qu'une racine positive, qui est

$$n = -564 + \sqrt{(564)^2 + 86400},$$

ou

$$n = -564 + \sqrt{404496} = -564 + 636 = 72.$$

Il en résulte $n' = 72 - 12 = 60$.

Ainsi le premier billet est à 72 jours, ou 2 mois et 12 jours, et le second à 60 jours ou 2 mois.

518. L'escompte en dehors se calculera d'après la formule du n° **467**, dans laquelle n représentera le nombre de jours qui restent à courir depuis le jour de l'escompte jusqu'à l'échéance du billet.

Du 22 août au 1er octobre il y a 40 jours; on aura donc

$$e = \frac{1200^f.40.6}{36000} = 8^f.$$

519. Du 1er avril au 1er juillet il y a 3 mois, que l'on est dans l'usage d'évaluer à 90 jours. Du 10 mai au 1er juillet, il y a 52 jours. D'après la règle, on aura donc, en nommant e l'escompte demandé,

$$e = \frac{1800^f.52.5}{36000 + 90.5} = 12^f,839\ldots \quad \text{ou} \quad 12^f,84.$$

520*. Soit a la somme énoncée dans le billet, t le taux de l'escompte, n le nombre de jours compris entre la date de la signature et celle de l'échéance du billet, n' le nombre de jours qui restent à courir depuis le moment où l'on escompte ce billet

jusqu'à son échéance. L'escompte en dedans pour les n jours devant être

$$\frac{ant}{36000 + nt},$$

la valeur du billet au jour de sa signature est a moins cet escompte, c'est-à-dire

$$a - \frac{ant}{36000 + nt} \quad \text{ou} \quad \frac{36000a}{36000 + nt}.$$

Au moment où l'on escompte effectivement le billet, il s'est écoulé depuis sa signature $n - n'$ jours; sa valeur réelle a donc augmenté de ses intérêts pour ces $n - n'$ jours, c'est-à-dire qu'elle a été multipliée par $1 + \frac{(n - n')t}{36000}$; elle est donc devenue

$$\frac{36000a}{36000 + nt}\left(1 + \frac{(n - n')t}{36000}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{a(36000 + nt - n't)}{36000 + nt},$$

ou encore

$$a\left(1 - \frac{n't}{36000 + nt}\right) \quad \text{ou enfin} \quad a - \frac{an't}{36000 + nt}.$$

L'escompte à prendre, ou ce qu'il faut retrancher de a, est donc

$$[1] \qquad e' = \frac{an't}{36000 + nt},$$

formule qui, traduite en langage ordinaire, donne la règle énoncée au n° **519**.

521. Du 2 octobre au 1er décembre, il y a 60 jours; du 18 octobre au 1er décembre, il y a 44 jours. Dans la formule [1] du numéro précédent il faut donc faire $e' = 28^f,90$, $n' = 44$, $n = 60$, et $t = 6$; elle devient ainsi

$$28^f,90 = \frac{a.44.6}{36000 + 60.6}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{28^f,90\,(36000 + 360)}{44.6};$$

en effectuant les calculs, on trouve $a = 3980^f,09$.

522*. Dans la formule [1] du n° **520**, il faut faire $a = 2500^f$, $n = 60$, $t = 5$, et $e' = 13^f,77$; elle devient ainsi

$$13^f,77 = \frac{2500.n'.5}{36000 + 60.5} = \frac{125.n'}{363};$$

on en tire $n' = \frac{13^f,77.363}{125}$, ou $n' = 39,988\ldots$,

ou à très-peu près $n' = 40$. Il y avait donc encore 40 jours à courir depuis la date de l'escompte jusqu'à l'échéance du billet.

523*. Dans la formule [1] du n° **520**, il faut faire

$$a = 8100^f, \quad n' = 72, \quad t = 5 \quad \text{et} \quad e' = 80;$$

elle devient ainsi

$$80^f = \frac{8100^f.72.5}{36000 + n.5} \quad \text{ou} \quad 80^f = \frac{8100^f.72}{7200 + n}.$$

On en tire $$7200 + n = \frac{8100^f.72}{80} = 7290,$$

d'où $$n = 7290 - 7200 \quad \text{ou} \quad n = 90.$$

Le nombre de jours compris entre la date de la signature et celle de l'échéance était donc 90; du jour de la signature au jour de l'escompte il s'était donc écoulé 90 — 72, ou 18 jours.

524*. L'escompte en dehors à 5 pour 100 pour 1 mois et demi, ou 45 jours, étant 30 fr., en appelant a la somme énoncée dans le billet, on a d'abord

$$30^f = \frac{a.45.5}{36000}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{36000.30^f}{45.5} = 4800^f.$$

L'escompte en dedans à 6 pour 100 ayant été de $35^f,64$, on aura ensuite, en nommant n le nombre de jours cherché,

$$35^f,64 = \frac{4800.45.6}{36000 + n.6} = \frac{4800.45}{6000 + n}.$$

On tire de là $$6000 + n = \frac{4800.45}{35,64} = 6060,6\ldots,$$

d'où $$n = 6060,6\ldots - 6000 \quad \text{ou} \quad n = 60,6\ldots.$$

Le billet avait donc été primitivement souscrit à 60 jours.

(L'inconnue n'est obtenue qu'à une unité près, parce que l'escompte en dedans n'est donné qu'à moins d'un centime.)

525*. En conservant les notations adoptées dans les numéros qui précèdent, on aura immédiatement, d'après les formules des n^{os} **520** et **467**,

$$\frac{an't}{36000 + nt} = \frac{an'(t-1)}{36000},$$

équation qui se réduit immédiatement à

$$\frac{t}{36000+nt}=\frac{t-1}{36000},$$

ou, en faisant disparaître les dénominateurs, réduisant et ordonnant,

$$nt^2-nt-36000=0,$$

équation dans laquelle n est égal à 40×30 ou 1200.

On en tire, en ne prenant que la valeur positive,

$$t=\frac{n+\sqrt{n^2+4n.36000}}{2400},$$

ou, en mettant pour n sa valeur,

$$t=\frac{1200+\sqrt{(1200)^2+4.1200.36000}}{2n},$$

ou $$t=\frac{1200+\sqrt{174240000}}{2400}=\frac{1200+13200}{2400},$$

ou enfin $$t=\frac{14400}{2400}=\frac{144}{24}=6.$$

Le taux convenu était donc 6 pour 100.

CHAPITRE IV.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES SUR LES OPÉRATIONS DE BOURSE.

§ 1. De la rente.

526. Puisque $93^f,50$ rapportent $4^f,50$ d'intérêt annuel ou de rente, 100 fr. rapporteraient un intérêt x donné par la proportion

$$93,50 : 100 = 4^f,50 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4^f,50 \times 100}{93,50} = 4^f,812....$$

On place donc son argent à un peu plus de 4,81 pour 100.

527. Puisque $67^f,90$ rapportent 3 fr. d'intérêt annuel, 100 fr. rapporteraient un intérêt x donné par la proportion

$$67,90 : 100 = 3^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3^f \times 100}{67,90} = 4^f,418....$$

On place donc son argent à un peu moins de 4,42 pour 100.

528. Le $4\frac{1}{2}$ étant au pair, il faut un capital de 100 fr. pour rapporter $4^f,50$; pour rapporter 3 fr., il faudrait donc un capital x donné par la proportion

$$4^f,50 : 100^f = 3^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3^f \times 100}{4^f,50} = 66^f,666....$$

Le cours du 3 pour 100 devrait donc être 66,67.

529. Le 3 étant au pair, il faut un capital de 100 fr. pour rapporter 3 fr.; pour rapporter $4^f,50$, il faudrait donc un capital x donné par la proportion

$$3^f : 100^f = 4^f,50 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4^f,50 \times 100}{3} = 150.$$

Le cours du $4\frac{1}{2}$ pour 100 devrait donc être 150.

530. Le cours du 4 $\frac{1}{2}$ étant 94,80, il faut un capital de $94^f,80$ pour rapporter $4^f,50$ d'intérêt; pour rapporter 3 fr., il faudrait donc un capital x donné par la proportion

$$4^f,50 : 94^f,80 = 3^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{94^f,80 \times 3}{4,50} = 63^f,20.$$

Le 3 pour 100 devrait donc être à 63,20.

531. Le 3 pour 100 étant à 69,60, il faut un capital de $69^f,60$ pour rapporter 3 fr. d'intérêt; pour rapporter $4^f,50$, il faudrait donc un capital x donné par la proportion

$$3^f : 69^f,60 = 4^f,50 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{69^f,60 \times 4,50}{3} = 104^f,40.$$

Le 4 $\frac{1}{2}$ pour 100 devrait donc être à 104,40.

532. Puisque $4^f,50$ de rente valent $93^f,50$, les 846 fr. de rente vaudront autant de fois $93^f,50$ que $4^f,50$ est contenu de fois dans 846 fr.; la valeur demandée est donc

$$93^f,50 \times \frac{846}{4,50} \quad \text{ou} \quad 93^f,50 \times 188, \quad \text{ou enfin} \quad 17578^f.$$

533. Puisque 3 fr. de rente valent $68^f,60$, les 645 fr. de rente vaudront autant de fois $68^f,60$ que 3 fr. est contenu de fois dans 645 fr.; la valeur demandée est donc

$$68^f,60 \times \frac{645}{3} \quad \text{ou} \quad 68^f,60 \times 215, \quad \text{ou enfin} \quad 14749^f.$$

534. Pour $94^f,25$ on aurait $4^f,50$ de rente; pour 12818 fr. on aurait donc une quantité de rentes x donnée par la proportion

$$94^f,25 : 4^f,50 = 12818^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{12818^f . 4,50}{94,25},$$
$$\text{ou } x = 612^f.$$

On aurait donc 612^f de rentes.

535. Pour $67^f,75$ on aurait 3 fr. de rentes; pour 16802 fr. on aurait donc une quantité de rentes x donnée par la proportion

$$67^f,75 : 3^f = 16802^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{16802^f \times 3}{67,75},$$
$$\text{ou } x = 744^f.$$

On aurait donc 744 fr. de rentes.

536. Si pour avoir 3000 fr. de rentes il faut 60000 fr. de ca-

pital, pour avoir $4^f,50$ de rentes il faudra un capital x donné par la proportion

$$3000^f : 60000^f = 4^f,50 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4,50 \times 60000}{3000},$$
$$\text{ou } x = 90.$$

Le cours du $4\frac{1}{2}$ pour 100 devrait donc être à 90.

537. Si pour avoir 2400 fr. de rentes il faut 48000 fr. de capital, pour avoir 3 fr. de rentes il faudra un capital x donné par la proportion

$$2400^f : 48000^f = 3^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3 \times 48000}{2400},$$
$$\text{ou } x = 60.$$

Le cours du 3 pour 100 devrait donc être à 60.

538. Pour résoudre cette question, il faut chercher à quel taux réel on place son argent dans ces deux hypothèses.

En achetant du $4\frac{1}{2}$, on place son argent à un taux x donné par la proportion

$$92,50 : 4,50 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4,50 \times 100}{92,50} = 4,864.$$

En achetant du 3 p. 100, on place son argent à un taux y donné par la proportion

$$67,80 : 3 = 100 : y, \quad \text{d'où } y = \frac{3 \times 100}{67,80} = 4,424....$$

Il vaut donc mieux acheter du $4\frac{1}{2}$ p. 100; et, en choisissant cette voie, on gagnera $4^f,864 - 4^f,424...$, c'est-à-dire $0^f,44$ pour chaque somme de 100 fr. de capital; sur les 20000 fr., qui valent 200 fois 100 fr., on gagnera donc 200 fois $0^f,44$, c'est-à-dire 88 fr.

539. Si l'on achète du $4\frac{1}{2}$ p. 100, on place son argent à un taux x donné par la proportion

$$96 : 4,50 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4,50 \times 100}{96} = 4,6875....$$

Si l'on achète du 3 p. 100, on place son argent à un taux y donné par la proportion

$$63 : 3 = 100 : y, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{3 \times 100}{63} = 4,7619....$$

Il y a donc avantage à acheter du 3 p. 100; et, en choisissant

cette voie, on gagnera $4^f,7619 - 4^f,6875$, c'est-à-dire $0^f,0744$ par chaque somme de 100 fr. de capital; sur les 36800 fr. on gagnera donc $0^f,0744 \times 368$, c'est-à-dire $27^f,3792...$ ou $27^f,38$.

540. On gagne $94^f,60 - 92^f,80$, c'est-à-dire $1^f,60$ sur $92^f,80$; sur 1 fr. on gagnerait donc $\frac{1^f,60}{92,80}$; et sur 100 fr. on gagnerait $\frac{1^f,60 \times 100}{92,80}$, c'est-à-dire $1^f,724....$ Ainsi l'on gagne un peu plus de 1,72 pour 100.

Pour avoir le gain total, il faut d'abord calculer le prix d'achat. En l'appelant x, on a

$$4,50 : 92,80 = 540 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{92,80.540}{4,50}.$$

On aura de même, en appelant x' le prix de vente,

$$4,50 : 94,60 = 540 : x', \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{94,60.540}{4,50}.$$

Le gain total est donc exprimé par

$$\frac{94,60.540}{4,50} - \frac{92,80.540}{4,50}, \quad \text{ou par} \quad \frac{1^f,60.540}{4,50}.$$

En effectuant le calcul, on trouve 192 fr.

541. On perd $69^f,40 - 63^f,25$, c'est-à-dire $6^f,15$ sur $69^f,40$; sur 1 fr. on perdrait $\frac{6^f,15}{69^f,40}$; et sur 100 fr., on perdrait $\frac{6^f,15 \times 100}{69,40}$, c'est-à-dire $8^f,861....$ Ainsi l'on perd un peu plus de 8,86 pour 100.

Le prix d'achat est le quatrième terme de la proportion

$$3 : 69,40 = 840 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{69,40 \times 840}{3}.$$

Le prix de vente est le quatrième terme de la proportion

$$3 : 63,25 = 840 : y, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{63,25 \times 840}{3}.$$

La perte totale est donc

$$\frac{(69,40 - 63,25).840}{3}, \quad \text{ou} \quad 6^f,15.280, \quad \text{ou enfin} \quad 1722 \text{ fr.}$$

542*. Soit t le taux de la rente, c le cours auquel elle a été

achetée, c' le cours auquel elle est revendue, et a la quotité de cette rente.

Si l'on veut avoir le gain (ou la perte) pour 100, on remarque que sur a francs de rente on gagne $c - c'$; sur 1 fr. on gagnerait $\frac{c - c'}{a}$, et sur 100 fr. on gagnerait $\frac{(c - c')\,100}{a}$; c'est-à-dire que *le gain* (ou la perte) *pour* 100 *est exprimé par la différence des deux cours, multipliée par* 100 *et divisée par la quotité de rentes considérée.*

Si l'on veut avoir le gain total (ou la perte totale), on remarque que le prix d'achat est le quatrième terme de la proportion

$$t : c = a : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{ca}{t}.$$

Le prix de vente est le quatrième terme de la proportion

$$t : c' = a : x', \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{c'a}{t}.$$

Le gain total est donc exprimé par

$$\frac{ca}{t} - \frac{c'a}{t} \quad \text{ou} \quad \frac{(c - c')\,a}{t},$$

c'est-à-dire que *pour obtenir le gain total* (ou la perte totale) *il faut multiplier la différence des deux cours par la quotité de rentes considérée et diviser par le taux de la rente.*

543. D'après ce qui a été dit dans les numéros précédents, 600 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ p. 100, au cours de 92,70, valent

$$\frac{92{,}70 \,.\, 600}{4{,}5} \quad \text{ou} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12360^{f}$$

450 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ p. 100, au cours de 94 fr., valent

$$\frac{94 \,.\, 450}{4{,}5} \quad \text{ou} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9400^{f}$$

200 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100, au cours de 95,40, valent

$$\frac{95{,}40 \,.\, 200}{4{,}5} \quad \text{ou} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4240^{f}$$

La somme totale déboursée est donc..... 26000^{f}

La quantité totale de rentes achetées est d'ailleurs

$$600^{f} + 450^{f} + 200^{f} \quad \text{ou} \quad 1250^{f}.$$

Le cours moyen demandé est donc le quatrième terme de la proportion

$$1250^f : 26000^f = 4^f,50 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 93,60.$$

544. Les 510^f de rentes à 69,80 valent $\frac{69,80.510}{3}$ ou 11866^f;

420^f — 66,50 — $\frac{66,50.420}{3}$ ou 9310^f;

150^f — 63,90 — $\frac{63,90.150}{3}$ ou 3195^f;

La somme totale déboursée est donc ..... 24371^f.

La quantité totale de rentes achetées est d'ailleurs 1080 fr. Le cours moyen demandé est donc le quatrième terme de la proportion

$$1080^f : 24371^f = 3^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 67,697...$$

ou à très-peu près, 67,70.

545. La quantité totale de rentes achetées est $1200^f + 1500^f + 300^f$ ou 3000^f. Pour avoir 3000 fr. de rentes 3 p. 100 au cours de 63,60, il faudrait débourser une somme x donnée par la proportion

$$3^f : 63^f,60 = 3000^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 63600^f.$$

Or, on a dépensé, pour avoir 1200 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ p. 100 au cours de 93,60, une somme y donnée par la proportion

$$4^f,5 : 93^f,60 = 1200^f : y, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{93^f,60.1200}{4,50} = 24960^f.$$

On a dépensé pour avoir 1500 fr. de rentes 3 p. 100 au cours de 65, une somme z donnée par la proportion

$$3^f : 65^f = 1500^f : z, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{65^f.1500}{3} = 32500^f.$$

Les deux sommes ainsi dépensées forment un total de 57460 fr.; et, en le retranchant de 63600 fr., on obtient pour reste 6140 fr.; c'est le prix des 300 fr. de rentes 4 p. 100 augmenté de 140 fr.; ce prix lui-même est donc 6000 fr. Dès lors le cours du 4 p. 100 est le quatrième terme de la proportion

$$300^f : 6000^f = 4^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 80^f.$$

Le cours du 4 p. 100 était donc 80.

546. Puisqu'on revend $94^f,50$ ce qui a été payé 92,80, le ca-

pital primitivement déboursé se trouve avoir été multiplié par le rapport de ces deux cours, c'est-à-dire par $\frac{945}{928}$; et le produit est le nouveau capital employé à acheter de la rente 3 p. 100. Or, par un raisonnement analogue, on verrait que ce dernier a été à son tour multiplié par $\frac{659}{634}$; le capital primitif a donc été multiplié en définitive par le produit des deux fractions $\frac{945}{928}$ et $\frac{659}{634}$, lequel produit, converti en décimales donne 1,05847.... Le capital primitif a donc augmenté des 0,05847... de ce capital.

Si le capital primitif était 100 fr., le gain serait donc $100^f \times 0{,}05847...$, c'est-à-dire $5^f{,}847...$; ainsi le gain définitif est d'un peu moins de 5,85 pour 100.

Pour obtenir le gain total, il faut déterminer le capital primitivement déboursé. Or, ce capital est le quatrième terme de la proportion

$$4^f{,}50 : 92^f{,}80 = 1800^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 37120^f.$$

Le gain total est le produit de ce capital primitif par 0,05847..., c'est-à-dire $2170^f{,}4064...$ ou à peu près $2170^f{,}40$.

547. Puisqu'on revend $68^f{,}20$ ce qu'on a acheté $67^f{,}60$, le capital primitif a été multiplié par $\frac{68{,}20}{67{,}60}$ ou par $\frac{682}{676}$, et le produit est le ouveau capital employé à acheter du $4\frac{1}{2}$ p. 100.

Puisqu'on revend ensuite $92^f{,}30$ ce qu'on a acheté $95^f{,}40$, le nouveau capital a été multiplié par $\frac{92^f{,}30}{95{,}40}$ ou par $\frac{923}{954}$. Le capital primitif a donc été multiplié par $\frac{682}{676} \times \frac{923}{954}$ ou par 0,976092....

Le capital primitif a donc diminué d'une fraction de ce capital marquée par la différence entre l'unité et 0,976092..., c'est-à-dire qu'il a diminué des 0,023908... de sa valeur.

Pour un capital de 100 fr. la perte serait donc $100^f \times 0{,}023908...$ ou $2^f{,}39$; ainsi la perte définitive est d'un peu plus de 2,39 p. 100.

Le capital primitivement déboursé est le quatrième terme de la proportion

$$3 : 67{,}60 = 1500^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 33800^f.$$

La perte totale est le produit de ce capital primitif par 0,023908..., c'est-à-dire $808^f{,}0904...$ ou $808^f{,}09$.

548*. Soit a la quantité de rentes au taux t achetées au cours

c et revendues au cours c', pour acheter de la rente au taux t' au cours c'' que l'on revend au cours c'''.

Puisqu'on revend c' ce qu'on a acheté c, le capital primitif a été multiplié par $\frac{c'}{c}$; et le produit est le nouveau capital employé à acheter de la rente au taux t'. Puisqu'on revend c''' ce qu'on a acheté c'', ce nouveau capital se trouve multiplié par $\frac{c'''}{c''}$, en sorte que le capital primitif a été multiplié par $\frac{c'}{c}.\frac{c'''}{c''}$ ou par $\frac{c'c'''}{cc''}$. Soit A le capital primitif, il est donc devenu $A.\frac{c'c'''}{cc''}$; et si l'on en retranche A, on aura le gain ou la perte, selon que le résultat sera positif ou négatif. Ce résultat est

$$[1] \qquad A\left(\frac{c'c'''}{cc''}-1\right).$$

Si l'on veut avoir le gain ou la perte pour 100, il faut faire $A=100$ dans cette formule, ce qui donne

$$100\left(\frac{c'c'''}{cc''}-1\right).$$

Si l'on veut avoir le gain total ou la perte totale, il faut mettre à la place de A sa valeur, qui est le quatrième terme de la proportion.

$$t:c=a:A, \quad \text{d'où} \quad A=\frac{ac}{t}.$$

Par suite, le gain total ou la perte totale ont pour expression

$$\frac{ac}{t}\left(\frac{c'c'''}{cc''}-1\right), \quad \text{ou} \quad \frac{a}{t}\left(\frac{c'c'''}{c''}-c\right).$$

549. Soit A la valeur du capital, et c le cours du $4\frac{1}{2}$ pour 100; la quantité A est le quatrième terme de la proportion

$$4{,}50:c=3600:A, \quad \text{d'où} \quad A=c.\frac{3600}{4{,}5}=c.800,$$

c'est-à-dire que le capital a pour valeur le produit du cours de la rente par le nombre 800. Si donc le cours baisse de 5 centimes, ou de $0^f{,}05$, le capital baissera de 800 fois $0^f{,}05$, ou bien de 40 fr.

550. Si A désigne le capital, et c le cours du 3 pour 100, on a

$$3 : c = 4800^{f} : A, \quad \text{d'où} \quad A = c \,.\, \frac{4800}{3} = c \,.\, 1600.$$

Si donc le cours du 3 pour 100 s'élève de $0^{f},05$, le capital s'accroîtra de $0^{f},05 \times 1600$ ou de 80 fr.

551. On a vu aux deux numéros précédents que pour obtenir la variation du capital, il faut multiplier la variation du cours par le rapport entre la quotité de rentes et le taux. Réciproquement, pour obtenir la quotité de rentes, il faudra multiplier la variation du capital par le taux, et diviser le produit par la variation du cours.

Dans le cas actuel, on aura donc

$$\frac{500^{f} \,.\, 4,50}{0^{f},10}, \quad \text{ou bien} \quad 22500^{f}.$$

Le titre est donc de 22500 fr. de rentes.

552. D'après ce qui a été dit au numéro précédent, la quotité de rentes cherchée sera exprimée par

$$\frac{600^{f} \,.\, 3}{0^{f},15}, \quad \text{ou bien} \quad 12000^{f}.$$

553. Puisque la variation du capital s'obtient en multipliant la variation du cours par la quotité de rentes et en divisant par le taux, réciproquement le taux de la rente s'obtiendra en multipliant la variation du cours par la quotité de rentes et en divisant par la variation du capital. Dans le cas actuel, on aura donc

$$\frac{0^{f},20 \,.\, 1800}{80} \quad \text{ou} \quad 4,50.$$

Le taux de la rente est donc $4\frac{1}{2}$.

554. D'après ce qui a été dit au numéro précédent, le taux de la rente sera exprimé par

$$\frac{0^{f},30 \,.\, 2400}{240}, \quad \text{c'est-à-dire par} \quad 3.$$

Le taux de la rente est donc 3.

555*. Soit A le capital, a la quotité de rentes, c le cours et t le taux; on aura

$$t : c = a : \mathrm{A}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A} = c.\frac{a}{t}.$$

Soit α l'accroissement (positif ou négatif) du capital qui répond à un accroissement γ (positif ou négatif) dans le cours de la rente; on aura de même

$$\mathrm{A} + \alpha = (c + \gamma).\frac{a}{t} = c.\frac{a}{t} + \frac{\gamma a}{t},$$

et, par conséquent,

$$\alpha = \gamma.\frac{a}{t},$$

c'est-à-dire que *la variation du capital est égale à la variation du cours, multiplié par la quotité de rentes, et divisée par le taux.*

Si a est l'inconnue, on tire de la relation précédente

$$a = t.\frac{\alpha}{\gamma},$$

c'est-à-dire que *la quotité de rentes est égale au taux multiplié par le rapport entre la variation du capital et la variation du cours.*

Si t est l'inconnue, on tire de la même relation

$$t = a.\frac{\gamma}{\alpha},$$

c'est-à-dire que *le taux est égal à la quotité de rentes multipliée par le rapport entre la variation du cours et la variation du capital.*

556*. Soient x et y les deux parties du capital, on a d'abord l'équation

$$[1] \qquad x + y = 100000^{\mathrm{f}}.$$

Maintenant, au cours de 93, une somme x placée en rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 rapporte une quantité de rentes a, qui est le quatrième terme de la proportion

$$93 : 4{,}50 = x : a, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{4{,}50}{93}x.$$

Au cours de 69, une somme y placée en rentes 3 pour 100 rap-

porte une quantité de rentes b, qui est le quatrième terme de la proportion

$$69 : 3 = y : b, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{3}{69} y.$$

Les 100000 fr., à 4 pour 100, rapportaient annuellement 4000 fr.; puisque, par le nouveau mode de placement, on gagne 500 fr. de rentes, la quantité totale de rentes s'élève à 4500 fr. On a donc cette seconde équation

$$[2] \qquad \frac{4,50}{93} x + \frac{3}{69} y = 4500,$$

qui peut être mise sous la forme

$$[3] \qquad 34,5\,x + 31\,y = 3208500.$$

Si l'on prend dans [1] la valeur de y pour la substituer dans cette dernière, on obtient

$$34,5\,x + 31 . 100000 - 31\,x = 3208500,$$

ou $$3,5\,x = 3208500 - 3100000 = 108500;$$

d'où $$x = \frac{108500}{3,5} = 31000^{\text{f}}.$$

Par suite, $$y = 100000^{\text{f}} - 31000^{\text{f}} = 69000^{\text{f}}.$$

On a donc placé 31000 fr. en rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100, et 69000 fr. en rentes 3 pour 100.

§ 2. Opérations au comptant.

557. On aurait à débourser 1° le prix de la marchandise, qui est de 25 fois $128^{\text{f}},50$, c'est-à-dire . . . . . $3212^{\text{f}},50$
2° la moitié du centième de cette somme, ou . . . . $16,06$
Total. . . . . $3228^{\text{f}},56$

558. Le prix de la marchandise est $165^{\text{f}} \times 640$ ou 10560^{f}
Il faut en retrancher la moitié du centième de cette somme ou. . . . . $52,80$
pour le droit de courtage. Il reste donc à recevoir . . $10507^{\text{f}},20$

559. On aura à débourser 500 fois $11^{\text{f}},80$ ou. . . . 5900^{f}
plus le huitième du centième de cette somme, ou. . . $7,37$
Total. . . . . $5907^{\text{f}},37$

560. S'il n'y avait pas de droit de courtage, on devrait toucher

1° $3093^f,30 \times 2,650$ ou	$8197^f,24$
2° 2 fr. par 1000 fr., c'est-à-dire $2^f \times 8,197$... ou .	16 ,39
Total.	$8213^f,63$

Mais il faut retrancher de cette somme le huitième du centième de $8197^f,24$, c'est-à-dire. . . . . $10^f,24$

Il reste donc à recevoir. . . . . $8203^f,39$

561. Les 600 hectolitres à 38 fr, font . . . . . 22800^f

Ajoutant la moitié du centième ou. 114

on obtient pour total le prix de revient . . . . . 22914^f.

Ces 600 hectolitres à $38^f,75$ font. . . . . 23250^f

Retranchant la moitié du centième ou. . . . . $116^f,25$

on obtient le prix net de vente . . . . . $23133^f,75$

Le bénéfice total est donc $23133^f,75 - 22914$ fr. ou $219^f,75$.

Le bénéfice rapporté à 100 sera donné par la proportion

$$22914^f : 219^f,75 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0,95902....$$

Mais ce bénéfice se rapporte à 2 mois; pour l'année il serait 6 fois plus grand, c'est-à-dire 5,75412.... Ainsi, par l'opération dont il s'agit, on a placé son argent à un peu plus de $5\frac{3}{4}$ pour 100.

562. Le prix de l'hectolitre étant. . . . . 160^f

si l'on y ajoute $\frac{1}{2}$ pour 100 ou. . . . . 0 ,80

on obtient le prix de revient réel. . . . . $160^f,80$

Les 5 pour 100 de ce prix valent $8^f,04$; en en prenant le douzième, on obtient l'intérêt pour 1 mois, c'est-à-dire le bénéfice net, qui est $0^f,67$.

Si l'on ajoute ce bénéfice net au prix réel de revient, on obtient le prix net de vente, c'est-à-dire diminué du courtage; on trouve $161^f,47$.

Or ce nombre doit être égal au prix cherché de l'hectolitre diminué de $\frac{1}{2}$ pour 100, c'est-à-dire diminué de $\frac{1}{200}$ de sa valeur; le nombre $161^f,47$ est donc les $\frac{199}{200}$ du prix cherché; et pour obtenir celui-ci, il faut diviser $161^f,47$ par $\frac{199}{200}$, c'est-à-dire le multiplier par 200 et diviser le produit par 199; on trouve $162^f,281$... ou à très-peu près $162^f,28$.

On peut vérifier, en effet, qu'en revendant l'hectolitre à ce prix on obtiendrait un bénéfice net de $0^f,67$ pour 1 mois, ce qui revient à 5 pour 100 pour un an.

563. On a acheté les 100 kilogrammes d'huile de colza au prix de $122^f,50$; mais on a payé un premier courtage de $\frac{1}{2}$ pour 100, c'est-à-dire de $0^f,6125$ par 100 kil., ce qui élève le prix d'achat à $123^f,1125$. On revend les 100 kilog. au prix de 126 fr.; mais on supporte un second courtage de $\frac{1}{2}$ pour 100, c'est-à-dire de $0^f,63$ par 100 kilog., ce qui réduit le prix de vente à $125^f,37$. Le bénéfice par quintal est donc $125^f,37 - 123^f,1125$ ou $2^f,2575$. Mais ce bénéfice est rapporté au prix réel d'achat, c'est-à-dire à $123^f,1125$; le bénéfice pour 1 fr. serait donc $\frac{2^f,2575}{123,1125}$; le bénéfice pour 100 fr. serait $\frac{2^f,2575 \times 100}{123,1125}$ ou $1^f,833680...$ Ce bénéfice est rapporté au nombre inconnu de jours compris entre l'achat et la vente; pour obtenir le bénéfice par jour, il faudrait diviser $1^f,83368$ par le nombre de jours inconnu; et l'on aurait ensuite le bénéfice annuel en multipliant le quotient par 360. Cela revient à multiplier $1^f,83368$ par 360, ce qui donne $660^f,12480$ et à diviser le produit par le nombre de jours cherché. Or, d'après l'énoncé, le quotient doit être 6 fr., à très-peu près; le nombre $660^f,12480$ est donc, à très-peu près, le produit du nombre de jours cherché par 6; on aura donc, à très-peu près, ce nombre de jours en divisant $660^f,12480$ par 6, ce qui donne 110,02... ou à très-peu près 110 jours, c'est-à-dire 3 mois et 20 jours.

564. Les 15000 kilog. font 150 quintaux; ces 150 quintaux d'huile à 128 fr. le quintal valent $128^f \times 150$ ou . . . . . 19200^f
Si l'on en retranche $\frac{1}{2}$ pour 100 de courtage, soit. . . . . 96^f
on obtient le prix net de vente des colzas, savoir. . . . . 19104^f

Le prix de l'hectolitre de trois-six est 160 fr.; mais il faut y ajouter $\frac{1}{2}$ pour 100 de courtage, soit $0^f,80$, ce qui met le prix réel à $160^f,80$.

Pour 19104 fr. on achètera un nombre d'hectolitres de trois-six marqué par le quotient de ce nombre par $160^f,80$ prix de l'hectolitre; si l'on suppose qu'on achète un nombre rond d'hectolitres, on ne devra prendre que la partie entière de ce quotient qui est 118; le reste $129^f,60$ exprimera la portion du capital non employée; par conséquent la portion employée sera $19104^f - 129^f,60$, c'est-à-dire $18974^f,40$.

Les trois-six étant remontés à 165 fr., le prix de vente se composera de $165^f \times 118$, c'est-à-dire. . . . . 19470^f
dont il faut retrancher $\frac{1}{2}$ pour 100 de courtage ou . . $97,35$
Le prix réel de vente est donc. . . . . $19372^f,65$

Les 100 kilog. de colzas étant descendus à 122 fr., le prix des 150 quintaux sera $122^f \times 150$ ou. . . . . 18300^f
à quoi il faut ajouter $\frac{1}{2}$ pour 100 de courtage ou. . . . 91^f,50
Le prix réel de rachat sera donc . . . . . 18208^f,50

Le négociant gagne donc la différence entre 19372^f,65 et 18208^f,50, c'est-à-dire 1164 fr. Il faut y ajouter les 129^f,60, résultant de la vente primitive, qui n'ont pas été employés; ce qui porte le bénéfice total à 1293^f,60.

Le capital engagé dans cette opération est la valeur des 150 quintaux de colza au moment de la première vente, c'est-à-dire 19200 fr. Le négociant a donc gagné 1293^f,60 sur 19200 fr.; le bénéfice pour 100 est donc exprimé par

$$\frac{1293^f,60 \times 100}{19200} \quad \text{ou} \quad 6,737....$$

Mais ce bénéfice se rapporte à une durée de 8 mois; pour l'année il faudrait l'augmenter de sa moitié, ce qui donnerait 10,105..., ou un peu plus de 10,1 pour 100. (Mais il faudrait en déduire en réalité les frais de transport et de magasins, les déchets inévitables, etc.)

565. On aura à débourser d'abord une somme donnée par la proportion

$$4^f,50 : 93^f,80 = 810^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{93^f,80 \times 810}{4,50}.$$

Il faut y ajouter un courtage de $\frac{1}{8}$ pour 100, calculé d'après la valeur du titre de rentes *au pair;* or cette valeur est

$$\frac{100^f \times 810}{4,50}, \quad \text{dont le centième est} \quad \frac{810}{4,50}.$$

Le huitième de cette quantité est le produit de cette quantité par

$$\frac{1}{8} \quad \text{ou par} \quad 0,125, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{0,125 \times 810}{4,50};$$

la somme totale à débourser est donc

$$\frac{93^f,80 \times 810}{4,50} + \frac{0,125 \times 810}{4,50} \quad \text{ou} \quad \frac{(93^f,80 + 0,125).810}{4,50},$$

c'est-à-dire qu'il suffit d'ajouter 0^f,125 au cours de la rente pour tenir compte du droit de courtage; on obtient ainsi

$$\frac{93^f,925 \times 810}{4,50} \quad \text{ou} \quad 16906,50.$$

566. D'après ce qui a été dit au numéro précédent, il suffit,

pour tenir compte du courtage, d'ajouter $0^f,125$ au cours de la rente, ce qui donne 68,025; la somme à débourser s'obtient alors par la proportion

$$3^f : 68^f,025 = 630^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{68^f,025 \times 630}{3} = 14285^f,25.$$

567. On verrait, comme au n° 565, que pour tenir compte du courtage il faut *retrancher* 0,125 du cours de la rente, qui devient ainsi 94,075, et calculer la somme à débourser par la proportion

$$4^f,50 : 94^f,075 = 630^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{94^f,075 \times 630}{4^f,50} = 13170^f,50.$$

568. Pour tenir compte du courtage, il faut retrancher $0^f,125$ du cours de la rente, qui devient ainsi 69,625, et calculer la somme cherchée par la proportion

$$3^f : 69^f,625 = 810^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{69^f,625 \times 810}{3} = 18798^f,75.$$

569. On sait que la moyenne arithmétique entre deux nombres s'obtient en les additionnant et en prenant la moitié du résultat; ainsi le cours moyen est ici $\frac{1}{2}(93,80 + 94,30)$, c'est-à-dire 94,05. Il faut y ajouter 0,125 pour tenir compte du courtage, ce qui donne 94,175; la somme à débourser sera donc donnée par la proportion

$$4^f,50 : 94^f,175 = 405^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{94^f,175 \times 405}{4,50} = 8475^f,75.$$

570. La moyenne entre 67,70 et 68,50 est $\frac{1}{2}(67,70 + 68,50)$, c'est-à-dire 68,10. Il faut en retrancher 0,125 pour tenir compte du courtage, ce qui donne 67,975; la somme à débourser s'obtiendra donc par la proportion

$$3^f : 67^f,975 = 360^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{67^f,975 \times 360}{3} = 8157^f.$$

571. On tiendra compte des courtages en ajoutant 0,125 au cours d'achat, et en retranchant ce même nombre du cours de vente, ce qui revient à retrancher deux fois 0,125 ou 0,25 du cours d'achat, sans toucher au cours de vente. Ainsi le résultat sera le même que si l'on eût acheté à $92,70 + 0,25$ ou 92,95, et revendu à 94,30. La différence $1^f,35$ exprime le bénéfice pour chaque rente de $4^f,50$; le bénéfice total s'obtiendra donc en répétant $1^f,35$ autant de fois que $4^f,50$ est contenu dans 9000 fr., c'est-à-dire 2000 fois, ce qui donne 2700 fr.

Pour obtenir le taux du bénéfice, on remarquera que l'on a gagné $1^f,35$ sur $92^f,95$ déboursés; ce gain se rapporte à 3 mois; pour l'année, il serait 4 fois plus grand, ou $5^f,40$. Le bénéfice annuel pour 1 fr. déboursé serait donc $\frac{5^f,40}{92,95}$; et le bénéfice pour 100 est, par conséquent,

$$\frac{5^f,40 \times 100}{92,95}, \text{ c'est-à-dire } 5^f,809..., \text{ ou environ } 5^f,81.$$

572. On tiendra compte des courtages en ajoutant, comme ci-dessus, 0,25 au cours d'achat, qui devient ainsi 69,75. La différence entre ce nombre et le cours de vente 65,70, c'est-à-dire $4^f,05$, exprime la perte pour chaque rente de 3 fr.; on aura donc la perte totale en répétant $4^f,05$ autant de fois que 3 est contenu dans 15000, c'est-à-dire 5000 fois, ce qui donne 20250 fr.

La perte étant de $4^f,05$ pour $69^f,75$ déboursés, la perte pour 1 fr. déboursé serait $\frac{4^f,05}{69,75}$; la perte pour 100 est donc

$$\frac{4,05 \times 100}{69,75}, \text{ c'est-à-dire } 5^f,806, \text{ ou environ } 5^f,81.$$

573. En tenant compte des courtages, on achète 4500 fr. de rente $4\frac{1}{2}$ pour 100 au cours de 95,125, et pareille quantité au cours de 91,125; le résultat est le même que si l'on eût acheté le tout à un cours moyen entre 95,125 et 91,125, c'est-à-dire au cours de 93,125. Or, on revend le tout au cours de 93,25—0,125, en tenant compte du courtage, c'est-à-dire qu'on revend au cours de 93,125, qui est le cours réel d'achat; on n'a donc ni gagné ni perdu à cette opération.

574. 1° En tenant compte des courtages, les deux cours d'achat sont réellement 70,325 et 64,525. La moyenne de ces deux cours est 67,425; c'est à ce cours qu'il faudrait revendre pour n'éprouver aucune perte.

2° Si l'on revend à 67,65, ce qui revient à 67,65 — 0,125, ou à 67,525, en tenant compte du courtage, on gagnera pour chaque rente de 3 fr. la différence entre $67^f,525$ et 67,425, c'est-à-dire $0^f,10$. Le gain total s'obtiendra donc en répétant $0^f,10$ autant de fois que 3 fr. est contenu dans 6000 fr., c'est-à-dire 2000 fois, ce qui donne 200 fr.

Remarque. On peut remarquer que dans le cas où l'on veut *faire une commune*, le cours intermédiaire auquel il faut revendre pour ne pas éprouver de perte, s'obtient en prenant la moyenne des deux cours d'achat, et ajoutant 0,25 pour les courtages.

575. D'après la remarque ci-dessus, il faut, pour trouver le cours demandé, calculer la moyenne entre 94,80 et 90,10, laquelle est 92,45, et y ajouter 0,25 pour les courtages, ce qui donne 92,70.

576. Si du cours 67,35, auquel on revend sans perte, on retranche 0,25 provenant des courtages, le reste, 67,15, exprimera la moyenne entre 71,10 et le cours cherché; par conséquent, en doublant 67,15 on aura la somme du cours le plus haut, 71,10, et du cours le plus bas que l'on cherche; or, le double de 67,15 est 134,30; retranchant 71,10, on obtient pour reste 63,20; c'est le cours demandé.

577. Les 495 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100, au cours de 96,40, représentent un capital exprimé par

$$\frac{96^f,40 \times 495}{4,50}, \quad \text{ou} \quad 10604^f.$$

D'après ce qui a été dit au n° **574**, chaque somme de $63^f,70$ de capital donnera lieu à un courtage de $0^f,125$; le prix réel de 3 fr. de rentes sera donc $63^f,70 + 0^f,125$ ou $63^f,825$; et le prix de 1 fr. de rentes sera le tiers de cette somme, ou $21^f,275$. En divisant 10604 fr. par ce prix, on aura le nombre de francs de rentes 3 pour 100 que l'on peut acquérir. La partie entière du quotient est 498 fr., et le reste est $9^f,05$. On aurait donc 498 fr. de rentes 3 pour 100 (voy. le n° **565**), et il resterait une somme de $9^f,05$ non employée.

578. Les 1260 fr. de rentes 3 pour 100, au cours de 70,30, représentent un capital exprimé par

$$\frac{70^f,30 \times 1260}{3}, \quad \text{ou} \quad 29526^f.$$

Chaque somme de $90^f,20$ de capital donnant lieu à un courtage de $0^f,125$, le prix réel de $4^f,50$ de rentes sera $90^f,325$, et le prix de 1 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 sera $90^f,325 : 4,5$.

On obtiendra donc le nombre de francs de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 que l'on cherche, en divisant le capital 29526 fr. par ce quotient, ou, ce qui revient au même, en multipliant 29526 fr. par 4,5, et divisant le produit par 90,325. La partie entière du résultat est 1470 fr., et il reste $89^f,25$; ainsi l'on aurait 1470 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100, et il resterait une somme de $89^f,25$ non employée.

579*. 1° En tenant compte du courtage, le prix réel d'achat

est $c_1 + 0,125$; la quotité r_1 de rentes 3 pour 100 achetée sera donc donnée par la proportion]

$$c_1 + 0,125 : 3 = a_1 : r_1, \quad \text{d'où} \quad r_1 = \frac{a_1 . 3}{c_1 + 0,125}; \qquad [1]$$

2° La vente au cours c_2 produira un capital a_2 donné par la proportion

$$3 : c_2 = r_1 : a_2, \quad \text{d'où} \quad a_2 = \frac{c_2 . r_1}{3}; \qquad [2]$$

l'achat au cours $c_3 + 0,125$ fournira une quantité r_2 de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 donnée par la proportion

$$c_3 + 0,125 : 4,5 = a_2 : r_2, \quad \text{d'où} \quad r_2 = \frac{a_2 . 4,5}{c_3 + 0,125}; \qquad [3]$$

3° La vente au cours c_4 produira un capital a_3 donné par la proportion

$$4,5 : c_4 = r_2 : a_3, \quad \text{d'où} \quad a_3 = \frac{c_4 . r_2}{4,5}; \qquad [4]$$

l'achat au cours $c_5 + 0,125$ fournira une quotité r_3 de rentes 3 pour 100 donnée par la proportion

$$c_5 + 0,125 : 3 = a_3 : r_3, \quad \text{d'où} \quad r_3 = \frac{a_3 . 3}{c_5 + 0,125}; \qquad [5]$$

4° La vente au cours c_6 produira un capital a_4 donné par la proportion

$$3 : c_6 = r_3 : a_4, \quad \text{d'où} \quad a_4 = \frac{c_6 . r_3}{3}; \qquad [6]$$

l'achat au cours $c_7 + 0,125$ fournira une quantité r_4 de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 donnée par la proportion

$$c_7 + 0,125 : 4,5 = a_4 : r_4, \quad \text{d'où} \quad r_4 = \frac{a_4 . 4,5}{c_7 + 0,125}; \qquad [7]$$

5° Il faut, dans la dernière vente, tenir compte du courtage; le cours réel sera donc $c_8 - 0,125$, et la vente produira un capital A donné par la proportion

$$4,5 : c_8 - 0,125 = r_4 : \mathrm{A}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A} = \frac{(c_8 - 0,125) . r_4}{4,5}. \qquad [8]$$

Si l'on multiplie membre à membre les égalités [1], [2], [3],

[4], [5], [6], [7] et [8], et qu'on supprime dans le résultat les facteurs 3, 4,5, r_1, r_2, r_3, r_4, a_2, a_3, a_4 devenus communs au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$[9] \quad A = a_1 . \frac{c_2 . c_4 . c_6 . (c_8 - 0,125)}{(c_1 + 0,125)(c_3 + 0,125)(c_5 + 0,125)(c_7 + 0,125)},$$

formule facile à retenir et calculable par logarithmes.

Le benéfice sera $A - a_1$; et le taux t de ce bénéfice sera donné par la proportion

$$[10] \quad a_1 : A - a_1 = 100 : t, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{(A - a_1).100}{a_1}.$$

580. On pourrait faire un calcul séparé pour chaque transaction; mais il est plus simple de se servir de la formule [9] du numéro précédent, dans laquelle on fera :

$$a_1 = 60000^f, \quad c_1 = 66, \quad c_2 = 68,50, \quad c_3 = 91,10,$$

$$c_4 = 94,30, \quad c_5 = 67,20, \quad c_6 = 69,20, \quad c_7 = 92,50$$

et $$c_8 = 95,10.$$

On aura par suite :

$$A = 60000^f . \frac{68,50 . 94,30 . 69,20 . 94,975}{66,125 . 91,225 . 67,325 . 92,625}.$$

En effectuant le calcul par logarithmes, on trouve

$$\log A = 3,8306847, \quad \text{d'où} \quad A = 67715^f.$$

Le bénéfice est donc 7715 fr.; et par conséquent, en vertu de la formule [10] du numéro précédent, le taux t auquel le spéculateur a placé son argent, est

$$t = \frac{7715 . 100}{60000} \quad \text{ou} \quad t = 12,86.$$

Ainsi, il a placé son argent à près de 13 pour 100.

Remarque. En réalité, le bénéfice serait un peu moindre parce que, les titres de rentes exprimant toujours un nombre entier de francs, il y aurait à chaque acquisition une petite portion de capital non employée.

§ 3. Opérations à terme.

Marchés fermes.

581. La différence étant de $0^f,75$ pour chaque somme de $4^f,50$ de rente, on voit qu'il faut multiplier $0^f,75$ par le nombre qui exprime combien de fois $4^f,50$ est contenu dans 9000, c'est-à-dire par le nombre 2000. La différence cherchée est donc $0^f,75 \times 2000$, c'est-à-dire 1500 fr.

582. La différence de 400 fr. entre les sommes à débourser s'obtiendrait, comme on vient de le voir dans le problème précédent, en multipliant la différence des deux cours par le nombre qui exprime combien de fois le taux de la rente est contenu dans la quantité de rentes à acheter, c'est-à-dire ici, en multipliant la différence des deux cours par le nombre qui exprime combien de fois 3 est contenu dans 6000, ou enfin par le nombre 2000.

En divisant 400 fr. par 2000 on aura donc la différence des deux cours ; on trouve $0^f,20$. Le cours le plus bas étant 67,75, le cours demandé sera donc $67,75 + 0,20$ ou 67,95.

583. La différence des deux cours étant à $0^f,40$ et le taux $4\frac{1}{2}$ étant contenu 2000 fois dans la quotité 9000 de rentes dont il s'agit, on obtiendra la différence du prix de vente au prix d'achat en multipliant $0^f,40$ par 2000, ce qui donne 800 fr.; tel est le gain réalisé par Pierre.

Le gain étant de $0^f,40$ sur $93^f,10$, on obtiendra le bénéfice pour 100 en posant la proportion

$$93,10 : 0,40 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{40}{93,10}.$$

Mais ce bénéfice se rapporte à une durée d'un mois au plus; pour obtenir le bénéfice annuel, il faut donc multiplier par 12, ce qui donne

$$\frac{40 \times 12}{93,10} \quad \text{ou environ} \quad 5,15\ldots;$$

tel est le taux auquel Pierre a placé son argent.

584. Pour tenir compte du courtage, il faut, au cours 94,50,

ajouter $\frac{1}{16}$ ou 0,0625, ce qui donne 94,5625. La somme à débourser s'obtiendra donc par la proportion

$$4^f,50 : 94^f,5625 = 9000^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{94^f,5625 \times 9000}{4,50}$$

ou

$$x = 94^f,5625 \times 2000 \quad \text{ou enfin} \quad 189125^f.$$

585. On ajoutera d'abord 0,05 au cours 94,50, ce qui donne 94,55; on aura ensuite la somme à débourser en posant la proportion

$$4^f,50 : 94^f,55 = 9000^f : x,$$

d'où

$$x = \frac{94^f,55 \times 9000}{4,50} = 189100^f.$$

586. Pour tenir compte du courtage, on retranchera d'abord 0,05 du cours 68,60, ce qui donne 68,55; on aura ensuite la somme à toucher en posant la proportion

$$3^f : 68^f,55 = 9000^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{68^f,55 \times 9000}{3}$$

ou

$$x = 68^f,55 \times 3000 = 205650^f.$$

587. Le cours réel d'achat, en tenant compte du courtage, est 93,10 + 0,125 ou 93,225; le cours réel de vente est 93,50 — 0,05 ou 93,45. La différence entre $93^f,45$ et $93^f,225$, c'est-à-dire $0^f,225$, exprime le bénéfice pour chaque rente de $4^f,50$; on obtiendra donc le bénéfice total en répétant $0^f,225$ autant de fois que $4^f,50$ est contenu dans 9000, c'est-à-dire 2000 fois, ce qui donne 450 fr.

Le gain étant de $0^f,225$ pour $93^f,225$ déboursés, le gain pour 1 fr. déboursé serait $\frac{0^f,225}{93,225}$; et le bénéfice pour 100 serait par conséquent $\frac{0^f,225 \times 100}{93,225}$. Mais ce bénéfice se rapporte à une durée d'un mois; pour l'année il serait 12 fois plus grand

ou $\frac{0^f,225 \times 100 \times 12}{93,225}$, c'est-à-dire 2,896....

En achetant de la rente $4\frac{1}{2}$ pour 100 au cours de 93,10, plus le

courtage, c'est-à-dire à $93,10 + 0,125$ ou $93,225$, Pierre aurait placé son argent à un taux x donné par la proportion

$$93,225 : 4,50 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4,50 \times 100}{93,225}$$

ou

$$x = 4,827....$$

Il y aurait donc eu avantage pour lui à suivre cette voie.

588. Le cours réel d'achat, en tenant compte du courtage, est $68,80 + 0,125$ ou $68,925$; le cours réel de vente est de même $69,35 - 0,05$ ou $69,30$. La différence entre $69^f,30$ et $68^f,925$, c'est-à-dire $0^f,375$, exprime le bénéfice pour chaque rente de 3 fr. On obtiendra donc le bénéfice total en répétant $0^f,375$ autant de fois que 3 est contenu dans 10500, c'est-à-dire 3500 fois, ce qui donne $1312^f,50$.

Le bénéfice étant $0^f,375$ pour $68^f,925$ déboursés, le bénéfice pour 1 fr. déboursé serait $\frac{0^f,375}{68,925}$; le bénéfice pour 100 serait donc $\frac{0^f,375 \times 100}{68,925}$. Mais ce bénéfice se rapporte à une durée d'un mois; pour l'année il serait 12 fois plus grand, c'est-à-dire

$$\frac{0^f,375 \times 100 \times 12}{68,925}, \quad \text{ou } 6,528....$$

Ainsi Jacques aura placé son argent à plus de $6\frac{1}{2}$ pour 100.

589*. Le cours réel d'achat est $c + 0,125$ et le cours réel de vente est $c' - 0,05$; la différence $c' - 0,05 - c - 0,125$ ou $c' - c - 0,175$ exprime le bénéfice pour un capital engagé égal à $c + 0,125$; le bénéfice pour 100 est donc donné par le quatrième terme de la proportion

$$c + 0,125 : c' - c - 0,175 = 100 : x,$$

d'où

$$x = \frac{(c' - c - 0,175) \times 100}{c + 0,125}.$$

Mais ce bénéfice se rapporte à un mois; pour l'année le bénéfice serait donc $\frac{(c' - c - 0,175) \times 100 \times 12}{c + 0,125}$.

En achetant de la rente 3 pour 100 au cours c, on place son argent à un taux donné par la proportion

$$c : 3 = 100 : y, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{300}{c}.$$

Pour qu'il y ait avantage à opérer de la première manière, il faut que l'on ait

$$\frac{(c' - c - 0{,}175) \times 1200}{c + 0{,}125} > \frac{300}{c},$$

d'où l'on tire successivement :

$$c' - c - 0{,}175 > \frac{c + 0{,}125}{4c},$$

puis $$c' > \frac{c + 0{,}125}{4c} + c + 0{,}175$$

ou $$c' > \frac{1}{4} + \frac{0{,}125}{4c} + c + 0{,}175$$

ou enfin $$c' > c + 0{,}425 + \frac{0{,}03165}{c}.$$

On remarquera que le dernier terme est ordinairement moindre qu'un demi-millième ; la condition ci-dessus sera donc remplie à fortiori si l'on a

$$c' > c + 0{,}426,$$

et, comme les cours sont toujours exprimés par des multiples exacts de $0^f{,}05$, la condition qu'on vient d'écrire exige que la différence $c' - c$ entre le cours de vente et le cours d'achat soit au moins de $0^f{,}45$.

590. Pierre a acheté à terme à $69{,}80 + 0{,}05$, ou à $69{,}85$; il vend au comptant à $68{,}90 - 0{,}125$, ou à $68{,}775$; il perd donc $69^f{,}85 - 68^f{,}775$, ou $1^f{,}075$ pour chaque quotité de 3 fr. de rentes.

Il rachète à terme à $69{,}40 + 0{,}05$, ou à $69{,}45$; et il revend au comptant à $71{,}70 - 0{,}125$, ou à $71{,}575$; il gagne donc $71^f{,}575 - 69^f{,}45$, ou $2^f{,}125$, sur chaque quotité de 3 fr. de rentes.

Le gain l'emporte sur la perte de $2^f{,}125 - 1^f{,}075$, ou de $1^f{,}05$.

Pour obtenir le bénéfice total, il reste à répéter $1^f{,}05$ autant de fois que 3 est contenu dans 12000, c'est-à-dire 4000 fois, ce qui donne 4200 fr.

591. Jacques a acheté à terme à $93{,}15 + 0{,}05$, ou à $93{,}20$; il vend au comptant à $92{,}40 - 0{,}125$, ou à $92{,}275$; il perd donc $93^f{,}20 - 92^f{,}275$, ou $0^f{,}925$ sur chaque quotité de $4^f{,}50$ de rentes.

Il rachète à terme à $92{,}40 + 0{,}45 + 0{,}05$, ou à $92{,}90$; et il aura

à payer, en revendant au comptant, un courtage de 0,125, qui, ajouté à la perte déjà subie, savoir 0,925, donne une perte totale de 1,05. Pour que cette perte soit compensée, il faut donc que Jacques puisse revendre à 92,90 + 1,05, ou à 93,95.

On peut vérifier, en effet, qu'à ce cours il n'y aurait ni gain ni perte.

592. Le spéculateur a acheté à terme à 68,50 + 0,05, ou à 68,55; il revend au comptant à 67,20 — 0,125, ou à 67,075; il perd donc $68^f,55 - 67^f,075$, ou $1^f,475$ pour chaque quotité de 3 fr. de rentes.

Le bénéfice total ayant été de 9300 fr., le bénéfice pour chaque quotité de 3 fr. de rentes est le quotient de 9300 fr. par le nombre qui exprime combien de fois 3 est contenu dans 18000, c'est-à-dire par 6000; ce quotient est $1^f,55$. Et, puisque la première opération a produit une perte de $1^f,475$, il faut que la seconde ait produit un bénéfice de $1^f,55 + 1^f,475$, ou de $3^f,025$.

Or, dans cette seconde opération, le spéculateur revend au comptant à 70,80 — 0,125, ou à 70,675; il faut donc qu'il ait acheté à 70,675 — 3,025, ou à 67,65. Mais le cours de la rente au moment de cet achat était, par hypothèse, 67,20; ou, en tenant compte du courtage, 67,20 + 0,05, ou 67,25; le report s'est donc élevé à la différence entre 67,65 et 67,25, c'est-à-dire à $0^f,40$.

593. Robert a vendu à terme à 91,35 — 0,05, ou à 91,30; il rachète au comptant à 92,70 + 0,125, ou à 92,825; il perd donc $92^f,825 - 91^f,30$, ou $1^f,525$ pour chaque quotité de $4^f,50$ de rentes.

Il revend à terme à 93,10 — 0,05, ou à 93,05; enfin, il rachète au comptant à 91,10 + 0,125, ou à 91,225; il gagne donc $93^f,05 - 91,225$, ou $1^f,825$ pour chaque quotité de $4^f,50$ de rentes.

Le gain l'emporte sur la perte de $1^f,825 - 1^f,525$, ou de $0^f,30$.

Pour obtenir le bénéfice total, il reste à répéter $0^f,30$ autant de fois que $4^f,50$ est contenu dans 15750, c'est-à-dire 3500 fois, ce qui donne 1050 fr.

594. Le spéculateur a vendu à terme à 70,40 — 0,05, ou à 70,35; il rachète au comptant à 72,05 + 0,125, ou à 72,175; il perd donc $72^f,175 - 70^f,35$, ou $1^f,825$ pour chaque quotité de 3 fr. de rentes.

Le bénéfice total étant de 5600 fr., le bénéfice pour chaque quotité de 3 fr. de rentes s'obtiendra en divisant 5600 fr. par le

nombre de fois que 3 est contenu dans 12000, c'est-à-dire par 4000, ce qui donne $1^f,400$. Et, puisque, dans la première opération, il y a eu une perte de $1^f,825$, il faut que dans la seconde il y ait un bénéfice de $1,825 + 1^f,400$, c'est-à-dire de $3^f,225$.

Or, dans cette seconde opération, le spéculateur revend à terme à $72,05 + 0,35 - 0,05$, ou à 72,35; et il rachète au comptant au cours cherché augmenté de 0,125. Il gagne donc 72,35, moins le cours cherché, moins encore 0,125, c'est-à-dire 72,225, moins le cours cherché; et ce gain doit égaler 3,225. Il faut donc que le cours cherché soit égal à la différence entre 72,225 et 3,225; c'est-à-dire que ce cours est 69.

595. Il faut calculer d'abord quelle est la perte pour chaque quotité de $4^f,50$ de rentes; pour cela il suffit de diviser 21750 fr. par le nombre qui exprime combien de fois 4,50 est contenu dans 22500, c'est-à-dire par 5000, ce qui donne 4,35.

On remarquera ensuite que les courtages s'élèvent à deux fois 0,05, plus deux fois 0,125, c'est-à-dire à $0,10 + 0,25$, ou à 0,35; à quoi il faut ajouter 0,50 pour le report, ce qui donne 0,85.

Or, la perte 4,35 se compose de ces 0,85, plus la différence des deux cours; en retranchant 0,85 de 4,35, on aura donc la différence des deux cours; on trouve 3,50. Le dernier cours étant 90, le premier est $90 + 3,50$, ou 93,50.

596. Richard vend à $94,75 - 0,125$, ou à 94,625; il rachète à $94,75 - 0,35 + 0,05$, ou à 94,45; son bénéfice est donc de $94^f,625 - 94^f,45$, ou de $0^f,175$, pour chaque quotité de $4^f,50$ de rentes; on obtiendra le bénéfice total en répétant $0^f,175$ autant de fois que 4,50 est contenu dans 27000, c'est-à-dire 6000 fois, ce qui donne 1050 fr.

Le bénéfice étant de $0^f,175$ pour 94,625 réellement engagés, le bénéfice pour 100 serait $\frac{0,175 \times 100}{94,625}$; mais ce bénéfice se rapporte à une durée de 15 jours; pour l'année, il serait 24 fois plus grand, c'est-à-dire

$$\frac{0,175 \times 100 \times 24}{94,625}, \quad \text{ou} \quad 4,438....$$

Ainsi Richard aura placé à un peu moins de 4,44 pour 100.

597. Jacques a acheté à terme à $93,15 + 0,05$, ou à 93,20; il vend au comptant à $92,40 - 0,125$, ou à 92,275; il perd donc $93^f,20 - 92^f,275$, ou 0,925 sur chaque quotité de $4^f,50$ de rentes.

Il rachète à terme à 92,40 — 0,45 + 0,05, ou à 92; et il aura à payer, en revendant au comptant, un courtage de 0,125, qui, ajouté à la perte déjà subie, c'est-à-dire à 0,925 donne une perte totale de 1,05. Pour que cette perte soit compensée, il faut donc que Jacques puisse revendre à 92 + 1,05, ou à 93,05.

Ce cours est inférieur à celui qui a été obtenu au n° **591**, de 0,90 ou de deux fois 0,45, ce qui devait être, puisque le report s'est changé en un déport égal.

598. Le spéculateur a vendu à terme à 70,40 — 0,05, ou à 70,35; il rachète au comptant à 72,05 + 0,125, ou à 72,175; il perd donc $72^f,175 - 70^f,35$, ou $1^f,825$ pour chaque quotité de 3 fr. de rentes.

Il revend à terme à 72,05 — 0,35 — 0,05, ou à 71,65; enfin, il rachète à 69 + 0,125, ou à 69,125; il gagne donc $71^f,65 - 69^f,125$, ou $2^f,525$ pour chaque quotité de 3 fr. de rentes.

Le gain l'emporte sur la perte de $2^f,525 - 1^f,825$, ou de $0^f,70$. Pour obtenir le bénéfice total, il reste à répéter $0^f,70$ autant de fois que 3 est contenu dans 12000, c'est-à-dire 4000 fois, ce qui donne 2800 fr.

Ce résultat est inférieur de 2800 fr. à celui qui a été obtenu au n° **594**; c'est ce qui devait être; car le report se changeant en déport, il en résulte une différence de deux fois $0^f,35$, ou de $0^f,70$ par chaque quotité de 3 fr. de rentes, ce qui fait une différence totale de 4000 fois $0^f,70$, c'est-à-dire de 2800 fr.

599. Pierre perd les intérêts de son capital pour 10 jours; or, les intérêts de ce capital pour un an, ou 360 jours, sont de 18000 fr., puisque le taux est supposé celui qui correspond au cours de la rente; les intérêts pour 10 jours sont donc la trente-sixième partie de 18000 fr., c'est-à-dire 500 fr.

On voit que le résultat est indépendant du cours de la rente, et ne dépend que de la quotité des rentes énoncées dans le titre, et du nombre de jours qui restent à s'écouler depuis le moment où la livraison est exigée jusqu'à l'époque de la liquidation.

600. Daniel perd l'intérêt de son capital pendant 12 jours; il perd donc, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, les $\frac{12}{360}$ ou le trentième de 24000 fr., c'est-à-dire 800 fr. Mais il gagne autant de fois $0^f,50$ que 3 est contenu dans 24000, c'est-à-dire 8000 fois, ce qui fait 4000 fr. Son bénéfice est donc, en définitive, $4000^f - 800^f$, c'est-à-dire 3200 fr.

§ 4. Marchés libres, ou à prime.

601. En tenant compte du courtage, Pierre a acheté à 70,40, plus 0,05, ou à 70,45. Soit x le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation, Pierre ne pourra revendre qu'à un prix marqué par $x - 0{,}125$. S'il y a perte, cette perte, pour chaque quotité de 3 fr. de rentes, sera exprimée par

$$70{,}45 - (x - 0{,}125), \quad \text{ou par} \quad 70{,}575 - x.$$

Si Pierre abandonne la prime de 1 fr., il perdra, pour chaque quotité de 3 fr. de rentes, 1 fr., plus le courtage payé au moment de l'achat, c'est-à-dire 1,05.

Pour qu'il y ait avantage à *lever* la prime, il faut donc que la première perte soit moindre que la seconde, et qu'on ait

$$70{,}575 - x < 1{,}05, \quad \text{d'où} \quad x > 70{,}575 - 1{,}05,$$

ou bien

$$x > 69{,}525.$$

Et comme le cours x est toujours exprimé par un multiple de $0^f{,}05$, on devra avoir au moins

$$x = 69{,}55.$$

Dans ce cas, en effet, Pierre ayant acheté à $70{,}40 + 0{,}05$, ou à 70,45, et étant obligé de revendre à $69{,}55 - 0{,}125$, ou à 69,425, perdrait $70{,}45 - 69{,}425$, ou 1,025 par chaque quotité de rentes de 3 fr.; et, comme 3 fr. sont contenus 2000 fois dans 6000 fr., la perte totale serait

$$1^f{,}025 \times 2000 \quad \text{ou} \quad 2050 \text{ fr.}$$

Si, au contraire, il eût abandonné la prime, il eût perdu

$$1^f{,}05 \times 2000 \quad \text{ou} \quad 2100 \text{ fr.}$$

Il y a donc pour lui un avantage de 50 fr. à lever la prime.

602*. Soit x le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation. L'acheteur, en tenant compte des courtages, a acheté à $c + 0{,}05$; s'il lève la prime, il revendra à $x - 0{,}125$; sa perte, pour chaque quotité de 3 fr. de rentes, sera donc

$$c + 0{,}05 - (x - 0{,}125) \quad \text{ou} \quad c + 0{,}175 - x;$$

s'il abandonne la prime, il perdra $p + 0{,}05$.

Pour qu'il ait avantage à lever, il faut donc qu'on ait

$$c + 0{,}175 - x < p + 0{,}05, \quad \text{d'où} \quad x > c + 0{,}125 - p.$$

Ainsi, le cours demandé sera le multiple de 0,05 immédiate ment supérieur à $c + 0{,}125 - p$, c'est-à-dire $c + 0{,}15 - p$ attendu que c et p sont ordinairement des multiples de 0,05.

603. On a vu, au n° **601**, que l'acheteur a acheté à 70,45, e qu'il revendra à un prix marqué par $x - 0{,}125$. Pour qu'il y ai bénéfice, il faut donc que l'on ait

$$x - 0{,}125 > 70{,}45, \quad \text{d'où} \quad x > 70{,}575.$$

Et comme x est un multiple de 0,05, on devra avoir au moin $x = 70{,}60$. C'est le taux le plus bas auquel Pierre puisse faire u bénéfice.

604*. L'acheteur a réellement acheté à $c + 0{,}05$; et, si x dé signe le cours de liquidation, il ne pourra revendre qu'à un pri marqué par $x - 0{,}125$. Pour qu'il y ait bénéfice, il faudra don qu'on ait

$$x - 0{,}125 > c + 0{,}05, \quad \text{d'où} \quad x > c + 0{,}175.$$

Le cours demandé sera donc le multiple de 0,05 immédiatemen supérieur à

$$c + 0{,}175, \quad \text{c'est-à-dire} \quad c + 0{,}20.$$

605. Si le cours est inférieur à 69,55, on a vu que Pierre aur intérêt à abandonner la prime, et qu'il perdra, dans ce cas 2100 fr.

Si le cours est précisément 69,55, on a vu que Pierre aura in térêt à lever la prime, et qu'il ne perdra que 2050 fr.

Si le cours est supérieur à 69,55, la perte de Pierre diminuera et elle ira ainsi en diminuant à mesure que le cours s'élève.

A 70,55 il y aura encore une perte, mais elle sera très-faible car elle sera

$$(70{,}575 - 70{,}55).2000 \quad \text{ou} \quad 50 \text{ fr.}$$

A 70,60 la perte se change en bénéfice, et le bénéfice es exprimé par

$$(70{,}60 - 70{,}575).2000 \quad \text{ou} \quad 50 \text{ fr.}$$

Au-dessus de 70,60 il y aura toujours bénéfice, et ce bénéfic deviendra de plus en plus grand à mesure que le cours sera plu haut.

A 71,65 le bénéfice devient

$$(71,65 - 70,575).2000 \quad \text{ou} \quad 2150 \text{ fr.};$$

c'est-à-dire qu'il est supérieur de 50 fr. à la perte maximum que Pierre peut éprouver.

A 75 le bénéfice serait

$$(75 - 70.575).2000 \quad \text{ou} \quad 8850 \text{ fr.}$$

On voit, en résumé, que la chance de perte est limitée à 2100 fr., tandis que la chance de gain est illimitée. Les spéculateurs qui opèrent à la manière de Pierre sont des spéculateurs *à la hausse*, parce qu'ils ont intérêt à ce que le cours de la rente s'élève.

606*. On a vu, au n° **602**, qu'au-dessous de $c + 0,125 - p$, l'acheteur devra abandonner la prime. Si donc on a

$$x = c + 0,10 - p,$$

ou si x est inférieur à cette valeur, la prime sera abandonnée, et la perte sera exprimée par

$$(p + 0,05) \cdot \frac{a}{3},$$

en désignant par a la quotité totale des rentes négociées.

Si x est supérieur à $c + 0,125 - p$, et qu'on ait, par exemple, $x = c + 0,15 - p$, l'acheteur devra lever la prime; et sa perte sera exprimée par la différence entre le prix d'achat $c + 0,05$, et le prix de vente $x - 0,125$, ou $c + 0,15 - p - 0,125$, ou enfin $c + 0,025 - p$; c'est-à-dire que la perte sera

$$(c + 0,05) - (c + 0,025 - p) \quad \text{ou} \quad p + 0,025$$

par chaque quotité de 3 fr. de rentes; en sorte que la perte totale sera

$$(p + 0,025) \cdot \frac{a}{3}.$$

La perte ira en diminuant à mesure que x augmentera, jusqu'à ce que x soit égal au multiple de 0,05 immédiatement inférieur à $c + 0,175$ (voy. le n° **604**). Si donc on a $x = c + 0,15$, la perte sera réduite à son minimum, qui sera

$$(c + 0,05) - (c + 0,15 - 0,125) \quad \text{ou} \quad 0,025$$

par chaque quotité de 3 fr., de rentes; en sorte que la per
totale sera réduite à

$$0{,}025 \cdot \frac{a}{3}.$$

Si x est supérieur à $c + 0{,}175$, la perte se change en bénéfic
Si, par exemple, on a $x = c + 0{,}20$, le bénéfice par chaque qu
tité de 3 fr. de rentes est exprimé par

$$(c + 0{,}20 - 0{,}125) - (c + 0{,}05) \quad \text{ou} \quad 0{,}025,$$

en sorte que le bénéfice total devient

$$0^{f},025 \cdot \frac{a}{3}.$$

A mesure que x augmente, le bénéfice augmente lui-même,
l'on voit qu'il est illimité. Il est généralement exprimé par

$$(x - 0{,}125) - (c + 0{,}05) \quad \text{ou} \quad x - c - 0{,}175$$

par chaque quotité de 3 fr. de rentes, et le bénéfice total est

$$(x - c - 0{,}175) \cdot \frac{a}{3}.$$

607. On a vu, au n° **605**, que le bénéfice de Pierre, s'il y
a un, est exprimé par $(c - 70{,}575).2000$. Pour que la conditi
demandée soit satisfaite, il faut donc qu'on ait

$$(c - 70{,}575).2000 > 12000,$$

d'où $\qquad c > 70{,}575 + 6 \quad \text{ou} \quad c > 76{,}575.$

Il faut donc que le cours du 3 pour 100 atteigne au moins 76,6

608*. On a vu, au n° **606**, que le bénéfice de l'acheteur, s
y en a un, est exprimé par

$$(x - c - 0{,}175) \cdot \frac{a}{3}.$$

Pour que la condition soit remplie, il faut donc qu'on ait

$$(x - c - 0{,}175) \cdot \frac{a}{3} > b, \quad \text{d'où} \quad x > c + 0{,}175 + \frac{3b}{a}.$$

Il faudra donc que x atteigne au moins le multiple de 0,05, in
médiatement supérieur à cette expression.

609. Paul a vendu à $70{,}40 - 0{,}05$, ou à 70,35, c'est-à-di
qu'il a supporté un courtage de 0,05.

Soit toujours x le cours du 3 pour 100 à l'époque de la liquidation. Si x est égal ou inférieur à 69,50, on a vu, au n° **605**, que Pierre abandonne la prime. Paul gagne donc cette prime, diminuée du courtage qu'il a dû payer au moment de la vente; ainsi, son bénéfice est exprimé par

$$(1^f - 0{,}05).2000 \quad \text{ou} \quad 1900 \text{ fr.}$$

Si $x = 69{,}55$, Pierre lève la prime; le bénéfice de Paul est alors exprimé par

$$70{,}35 - (69{,}55 + 0{,}125) \quad \text{ou par} \quad 0{,}675,$$

pour chaque quotité de 3 fr. de rentes; son bénéfice total est donc

$$0^f{,}675.2000 \quad \text{ou} \quad 1350 \text{ fr.}$$

Si x augmente, le bénéfice de Paul diminue; mais il y a bénéfice tant qu'on a

$$70{,}35 > x + 0{,}125,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x < 70{,}225.$$

Il y a donc encore bénéfice si $x = 70{,}20$, et ce bénéfice est alors réduit à

$$(70{,}225 - 70{,}20).2000 \quad \text{ou à} \quad 50 \text{ fr.}$$

Pour $x > 70{,}225$, le bénéfice se change en perte; il y a donc perte dès qu'on a $x = 70{,}25$, et le bénéfice est

$$(70{,}25 - 70{,}225).2000 \quad \text{ou} \quad 50 \text{ fr.}$$

A mesure que x augmente au delà de 70,25, la perte de Paul augmente aussi, et cette perte est illimitée.

On voit, en résumé, que pour Paul, la chance de gain est limitée à 1900 fr., tandis que la chance de perte est illimitée.

610*. Le vendeur a vendu à $c - 0{,}05$, en désignant par c le cours du 3 pour 100 au moment de la vente. Si x désigne le cours à l'époque de la liquidation, on a vu, au n° **606**, que pour $x = c + 0{,}10 - p$, ou pour une valeur de x plus petite, l'acheteur abandonne la prime; en désignant donc comme ci-dessus par a la quotité totale des rentes vendues, le bénéfice du vendeur sera exprimé par

$$(p - 0{,}05) \cdot \frac{a}{3}.$$

Pour $x = c + 0{,}15 - p$, l'acheteur lève la prime; mais il y a

toujours bénéfice pour le vendeur; pour chaque quotité de 3 fr. de rentes, ce bénéfice est exprimé par la différence entre le prix de vente $c - 0{,}05$ et le prix de rachat $c + 0{,}15 - p + 0{,}125$, c'est-à-dire par $p - 0{,}325$; le bénéfice total est donc

$$(p - 0{,}325) \cdot \frac{a}{3}.$$

Le cours x s'élevant, le bénéfice du vendeur diminue; mais il y a encore bénéfice tant que l'on a

$$c - 0{,}05 > x + 0{,}125 \quad \text{ou} \quad x < c - 0{,}175.$$

Pour $x = c - 0{,}20$, le bénéfice se trouve réduit à

$$(c - 0{,}05) - (c - 0{,}20 + 0{,}125) \quad \text{ou à} \quad 0{,}025$$

pour chaque quotité de 3 fr. de rentes, et le bénéfice total à

$$0^{f},025 \cdot \frac{a}{3}.$$

Pour $x = c - 0{,}15$, le bénéfice se change en perte, et la perte, pour chaque quotité de 3 fr. de rentes, devient

$$(c - 0{,}15 + 0{,}125) - (c - 0{,}05) \quad \text{ou} \quad 0{,}025;$$

d'où il suit que la perte totale est exprimée par

$$0^{f},025 \cdot \frac{a}{3}.$$

Le cours x continuant à s'élever, la perte du vendeur augmente, et cette perte est illimitée.

611. En raisonnant comme au n° **605**, et en remarquant que $4\frac{1}{2}$ est contenu 4000 fois dans 18000, on arrive aux résultats suivants :

A 92,60 et au-dessous, Simon abandonne la prime et perd

$$0^{f},55 . 4000 \quad \text{ou} \quad 2200 \text{ fr.}$$

A 92,65, Simon lève la prime et ne perd que

$$0^{f},525 . 4000 \quad \text{ou} \quad 2100 \text{ fr.}$$

Au-dessus de 92,65, la perte va en diminuant. A 93,15, la perte se trouve réduite à son minimum, qui est

$$0^{f},025 . 4000 \quad \text{ou} \quad 100 \text{ fr.}$$

A 93,20, la perte se change en bénéfice, et le bénéfice est

$$0^{f},025 . 4000.$$

A mesure que le cours s'élève, le bénéfice augmente, et il est toujours exprimé par

$$(x - 93,175).4000.$$

Par exemple, pour $x = 96$, le bénéfice est

$$2^f,825.4000 \quad \text{ou} \quad 11300 \text{ fr.}$$

Le bénéfice est illimité.

612. Soit x le cours du lendemain. Comme il n'y a point ici de courtage à considérer, on voit sur-le-champ que si x est inférieur à 70,80 de plus de 0,10, le spéculateur aura intérêt à abandonner la prime; et il perdra, dans ce cas, $0^f,10$ répété autant de fois que 3 est contenu dans 1500, c'est-à-dire 500 fois, ce qui donne 50 fr.

Si l'on a $x = 70,80 - 0,10$ ou $x = 70,70$, le spéculateur peut indifféremment abandonner ou lever la prime; sa perte, dans les deux cas, est toujours $0^f,10 \times 500$ ou 50 fr.

Si x est supérieur à 70,70, le spéculateur a intérêt à lever la prime, et sa perte diminue à mesure que x augmente.

Si $x = 70,80$, il n'y a ni perte ni bénéfice.

Au-dessus de 70,80, il y a bénéfice, et ce bénéfice est exprimé par $(x - 70,80)\,500$. Il augmente avec x, et son maximum répond à $x = 70,80 + 0,50$ ou $x = 71,30$; auquel cas il a pour valeur $0^f,50 \times 500$ ou 250 fr.

Dans les conditions de l'énoncé, les chances du spéculateur se trouvent donc comprises entre une perte de 50 fr. et un bénéfice de 250 fr.

613. Si le cours s'abaisse de plus de 0,25, le spéculateur a intérêt à abandonner la prime, et sa perte est $0^f,25$ répété autant de fois que 3 est contenu dans 4500, c'est-à-dire 1500 fois, ce qui donne 375 fr.

Si le cours s'abaisse exactement de 0,25, le spéculateur peut indifféremment lever ou abandonner la prime, et sa perte, dans les deux cas, est de 375 fr.

Si le cours s'abaisse de moins de 0,25, le spéculateur a intérêt à lever la prime, et sa perte diminue à mesure que le cours se rapproche de 69,70.

Si le cours reste stationnaire, il n'y a ni gain ni perte.

Si le cours s'élève au-dessus de 69,70, il y a bénéfice, et si x représente le cours, ce bénéfice est exprimé par

$$(x - 69,70).1500.$$

Il augmente avec x, et, d'après les conditions du problème, il atteint son maximum pour $x = 69,70 + 1,50$ ou $x = 71,20$. Sa valeur est, dans ce cas,

$$1^f,50 \times 1500 \quad \text{ou} \quad 2250 \text{ fr.}$$

Les chances du spéculateur sont donc comprises entre une perte de 375 fr. et un bénéfice de 2250 fr.

614. Pierre a vendu à $70 - 0,05$ ou à $69,95$; il rachète à $x + 0,125$, en appelant x le taux du 3 pour 100 à l'époque de la liquidation. S'il y a perte, cette perte, rapportée à chaque quotité de 3 fr. de rentes, sera la différence entre $x + 0,125$ et $69,95$, c'est-à-dire $x - 69,825$. Pour que Pierre ait intérêt à abandonner la prime, il faut qu'on ait

$$x - 69,825 > 0,50 + 0,05,$$

à cause du courtage,

ou $$x > 70,375.$$

Si donc on a $x = 70,40$, Pierre abandonne la prime, et sa perte sera $0^f,55$ répété autant de fois que 3 est contenu dans 9000, c'est-à-dire 3000 fois, ce qui donne 1650 fr.

Si l'on a $x = 70,35$, Pierre lèvera la prime, et sa perte sera exprimée par

$$(70,35 - 69,825).3000 \quad \text{ou} \quad 1575 \text{ fr.}$$

Le cours x diminuant, la perte de Pierre diminuera aussi; mais il y aura toujours perte, tant que x sera plus grand que 69,825. Elle sera réduite à son minimum pour $x = 69,85$, et, dans ce cas, sa valeur deviendra

$$(69,85 - 69,825).3000 \quad \text{ou} \quad 75 \text{ fr.}$$

Pour $x = 69,80$, la perte se change en bénéfice, et ce bénéfice est exprimé par

$$(69,825 - 69,80).3000 \quad \text{ou} \quad 75 \text{ fr.}$$

Si x diminue au-dessous de 69,80, le bénéfice de Pierre augmente, et ce bénéfice est illimité.

On voit que pour Pierre, dans cette manière d'opérer, la chance de perte est limitée à 1650 fr., tandis que la chance de gain est illimitée. Les spéculateurs qui opèrent ainsi sont des spéculateurs *à la baisse*, parce qu'ils ont intérêt à ce que le cours de la rente descende le plus bas possible.

615. Si le cours s'élève de plus de 0,10, Jacques abandonne la prime et perd $0^f,10.500$ ou 50 fr.

Si le cours s'élève juste de 0,10, Jacques peut indifféremment lever ou abandonner la prime; dans l'un et l'autre cas, il perd 50 fr.

Si le cours s'élève de moins de 0,10, Jacques fait une perte, mais elle est d'autant moindre que le cours s'est moins élevé.

Si le cours reste stationnaire, il n'y a ni gain ni perte.

Si le cours s'abaisse, la perte se change en bénéfice, et ce bénéfice est égal à la quantité dont le cours s'est abaissé, multipliée par 500; il est donc illimité.

Si, par exemple, le cours tombait de 3 fr., le bénéfice serait de $3^f \times 500$ ou de 1500 fr.

616. Si Raymond lève la prime, il achète à $72,80 + 0,05$ ou à 72,85; il a vendu à $70,30 - 0,05$ ou à 70,25; il perd donc la différence $72,85 - 70,25$ ou 2,60 par chaque quotité de 3 fr. de rentes.

S'il abandonne la prime, il perd d'abord 0,50. Soit, de plus, c le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation; comme il a vendu à découvert, il est obligé, pour exécuter son marché ferme, d'acheter au comptant à $c + 0,125$; et, puisqu'il a vendu à 70,25, il perd

$$c + 0,125 - 70,25 \quad \text{ou} \quad c - 70,125.$$

En y ajoutant la prime, sa perte totale est donc

$$c - 70,125 + 0,50 \quad \text{ou} \quad c - 69,625.$$

Pour qu'il ait intérêt à lever, il faut donc que cette dernière perte soit plus grande que la première, et qu'on ait

$$c - 69,625 > 2,60, \quad \text{d'où} \quad c > 72,225.$$

Cela posé, si le cours c du 3 pour 100, au moment de la liquidation, est égal ou supérieur à 72,25, Raymond lève la prime et perd $2^f,60$ par chaque quotité de 3 fr. de rentes, soit en tout

$$2^f,60 \times \frac{6000}{3} \quad \text{ou} \quad 5200 \text{ fr.}$$

Si le cours c est égal ou inférieur à 72,20, mais supérieur à 69,625, Raymond abandonne la prime et perd $c - 69,625$ par chaque quotité de 3 fr. de rentes, soit en tout

$$(c - 69,625).2000.$$

Si, par exemple, $c = 69,65$, la perte se trouve réduite à

$$(69^f,65 - 69^f,625).2000 \quad \text{ou à} \quad 50 \text{ fr.}$$

Si c est inférieur à 69,625, la perte se change en bénéfice, et ce bénéfice est exprimé par $(69,625 - c)$ pour chaque quotité de 3 fr. de rentes; le bénéfice total est donc

$$(69,625 - c).2000.$$

Il est illimité, puisqu'il augmente à mesure que c diminue. Pour $c = 66$, par exemple, le bénéfice est

$$3^f,625 \times 2000 \quad \text{ou} \quad 7250 \text{ fr.}$$

On voit que dans l'hypothèse de ce problème, Raymond joue évidemment à la baisse; ses chances de perte sont limitées à une perte de 5200 fr., tandis que ses chances de gain sont illimitées.

617. On a vu au numéro précédent que si le cours c du 3 pour 100 à l'époque de la liquidation est égal ou supérieur à 72,25, Raymond lève la prime. Dans ce cas, Daniel qui a vendu à $72,80 - 0,05$ ou à 72,75 et qui rachète à $70,30 + 0,05$ ou à 70,35, gagne $72,75 - 70,35$ ou 2,40 par chaque quotité de 3 fr. de rentes, ou en tout $2^f,40 \times 2000$, c'est-à-dire 4800 fr.

Si le cours c est égal ou inférieur à 72,20, Raymond abandonne la prime. Dans ce cas, Daniel qui a acheté à 70,35 ne peut vendre qu'au comptant à $c - 0,125$; il gagne donc $c - 0,125 - 70,35$, plus la prime de 0,50, c'est-à-dire $c - 69,975$ par chaque quotité de 3 fr. de rentes, et en tout

$$(c - 69,975).2000.$$

Si, par exemple, $c = 70$, le bénéfice se trouve réduit à

$$(70 - 69,975).2000 \quad \text{ou à} \quad 50 \text{ fr.}$$

Si $c = 69,95$, le bénéfice se change en perte, et la perte est exprimée par

$$(69,975 - 69,95).2000 \quad \text{ou} \quad 50 \text{ fr.}$$

Si c est inférieur à 69,95, la perte devient de plus en plus grande, et elle est exprimée généralement par

$$(69,975 - c).2000.$$

Elle est illimitée. Si, par exemple, $c = 66$, elle s'élève à

$$(69,975 - 66).2000 \quad \text{ou à} \quad 7950 \text{ fr.}$$

On voit que, dans l'hypothèse de ce problème, Daniel joue évi-

demment à la hausse; mais ses chances de gain sont limitées à un gain de 4800 fr., tandis que ses chances de perte sont illimitées.

618. Pour analyser les chances de Raymond, il faut d'abord voir ce qui arrive, selon qu'il abandonne ou qu'il lève la prime. Soit toujours c le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation.

Supposons d'abord que Raymond abandonne la prime, qui est de $0^f,50$ pour chaque quotité de 3 fr. de rentes contenue dans 12000 fr., ce qui revient à 1 fr. par chaque quotité de 3 fr. de rentes contenue dans 6000 fr.

Il a vendu à $70,30 - 0,05$ ou à $70,25$; et, pour exécuter son marché, comme il a vendu à découvert, il faudra qu'il rachète au comptant à $c + 0,125$. Si cette quantité l'emporte sur $70,25$, il perdra $c + 0,125 - 70,25$ ou $c - 70,125$ par chaque quotité de 3 fr. de rentes. Si $70,25$ l'emportait sur $c + 0,125$, la quantité $c - 70,125$ deviendrait négative et la perte se changerait en gain; cette quantité exprimera donc la perte ou le bénéfice, selon qu'elle sera positive ou négative. Il faut y ajouter la prime de 1 fr., ce qui porte la perte à $c - 70,125 + 1$ ou à $c - 69,125$.

Supposons, en second lieu, que Raymond lève la prime.

Il a vendu 6000 fr. de rentes à $70,25$ et il en rachète 12000 fr. à $72,80 + 0,05$ ou à $72,85$. Pour se bien rendre compte de l'effet produit, on peut concevoir qu'il en fasse deux parts égales; sur les 6000 fr. formant la première part, il perdra $72,85 - 70,25$ ou $2^f,60$ par chaque quotité de 3 fr. de rentes, et cet achat lui sert à exécuter son marché ferme. Sur les 6000 fr. formant la seconde part, et qu'il ne pourra vendre qu'au comptant à $c - 0,125$, il perdra $72,85 - (c - 0,125)$ ou bien $72,975 - c$. Les deux pertes partielles réunies donnent une perte totale de $2,60 + 72,975 - c$ ou $75,575 - c$.

Si $c - 0,125$ l'emportait sur $72,85$, la seconde perte partielle se changerait en un gain exprimé par $c - 72,975$; mais comme, pour avoir la perte totale, il faudrait alors retrancher le gain de la perte relative à la première part, on aurait $2,60 - (c - 72,975)$, ce qui donne encore $75,575 - c$.

Pour que Raymond ait intérêt à lever la prime, il faut que la perte qui correspond à l'abandon de la prime soit plus grande que celle qui se rapporte à la levée, et qu'on ait par conséquent

$$c - 69,125 > 75,575 - c,$$

d'où

$$2c > 144,70 \quad \text{ou} \quad c > 72,35.$$

Il est facile maintenant de se rendre compte des chances de Raymond.

Si $c = 72,35$, il y a même perte, soit qu'il abandonne ou qu'il lève la prime; cette perte est de $72,35 - 69,125$ ou de 3,225 par chaque quotité de 3 fr. de rentes contenue dans 6000 fr., et la perte totale est ainsi $3^f,225 \times 2000$ ou 6450 fr.

Si c monte au-dessus de 72,35, Raymond lève la prime, et, tant que le cours n'a pas atteint 75,575, il y a une perte exprimée par

$$(75,575 - c).2000,$$

laquelle diminue à mesure que c augmente.

Pour $c = 75,55$, elle se trouve réduite à

$$0^f,025.2000 \quad \text{ou à} \quad 50 \text{ fr.}$$

Pour $c = 75,60$, la perte se change en un bénéfice dont la valeur est encore de 50 fr.

Si c monte au-dessus de 75,60, le bénéfice de Raymond augmente indéfiniment; son expression générale est

$$(c - 75,575).2000.$$

Supposons au contraire que c descende au-dessous de 72,35. Dans ce cas, Raymond abandonne la prime; et tant que c reste supérieur à 69,125, il y a une perte exprimée par

$$(c - 69,125).2000,$$

laquelle diminue en même temps que c.

Pour $c = 69,15$ elle se trouve réduite à 50 fr.

Pour $c = 69,10$ la perte se change en un bénéfice dont la valeur est également de 50 fr.

Si c descend au-dessous de 69,10, le bénéfice augmente indéfiniment et son expression générale est

$$(69,125 - c).2000.$$

On voit que Raymond ne court la chance de perdre que si c varie de 75,55 à 69,15 inclusivement; et la plus grande perte a lieu pour $c = 72,35$, moyenne entre ces nombres.

Au-dessus de 75,55 ou au-dessous de 69,15 il n'y a que bénéfice, et ce bénéfice est illimité pour la hausse comme pour la baisse.

619. Soit toujours c le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation.

Si l'on a $c > 72,35$, on vient de voir que Raymond lève la prime.

Dans cette hypothèse, Daniel vend donc 12000 fr. de rentes 3 pour 100 à 72,80 — 0,05 ou à 72,75; et il achète 6000 fr. de rentes 3 pour 100 à 70,30 + 0,05 ou à 70,35. De plus, comme il a vendu à découvert, il sera obligé, pour exécuter son marché à prime, de racheter encore 6000 fr. de rentes 3 pour 100 au cours $c + 0,125$ puisque c'est un achat au comptant. Pour chaque quotité de 3 fr. de rentes contenue dans 6000 fr., on peut donc dire que Daniel reçoit 2 fois 72,75, c'est-à-dire 145,50, et débourse $70,35 + c + 0,125$ ou $c + 70,475$. Son gain est donc exprimé par

$$145,50 - c - 70,475 \quad \text{ou} \quad 75,025 - c.$$

Si l'on a $c < 72,35$, on a vu au numéro précédent que Raymond abandonne la prime. Daniel gagne donc d'abord $0^f,50$ par chaque quotité de 3 fr. de rentes contenue dans 12000 fr., ou, ce qui revient au même, 1 fr. par chaque quotité de 3 fr. de rentes contenue dans 6000 fr. Il achète en outre 6000 fr. de rentes 3 p. 100 à 70,35, et les vendra au comptant, s'il veut réaliser, au cours $c - 0,125$. Il gagnera donc encore sur cette opération $c - 0,125 - 70,35$ ou $c - 70,475$. Son gain total sera donc exprimé par

$$1 + c - 70,475 \quad \text{ou par} \quad c - 69,475$$

pour chaque quotité de 3 fr. de rentes contenue dans 6000 fr.

Cela posé, il est aisé de se rendre compte des chances de Daniel.

Supposons d'abord $c = 72,35$. On a vu au numéro précédent que, dans ce cas, Raymond peut indifféremment lever ou abandonner la prime. Ce choix n'est point indifférent pour Daniel. Si Raymond lève la prime, le gain de Daniel est exprimé par

$$(75,025 - 72,35).2000 \quad \text{ou} \quad 5350 \text{ fr.}$$

Si Raymond abandonne la prime, le gain de Daniel est exprimé par

$$(72,35 - 69,475).2000 \quad \text{ou} \quad 5750 \text{ fr.}$$

Daniel gagnerait donc 400 fr. à cette seconde combinaison.

Supposons maintenant que c monte au-dessus de 72,35; le gain de Daniel sera exprimé par

$$(75,025 - c).2000.$$

On voit qu'il va en diminuant à mesure que c augmente. Pour $c = 75$, il se trouve réduit à $0^f,025 .2000$ ou à 50 fr.

Pour $c = 75,05$ le gain se change en perte, et la perte est de 50 fr.

Si c s'élève au-dessus de 75,05, la perte va en augmentant, et elle est exprimée par

$$(c - 75{,}025).2000.$$

La perte est donc illimitée.

Supposons au contraire que c s'abaisse au-dessous de 72,35. Le gain de Daniel est alors exprimé par

$$(c - 69{,}475).2000,$$

il va en diminuant à mesure que c s'abaisse. Pour $c = 69{,}50$, il se trouve réduit à 50 fr. Pour $c = 69{,}45$, le gain se change en une perte de 50 fr.

Si c s'abaisse au-dessous de 69,475, la perte de Daniel est exprimée par

$$(69{,}475 - c).2000,$$

elle va en augmentant à mesure que c diminue; elle est, par conséquent, illimitée.

On voit que Daniel est en bénéfice quand le cours c varie de 75 à 69,50 inclusivement; et il est le plus grand possible pour $c = 72{,}35$, dans l'hypothèse où Raymond abandonne sa prime. Au-dessus de 75, ou au-dessous de 69,50, Daniel est en perte, et cette perte est illimitée, soit qu'il y ait hausse, soit qu'il y ait baisse.

620. Il ne peut se présenter que trois cas : ou les primes seront abandonnées de part et d'autre, ou Paul lèvera sa prime, tandis que Pierre abandonnera la sienne, ou, enfin, les deux primes seront levées; il serait absurde, comme on va le voir, de supposer que Pierre levât sa prime, et que Paul abandonnât la sienne.

1° Les primes sont abandonnées de part et d'autre. Dans ce cas, Pierre gagne la différence des deux primes, tandis que Paul fait une perte égale représentée par

$$0^{f},50 . 2000 \quad \text{ou} \quad 1000 \text{ fr.}$$

2° Paul lève sa prime et Pierre abandonne la sienne. Soit c le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation.

Paul a acheté à $71 + 0{,}05$ ou à 71,05; il revendra au comptant $c - 0{,}125$; il gagnera donc

$$c - 0{,}125 - 71{,}05, \quad \text{plus la prime de} \quad 0{,}50,$$

c'est-à-dire qu'il gagnera $c - 70{,}675$ par chaque quotité de rentes de 3 fr.; et en tout

$$[1] \qquad (c - 70{,}675).2000.$$

Le gain se change en perte quand c est inférieur à 70,675; pour que Paul ait intérêt à lever, il faut donc qu'on ait

$$70{,}675 - c < 0{,}50,$$

différence des deux primes;

d'où $$c > 70{,}175.$$

Quant à Pierre, il a vendu à $71 - 0{,}05$ ou à 70,95, et, pour exécuter son marché, il faudra qu'il rachète à $c + 0{,}125$; il perdra donc

$$c + 0{,}125 - 70{,}95 \quad \text{ou} \quad c - 70{,}825,$$

plus la prime de $0^f{,}50$ qu'il abandonne, c'est-à-dire $c - 70{,}325$ par chaque quotité de 3 fr. de rentes, et en tout

$$[2] \qquad (c - 70{,}325).2000.$$

La perte se change en bénéfice si c est inférieur à 70,325.

3° Les deux primes sont levées. Pierre a vendu à 70,95, et acheté à $72{,}50 + 0{,}05$ ou à 72,55; il perdra donc $72{,}55 - 70{,}95$ ou $1^f{,}60$ par chaque quotité de rentes de 3 fr., et, en tout, $1^f{,}60 . 2000$ ou 3200 fr.

Pour qu'il ait intérêt à lever, il faudra qu'on ait

$$c - 70{,}325 > 1{,}60, \quad \text{d'où} \quad c > 71{,}925.$$

Quant à Paul, il gagne, comme dans le second cas,

$$c - 0{,}125 - 71{,}05 \quad \text{ou} \quad c - 71{,}175,$$

mais il ne gagne plus la prime; son gain total se réduit donc à

$$(c - 71{,}175).2000.$$

Nous pouvons maintenant nous rendre compte des chances des deux spéculateurs.

Si c est inférieur à 70,175, les deux primes sont abandonnées; Pierre gagne 1000 fr., et Paul les perd.

Si $c = 70{,}20$, Paul lève sa prime et perd

$$(70{,}675 - 70{,}20).2000 \quad \text{ou} \quad 950 \text{ fr.}$$

Sa perte va en diminuant à mesure que c augmente; mais il y a

perte tant que c est moindre que 70,675. Pour $c = 70,65$, la perte se trouve réduite à

$$(70,675 - 70,65) . 2000 \quad \text{ou à} \quad 50 \text{ fr.}$$

La perte se change en bénéfice dès qu'on a $c = 70,70$; et le bénéfice est alors

$$(70,70 - 70,675) . 2000 \quad \text{ou} \quad 50 \text{ fr.}$$

Le bénéfice va en augmentant avec c, et tant que c reste inférieur à 71,925. Pour $c = 71,90$, par exemple, le bénéfice de Paul est exprimé par

$$(71,925 - 70,675) . 2000 \quad \text{ou} \quad 2500 \text{ fr.}$$

Lorsque c dépasse 71,925, Pierre lève sa prime, et le bénéfice de Paul est limité à

$$(71,95 - 71,175) . 2000 \quad \text{ou} \quad 1550 \text{ fr.}$$

Pour Pierre, les résultats sont différents. On a vu qu'il gagne 1000 fr. tant que c reste inférieur à 70,175. Au delà, et tant que c reste inférieur à 70,325, le bénéfice de Pierre est exprimé par

$$(70,325 - c) . 2000.$$

Pour $c = 70,20$, par exemple, le bénéfice de Pierre est

$$(70,325 - 70,20) . 2000 \quad \text{ou} \quad 250 \text{ fr.}$$

Pour $c = 70,30$, il se trouve réduit à 50 fr.

Lorsque c surpasse 70,325, le bénéfice de Pierre se change en perte, et, tant que c reste inférieur à 71,925, cette perte est exprimée par

$$(c - 70,325) . 2000.$$

Pour $c = 70,35$, par exemple, la perte est de 50 fr.

Pour $c = 71,90$, elle est exprimée par

$$(71,90 - 70325) . 2000 \quad \text{ou par} \quad 3150 \text{ fr.}$$

Lorsque c surpasse 71,925, Pierre lève sa prime, et sa perte demeure égale à 3200 fr.

En résumé, pour Paul, les chances varient depuis une perte de 1000 fr. jusqu'à un bénéfice de 1550 fr. Pour Pierre, elles varient, au contraire, depuis un bénéfice de 1000 fr. jusqu'à une perte de 3200 fr. Il en résulte que Paul joue à la hausse et Pierre à la baisse.

Remarque. On ne peut pas supposer que Paul abandonne sa

prime, et que Pierre lève la sienne; car il faudrait que Paul fût déterminé par l'inégalité

$$c < 70,175,$$

et Pierre par l'inégalité

$$c > 71,925,$$

relations incompatibles.

621. Comme dans le problème du numéro précédent, il ne peut se présenter que trois cas : ou les deux primes seront abandonnées, ou Paul lèvera sa prime tandis que Pierre abandonnera la sienne, ou les deux primes seront levées à la fois.

1° Les deux primes sont abandonnées. Comme 3 est contenu 2000 fois dans 6000 et 4000 fois dans 12000, on voit aisément que Paul perd 2000 fois 1 fr., mais qu'il gagne 4000 fois $0^f,50$, en sorte que le gain compense la perte. Pierre, au contraire, gagne 2000 fois 1 fr., mais il perd 4000 fois $0^f,50$, ce qui fait également compensation.

2° Paul lève sa prime, et Pierre abandonne la sienne. Dans ce cas, Paul a acheté à $71 + 0,05$ ou $71,05$; et si c représente toujours le cours du 3 pour 100 au moment de la liquidation, il vendra au comptant à $c - 0,125$; il gagnera donc

$$c - 0,125 - 71,05 \quad \text{ou} \quad c - 71,175$$

par chaque quotité de 3 fr. de rentes, ce qui fait en somme

$$(c - 71,175).2000$$

Mais il gagnera de plus la prime de $0^f,50$ sur 12000 fr., ce qui fait

$$0^f,50 \times 4000 \quad \text{ou} \quad 1^f \times 2000.$$

Son bénéfice total sera donc

$$(c - 71,175 + 1).2000 \quad \text{ou} \quad (c - 70,175).2000.$$

Ce gain se changerait en perte si c était inférieur à 70,175; mais pour que Paul ait intérêt à lever, il faut qu'on ait au contraire $c > 70,175$.

Quant à Pierre, il a vendu à $71 - 0,05$ ou à $70,95$; pour exécuter son marché il rachètera au comptant à $c + 0,125$; il perdra donc

$$(c + 0,125 - 70,95).2000 + 1^f \times 2000 \quad \text{(sa prime)},$$

soit

$$(c - 69,825).2000.$$

3° Les deux primes sont levées. Paul a acheté 6000 fr. à 71,05;

mais comme il a vendu une quotité de rentes double, il sera obligé, pour exécuter son marché, de racheter 6000 autres francs au comptant à $c + 0{,}125$. Sa dépense est donc représentée par

$$71{,}05 \times 2000 + (c + 0{,}125).2000 \quad \text{ou} \quad (c + 71{,}175).2000.$$

D'un autre côté, il a vendu 12000 fr. à $72{,}50 - 0{,}05$ ou à $72{,}45$. La recette correspondante est donc exprimée par

$$72{,}45 \times 4000 \quad \text{ou} \quad 144{,}90 \times 2000.$$

Son bénéfice est par conséquent

$$(144{,}90 - c - 71{,}175).2000 \quad \text{ou} \quad (73{,}725 - c).2000.$$

Ce bénéfice se changerait en perte si c surpassait $73{,}725$.

Quant à Pierre, il a acheté 12000 fr. de rentes à $72{,}50 + 0{,}05$ ou à $72{,}55$; la dépense correspondante est $72{,}55 \times 4000$ ou bien $145{,}10 \times 2000$.

En même temps, il a vendu 6000 fr. de rentes à $71 - 0{,}05$ ou à $70{,}95$; et il revendra les 6000 autres au comptant à $c - 0{,}125$; la recette correspondante est donc exprimée par

$$70{,}95 \times 2000 + (c - 0{,}125).2000 \quad \text{ou} \quad (c + 70{,}825).2000.$$

Son bénéfice sera donc

$$(c + 70{,}825 - 145{,}10).2000 \quad \text{ou} \quad (c - 74{,}275).2000.$$

Ce bénéfice se changerait en perte si c était inférieur à $74{,}275$.

Pour que Pierre ait intérêt à lever sa prime, il faut donc qu'on ait

$$c - 74{,}275 > 69{,}825 - c, \quad \text{d'où} \quad c > 72{,}05.$$

Nous pouvons maintenant analyser les chances des deux spéculateurs.

Si c est inférieur à $70{,}20$, les deux primes sont abandonnées, et il n'y a ni perte ni bénéfice pour les spéculateurs.

A $70{,}20$ Paul lève sa prime, mais Pierre abandonne la sienne. Paul gagne

$$(70{,}20 - 70{,}175).2000 \quad \text{ou} \quad 50 \text{ fr.}$$

Au-dessus de $70{,}20$, mais au-dessous de $72{,}10$, le bénéfice de Paul est exprimé par

$$(c - 70{,}175).2000$$

et il augmente avec c.

Pour $c = 72,05$ par exemple, le bénéfice de Paul est

$$(72,05 - 70,175).2000 \quad \text{ou} \quad 3750 \text{ fr.}$$

A 72,10 Pierre lève sa prime, et le bénéfice de Paul est exprimé par

$$(73,725 - 72,10).2000 \quad \text{ou} \quad 3250.$$

De 72,10 à 73,70, il va en diminuant à mesure que c augmente, et il est exprimé par

$$(73,725 - c).2000.$$

Pour $c = 73,70$, il se trouve réduit à 50 fr.

Au delà, le bénéfice de Paul se change en perte, et la perte, croissante avec c, est exprimée par

$$(c - 73,725).2000;$$

elle est illimitée.

Pour Pierre, les résultats sont différents. On a vu qu'à 70,15 et au-dessous, les deux primes étant abandonnées, il n'y a ni profit ni perte.

A 70,20 Paul lève sa prime, et Pierre éprouve une perte exprimée par

$$(70,20 - 60,825).2000 \quad \text{ou} \quad 750 \text{ fr.}$$

Entre 70,20 et 72,10, sa perte augmente avec c, et elle est exprimée par

$$(c - 69,825).2000.$$

A 72,05, elle s'élève à 4450 fr.

Mais à 72,10, Pierre lève sa prime, et l'expression de sa perte devient

$$(74,275 - 72,12).2000 \quad \text{ou} \quad 4350 \text{ fr.}$$

Entre 72,10 et 74,25, la perte diminue à mesure que c augmente, et elle est exprimée par

$$(74,275 - c).2000.$$

A 74,25 elle se trouve réduite à 50 fr.

Au-dessus de 74,25, la perte se change en un bénéfice exprimé par

$$(c - 74,275).2000.$$

Pour $c = 74,30$, le bénéfice est de 50. Au delà, le bénéfice augmente indéfiniment avec c.

En résumé, de 70,20 à 73,70 inclusivement, Paul fait un bénéfice, dont le maximum est 3750 fr.; au delà il éprouve une perte, qui est illimitée.

Pour Pierre, au contraire, de 70,20 à 74,20 inclusivement, il y a une perte, dont le maximum est 4450 fr.; au delà il y a bénéfice, et ce bénéfice est illimité.

On peut remarquer que de 73,75 à 74,20 inclusivement, les deux spéculateurs éprouvent une perte; cette circonstance tient aux courtages.

§ 5. Des principales valeurs négociées à la Bourse.

622. Obligations de la ville de Paris. Puisque, pour 1045 fr. on a 50 fr. d'intérêt annuel, pour 100 fr. on aurait un intérêt marqué par le quatrième terme de la proportion

$$1045 : 50 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 4{,}784...$$

La valeur trouvée pour x est le taux cherché.

623. Puisque pour obtenir 4,5 d'intérêt il faut 100 fr. de capital, pour obtenir 50 fr. d'intérêt, il faudrait un capital donné par le quatrième terme de la proportion

$$4{,}5 : 100 = 50 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 1111^{f},11...$$

La valeur trouvée pour x est le prix demandé.

624. 1° Il gagne 10 fr. par obligation, soit en tout 600 fr.

2° Il gagne 10 fr. sur 1035 fr. déboursés; sur 100 fr. déboursés il gagnerait le quatrième terme de la proportion

$$1035^{f} : 10^{f} = 100^{f} : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1000^{f}}{1035}.$$

Mais ce gain se rapporte à un mois; pour l'année, il serait 12 fois plus grand, c'est-à-dire

$$\frac{12000^{f}}{1035} \quad \text{ou} \quad 11^{f},594....$$

Le spéculateur a donc placé son argent à un peu moins de 11,60 pour 100.

625. Les 83 obligations à 1040 fr. chacune représentent un capital de $1040^{f} \times 83$ ou 86320 fr. Autant de fois $71^{f},50$ sera contenu dans ce capital, autant le capitaliste aura de fois 3 fr. de rentes; en faisant la division, on obtient pour quotient 1207, et il reste $19^{f},50$.

Le capital employé à l'achat du 3 p. 100 est donc $86320^{f}—19^{f},50$

ou 86300^f,50. Sur chaque quotité de 3 fr. de rentes, le capitaliste gagne 72^f,70 — 71^f,50, ou 1^f,20; le bénéfice obtenu en revendant son 3 pour 100 est donc 1^f,20 × 1207 ou 1448^f,40; ainsi le prix total de ces rentes est 86300^f,50 + 1448^f,40 ou 87748^f,90. Pour racheter ses 83 obligations à 1035 fr., le capitaliste aura à débourser 1035^f × 83 ou 85605. Son bénéfice sera donc 87748^f,90 — 85605 fr. ou 2143^f,90.

Le capital réellement engagé étant 86300^f,50, le taux de l'intérêt, pour le temps pendant lequel ce capital a été engagé, sera donné par la proportion

$$86300^f,50 : 2143^f,90 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{214390}{86300,5}.$$

Mais ce taux se rapporte à une durée de 3 mois $\frac{1}{2}$; pour l'année il devra être multiplié par le rapport de 12 à 3 $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire par $\frac{24}{7}$, ce qui donne $\frac{214390.24}{86300,5.7}$. En effectuant les calculs, on trouve 8,517....

Ainsi le capitaliste a placé son argent à un peu plus de 8 $\frac{1}{2}$ p. 100.

626. Le capitaliste perdrait d'un côté 5 fois 45 fr. ou 225 fr.

Mais il gagnerait, pour le numéro sorti le	3e.....	15000^f
— —	17e.....	2000
— —	28e.....	1000
— —	41e.....	500
— —	57e.....	500
	Total...	19000^f.
Retranchant la perte.....		225
il reste pour bénéfice.....		18775^f.

627. Dans cette hypothèse, tous les numéros dont le capitaliste est porteur sortiraient; il perdrait donc 430 fois 45 fr. ou 19350^f

Le montant des primes gagnées serait d'ailleurs le même que ci-dessus, c'est-à-dire..... 19000^f

Il resterait donc pour le bénéfice la différence..... 350^f.

628. L'obligation sortie la vingtième donne droit à une prime de 2000 fr.; pour qu'il n'y ait ni gain ni perte, il faut que le propriétaire perde 2000 fr. sur ses 50 obligations, ce qui exige qu'il perde sur chacune d'elles le quotient de 2000 fr. par 50, c'est-à-dire 40 fr. Ces obligations ont donc été achetées au prix de 1040 fr. chacune.

629. Au dernier tirage, le nombre des obligations sera réduit à 2673; et comme elles seront toutes tirées, leur propriétaire gagnera toutes les primes, savoir; d'après le tableau du n° **626** :

$$50000^f + 20000^f + 15000^f + 10000^f + 5000^f \times 2$$
$$+ 3000^f \times 6 + 2000^f \times 8 + 1000^f \times 14 + 500^f \times 25 + 2500^f.$$

En effectuant les calculs, on trouve 168000 fr.

Mais le propriétaire des obligations perdra par contre $60^f \times 2673$ ou 160380 fr.; son bénéfice sera donc l'excès de 168000 fr. sur 160380 fr., c'est-à-dire 7620 fr.

630. Il gagnerait comme ci-dessus 168000 fr. de primes; mais il perdrait $65^f \times 2673$ ou 173745 fr.; il perdrait donc l'excès de 173745 fr. sur 168000 fr., c'est-à-dire 5745 fr.

631. Au 13e tirage, il y a déjà eu 12 fois 60 numéros sortis, c'est-à-dire 720; il en reste donc 50000 — 720 ou 49280; ainsi la probabilité que le premier numéro sortant soit celui de l'obligation considérée est le rapport de 1 à 49280, c'est-à-dire $\frac{1}{49280}$.

Au 15e tirage, il aura déjà été tiré 13 fois 60 numéros, plus 1522 numéros, en tout 2302 numéros; il en restera par conséquent 50000 — 2302 ou 47698. La probabilité demandée sera donc le rapport de 1 à 47698, c'est-à-dire $\frac{1}{47698}$.

Au 37e tirage, il ne restera plus que 2673 numéros à tirer; la probabilité demandée sera le rapport de 1 à 2673, c'est-à-dire $\frac{1}{2673}$.

632. Au 13e tirage, l'espérance mathématique est le produit de 50000 fr. par $\frac{1}{49280}$, c'est-à-dire $\frac{50000^f}{49280}$, ou environ $1^f,014$...

Au 15e tirage on obtient $\frac{50000^f}{47698}$, ou environ $1^f,048$....

Au 37e tirage, l'espérance mathématique devient $\frac{50000^f}{2673}$, ou environ $18^f,705$....

633. Pour ces primes, comme pour la prime de 50000 fr., il n'y a, sur 49280 chances, qu'une seule chance favorable; la probabilité est donc $\frac{1}{49280}$.

Pour la prime de 20000 fr., l'espérance mathématique est

$$\frac{20000^f}{49280}, \quad \text{ou} \quad 0^f,406.$$

Pour la prime de 15000 fr., l'espérance mathématique est

$$\frac{15000^f}{49280}, \quad \text{ou} \quad 0^f,304.$$

Pour la prime de 10000 fr., l'espérance mathématique est

$$\frac{10000^f}{49280}, \quad \text{ou} \quad 0^f,203,$$

c'est-à-dire environ $0^f,40$, $0^f,30$ et $0^f,20$.

634. Pour les primes de 5000 fr., il y a deux chances favorables sur 49280; la probabilité de gagner une de ces primes est donc $\frac{2}{49280}$; et l'espérance mathématique correspondante est $\frac{5000^f \times 2}{49280}$, c'est-à-dire $0^f,203...$, ou environ $0^f,20$.

Pour les primes de 3000 fr., il y a six chances favorables, pour le même nombre total de chances; la probabilité de gagner une de ces primes est donc $\frac{6}{49280}$, et l'espérance mathématique correspondante est $\frac{3000^f \times 6}{49280}$, c'est-à-dire $0^f,365...$, ou environ $0^f,36$.

Pour les primes de 2000 fr., il y a huit chances favorables; la probabilité est donc $\frac{8}{49280}$, et l'espérance mathématique $\frac{2000^f \times 8}{49280}$, c'est-à-dire $0^f,324...$, ou environ $0^f,32$.

Pour les primes de 1000 fr., il y a quatorze chances favorables; la probabilité est donc $\frac{14}{49280}$, et l'espérance mathématique $\frac{1000^f \times 14}{49280}$, c'est-à-dire $0^f,284...$, ou environ $0^f,28$.

Pour les primes de 500 fr., il y a 25 chances favorables; la probabilité demandée est donc $\frac{25}{49280}$, et l'espérance mathématique correspondante est $\frac{500^f \times 25}{49280}$, c'est-à-dire $0^f,253...$, ou environ $0^f,25$.

635. Pour cette prime, il n'y a qu'une chance favorable sur

49280; la probabilité de gagner la prime est donc $\frac{1}{49280}$, et l'espérance mathématique correspondante est $\frac{2500^f}{49280}$, c'est-à-dire $0^f,0507...$, ou environ $0^f,05$.

636. 1° Il y a soixante chances favorables sur 49280; la probabilité est donc $\frac{60}{49280}$.

La somme de toutes les primes est 168000 fr. (voy. le n° **629**); leur valeur moyenne est donc $\frac{168000^f}{60}$, et, par conséquent, l'espérance mathématique correspondante à la probabilité considérée serait $\frac{168000^f}{60} \times \frac{60}{49280}$ ou $\frac{168000^f}{49280}$; en effectuant les calculs, on trouve $3^f,408....$

*2° On peut obtenir d'une autre manière la probabilité et l'espérance mathématique demandées.

Pour abréger l'écriture, représentons par n le nombre 49280 des numéros restant à tirer à partir du 13e tirage. Le nombre total des chances que peut offrir le tirage de 60 numéros sur n est le nombre des arrangements de ces n numéros 60 à 60, c'est-à-dire $n(n-1)(n-2)\ldots(n-58)(n-59)$ (*).

Le nombre des chances défavorables s'obtiendra en mettant à part le numéro de l'obligation considérée, c'est-à-dire en diminuant d'une unité le nombre total des numéros, et en calculant le nombre des arrangements 60 à 60 des $n-1$ numéros restants, ce qui donne

$$(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-59)(n-60).$$

Le nombre des chances favorables est donc

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-58)(n-59)-(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-59)(n-60),$$

et, par conséquent, la probabilité demandée est exprimée par

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-58)(n-59)-(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-59)(n-60)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-58)(n-59)},$$

ou bien, en effectuant les divisions autant qu'il est possible,

$$1-\frac{n-60}{n},$$

ou enfin, en réduisant, $\frac{60}{n}$.

(*) Voy. notre *Algèbre élémentaire*, 2e édition, n° 262.

L'espérance mathématique peut aussi s'obtenir en remarquant qu'elle est la somme des espérances calculées aux n°s 632 à 635; c'est-à-dire 3^f,407.... (La différence d'un millième entre cette valeur et celle qui a été obtenue par la première méthode, provient de ce que toutes les espérances calculées aux n°s 632 à 635 ont été obtenues par défaut.)

637. 1° Le nombre des numéros qui restent à tirer au 37e tirage est 2673. Si, pour abréger l'écriture, nous représentons ce nombre par N, le nombre total des chances sera le nombre des arrangements de N objets 60 à 60, c'est-à-dire

$$[1] \qquad N(N-1)(N-2)\ldots(N-59).$$

Pour former toutes les chances favorables, il suffira de faire occuper la première place par l'un des 100 numéros appartenant au porteur considéré, et de mettre à la suite tous les arrangements des N — 1 numéros restants pris 59 à 59. Le nombre des chances favorables sera donc

$$[2] \qquad 100.(N-1)(N-2)\ldots(N-59).$$

La probabilité demandée étant le rapport du nombre des chances favorables au nombre total des chances, elle s'obtiendra en divisant l'expression [2] par l'expression [1], ce qui donne

$$\frac{100}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{100}{2673}, \quad \text{ou encore} \quad 0{,}037411\ldots$$

Remarque. Cette probabilité est 100 fois plus grande que celle que nous avons obtenue dans le cas où la personne dont il s'agit n'était porteur que d'une seule obligation (631); on aurait pu prévoir ce résultat.

2° Le nombre total des chances demeure le même; mais le nombre des chances favorables diminue; car, pour les former, il faut bien, comme tout à l'heure, faire occuper la première place à l'un des 100 numéros appartenant au porteur; mais il ne faut mettre à la suite que les arrangements 59 à 59 des numéros qui ne sont pas entre les mains de ce porteur, c'est-à-dire les arrangements de N — 100 numéros 59 à 59. Le nombre des chances favorables sera donc exprimé par

$$[3] \qquad 100.(N-100)(N-101)(N-102)\ldots(N-158).$$

et, par conséquent, la probabilité demandée sera le quotient de l'expression [3] par l'expression [1].

Si l'on voulait calculer directement ce quotient, on trouverait

pour le dividende un nombre de 204 chiffres, et, pour le diviseur, un nombre de 206 chiffres; le calcul ne peut donc être effectué que par le secours des logarithmes, et il est encore assez pénible.

Le logarithme du dividende est égal à 2, plus la somme des logarithmes des nombres consécutifs depuis 2673 — 100 jusqu'à 2673 — 158, c'est-à-dire depuis 2573 jusqu'à 2515; on trouve, pour ce logarithme, 200,9249351.

Le logarithme du diviseur est la somme des logarithmes des nombres consécutifs depuis 2673 jusqu'à 2673 — 59, c'est-à-dire depuis 2673 jusqu'à 2614; on trouve, pour ce logarithme, 205,3301997.

En retranchant ce second logarithme du premier, on trouve, pour le logarithme du quotient cherché, $\overline{5}$,5947354.

Le quotient lui-même, c'est-à-dire la probabilité demandée, est donc le nombre correspondant 0,00003933....

Remarque. Cette probabilité est moindre que la précédente, ainsi que cela devait être, puisque le nombre des chances favorables est moindre.

638. 1° En conservant les notations du numéro précédent, on a vu que le nombre total des chances est exprimé par

$$[1] \qquad N(N-1)(N-2)\ldots(N-59),$$

N désignant le nombre 2673.

Pour former toutes les chances favorables, il faut faire occuper les six premières places par 6 des numéros appartenant au porteur considéré, ce qui fournit un nombre d'arrangements exprimé par

$$100.99.98.97.96.95;$$

puis, à la suite de ces groupes, il faut mettre tous les arrangements des N — 6 numéros restants, considérés 60 — 6 à 60 — 6, ou 54 à 54, ce qui fournit un nombre d'arrangements marqué par

$$(N-6)(N-7)(N-8)\ldots(N-59);$$

en sorte que le nombre des chances favorables est exprimé par

$$[2] \qquad 100.99\ldots95 \times (N-6)(N-7)\ldots(N-59).$$

La probabilité demandée est le quotient de l'expression [2] par l'expression [1], c'est-à-dire en ôtant les facteurs N — 6, N — 7,

$N-8, \ldots, N-59$, qui deviennent communs au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{100.99.98.97.96.95}{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)},$$

ou

$$\frac{100.99.98.97.96.95}{2673.2672.2671.2670.2669.2668}.$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouve pour le logarithme du numérateur 11,9336278, et pour celui du dénominateur 20,5595551. Le logarithme du quotient est donc

$$\bar{9},3740727,$$

et la probabilité demandée est le nombre correspondant à ce logarithme, c'est-à-dire

$$0,000000002366....$$

2° La différence entre ce second cas et le premier consiste en ce que, à la suite de chacun des arrangements 6 à 6 des 100 numéros appartenant au porteur, il faut mettre les arrangements 54 à 54, non plus des $N-6$ numéros restants, mais bien des numéros qui restent, lorsque du nombre N on retranche les 100 numéros du porteur. Le nombre des chances favorables est donc exprimé par

$$[3] \quad 100.99\ldots95 \times (N-100)(N-101)\ldots(N-153)\ldots,$$

et la probabilité demandée est exprimée par

$$\frac{100.99\ldots95 \times (N-100)(N-101)\ldots(N-153)}{N(N-1)(N-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(N-59)}.$$

Nous avons vu au numéro précédent, que le logarithme du dénominateur est 205,3301997. Le logarithme du numérateur s'obtiendra en faisant 1° la somme des logarithmes des nombres consécutifs depuis 100 jusqu'à 95, ce qui donne 11,9336278; 2° la somme des logarithmes des nombres consécutifs depuis 2673 — 100 jusqu'à 2673 — 153, ou depuis 2573 jusqu'à 2520, ce qui donne 183,9205194. Le logarithme du numérateur est la somme de ces deux sommes, c'est-à-dire 195,8541472; et le logarithme du quotient est par conséquent $\bar{10},5239475$.

La probabilité demandée est le nombre correspondant à ce logarithme, c'est-à-dire 0,0000000003341.

Remarque. Cette probabilité est moindre que la précédente, ce

qui devait être, puisque le nombre des chances favorables est lui-même plus petit.

639. Pour former les chances favorables, il faut faire occuper les 60 premières places par 60 des numéros appartenant au porteur considéré; le nombre de ces chances est donc le nombre des arrangements de 1000 objets 60 à 60, c'est-à-dire

[1] $$1000.999.998\ldots941.$$

Le nombre total des chances est d'ailleurs exprimé par

[2] $$N(N-1)(N-2)\ldots(N-59)\ldots,$$

formule dans laquelle N représente le nombre 2673.

La probabilité cherchée a donc pour valeur

$$\frac{1000.999.998\ldots941.}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-59)}.$$

Le logarithme du numérateur est la somme des logarithmes des nombres consécutifs depuis 1000 jusqu'à 941, c'est-à-dire

$$179{,}2155826.$$

Quant au dénominateur, on a déjà vu que son logarithme est

$$205{,}3301997.$$

Ainsi le logarithme du quotient est

$$\overline{27}{,}8853829$$

et la probabilité demandée est le nombre correspondant à ce logarithme, savoir

$$0{,}0000000000000000000000000768\ldots,$$

quantité moindre qu'une unité du 26e ordre décimal.

Quant à l'espérance mathématique correspondante, elle est le produit de 168000 fr. par cette probabilité, c'est-à-dire

$$0{,}000000000000000000000129\ldots,$$

quantité moindre qu'une unité du 20e ordre décimal.

640*. Le nombre total des chances sera le nombre des arrangements de N objets m à m, savoir

[1] $$N(N-1)(N-2)\ldots(N-m+1).$$

1° Pour former les chances favorables, il faut faire occuper

les p places déterminées par p numéros pris parmi les n numéros du porteur, ce qui fournit d'abord un nombre d'arrangements marqué par

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1).$$

Puis, il faut faire occuper les $m-p$ autres places par $m-p$ numéros pris parmi les $N-p$ numéros restants, ce qui fournit un nombre d'arrangements marqué par

$$(N-p)(N-p-1)(N-p-2)\ldots[(N-p)-(m-p)+1];$$

et comme à chacun des arrangements p à p on peut faire correspondre l'un quelconque des arrangements $m-p$ à $m-p$, le nombre des chances favorables sera le produit des deux expressions ci-dessus, c'est-à-dire

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\times(N-p)(N-p-1)\ldots(N-m+1),$$

en sorte que la probabilité demandée sera exprimée par

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(N-p)(N-p-1)\ldots(N-m+1)}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-m+1)}.$$

Cette formule se simplifie, attendu que les facteurs $N-p$, $N-p-1$, etc. jusqu'à $N-m+1$, se trouvent à la fois au numérateur et au dénominateur; en les supprimant, il reste pour la probabilité demandée :

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-p+1)}.$$

2° Le second cas diffère du premier en ce que les arrangements $m-p$ à $m-p$ doivent être formés, non plus avec les $N-p$ numéros restants, mais uniquement avec ceux qui n'appartiennent pas au porteur et qui sont au nombre de $N-n$. Le nombre des chances favorables est donc dans ce cas

$$n(n-1)\ldots(n-p+1)\times(N-n)(N-n-1)\ldots[(N-n)-(m-p)+1]$$

et la probabilité demandée a pour expression

$$[A]\quad \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)\times(N-n)(N-n-1)\ldots[(N-n)-(m-p)+1]}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-m+1)}.$$

Si m est moindre que $n+1$, on aura successivement

$$m < n+1,$$

$$N+m < N+n+1,$$

d'où

$$N-n < N-m+1;$$

dans ce cas, tous les facteurs du numérateur à partir de $N - n$ seront moindres que le plus petit facteur du dénominateur; ces facteurs ne pourront donc pas être supprimés.

Si au contraire m est plus grand que $n + 1$ et qu'on ait

$$m = n + k,$$

k étant un nombre plus grand que 1, on en déduira

$$N - n = N - m + k,$$

et tous les facteurs depuis $N - m + k$ jusqu'à $N - m + 1$ pourront être supprimés comme communs aux deux termes; dans ce cas, l'expression de la probabilité demandée se réduira à

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1).(N-n-k)(N-n-k-1)\ldots[(N-n)-(m-p)+1]}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-m+k+1)}.$$

ou $$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(N-m)(N-m-1)\ldots[(N-n)-(m-p)+1]}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)}$$

641*. La probabilité de gagner toutes les primes est exprimée par

$$[1] \qquad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-59)}{N(N-1)(N-2)\ldots(N-59)}.$$

La probabilité de gagner toutes les primes à l'exception de la première sera exprimée par la formule (A) du numéro précédent, dans laquelle il faut attribuer à p la valeur 59 et à m la valeur 60.

Pour que cette formule coïncide avec la précédente, il faut que le facteur $(N - n)$ qui suit $(n - p + 1)$ lui soit inférieur d'une unité, ce qui exige qu'on ait

$$N - n = n - p, \quad \text{d'où} \quad n = \tfrac{1}{2}(N + p),$$

ou, en mettant pour N et p leurs valeurs,

$$N = \tfrac{1}{2}(2673 + 59) = 1366.$$

Dans ce cas, le facteur $N - n$ est le dernier facteur du numérateur, car $N - n$ et $[(N - n) - (m - p) + 1]$ se réduisent à la même valeur, puisque $m - p$ est alors égal à l'unité.

La probabilité que l'on considère a par conséquent pour expression

$$\frac{1366.1365.1364\ldots1307}{2673.2672.2671\ldots2614},$$

quantité qu'il serait facile de calculer par logarithmes comme dans les numéros précédents.

642. Actions de la banque. La valeur demandée est le produit de 4160 fr. par 91250, c'est-à-dire 3746725000 fr.

643. Puisque 3000 fr. ont rapporté $112^f + 82$ fr. ou 194 fr., 100 fr. rapporteraient 30 fois moins, c'est-à-dire $6^f,466...$ ou environ $6^f,47$.

644. Puisque pour retirer 6 fr. d'intérêt il faut débourser 100 fr., pour retirer 1 fr. d'intérêt il eût fallu débourser 6 fois moins, ou $\frac{100^f}{6}$, et pour retirer un intérêt de 154 fr. il eût fallu débourser 154 fois plus, c'est-à-dire $\frac{100^f \times 154}{6}$, ou $2566^f,67$. Tel est le prix demandé.

645. Puisque 100 fr. ont rapporté $5^f,50$ pendant l'année, 1 fr. aurait rapporté 100 fois moins ou $0^f,055$; par conséquent 3220 fr. ont rapporté 3220 fois plus, c'est-à-dire $0^f,055 \times 3220$ ou $177^f,10$.

646. Il faut d'abord trouver le cours moyen de 1844; pour cela il faut faire la somme des cours moyens répondant à chacun des 12 mois de l'année, ce qui donne 37615 fr., et diviser cette somme par 12, ce qui donne $3134^f,58$ .. ou à peu près $3134^f,60$. En y ajoutant 5 fr., on aura le prix auquel ont été payées les actions; on obtient ainsi $3139^f,60$.

Il faut maintenant faire la somme des dividendes, ce qui donne :

Pour les premiers semestres.....	651^f
Pour les seconds.....	671
En tout...	1342^f.

Cela posé, puisque $3139^f,60$ ont rapporté 1342 fr. en 10 ans, ils ont rapporté moyennement par année $134^f,20$; par conséquent 100 fr. rapporteraient dans le même temps le quatrième terme de la proportion

$$3139^f,60 : 134^f,20 = 100^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 4^f,274....$$

Le taux de l'intérêt cherché est donc un peu plus de $4\frac{1}{4}$ p. 100.

647. 1° Les 6 pour 100 du capital nominal de 1000 fr. font 60 fr. Le dividende 194 fr., payé par action en 1854, se compose de ces 60 fr. plus les $\frac{2}{3}$ du reste du bénéfice; si donc de 194 fr. on retranche 60 fr., le reste, 134 fr., exprimera les $\frac{2}{3}$ de ce qui reste du bénéfice par action quand on retranche 60 fr. Or, le

nombre dont les $\frac{2}{3}$ font 134 fr. est le quotient de 134 fr. par $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire 201 fr. ; en y ajoutant 60 fr. on aura donc le bénéfice par action, qui est ainsi 261 fr.

Pour obtenir le bénéfice total, il faut multiplier ce bénéfice par le nombre des actions, ou par 91250, ce qui donne 23816250 fr.

2° On peut encore résoudre ce problème algébriquement. Soit x le bénéfice par action, le dividende se composera de 60 fr. plus les $\frac{2}{3}$ de $x - 60$ fr.; on devra donc avoir

$$60 + \tfrac{2}{3}(x - 60) = 194$$

ou

$$20 + \tfrac{2}{3}x = 194;$$

d'où

$$\tfrac{2}{3}x = 174 \quad \text{et} \quad x = 261,$$

Multipliant ensuite par 91250 comme ci-dessus, on obtient de même le bénéfice total 23816250 fr.

648. Les 4000 fr., à 5 ponr 100, rapporteraient un intérêt de 200 fr.; tel doit être le dividende par action. En opérant comme au numéro précédent, on trouvera que le bénéfice correspondant de la Banque, par action, doit être de 270 fr. Son bénéfice total serait donc

$$270^{f} \times 91250, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 24637500 \text{ fr.}$$

Quant à son bénéfice pour 100, on l'obtiendra immédiatement en remarquant que puisque 1000 fr. rapportent 270 fr., une somme 10 fois moindre rapportera 10 fois moins ; le taux cherché serait donc 27 pour 100.

649. Les 1500 fr. de rentes 3 pour 100, à 71,50, représentent un capital donné par la proportion

$$3 : 71{,}50 = 1500 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 71^{f}{,}50 \times 500,$$

ou

$$x = 35750 \text{ fr.}$$

En divisant ce capital par 4090, on aura le nombre d'actions de la Banque qui ont été achetées ; on trouve pour quotient 8, et il reste 3030 fr. non employés.

Ces huit actions, revendues à 4160, produisent un bénéfice de 8 fois 60 fr., ou de 480 fr., auquel il faut ajouter 8 fois les 110 fr. de dividende, soit 880 fr.; ce qui fait en tout 1360 fr. de bénéfice.

En ajoutant ce bénéfice aux 35750 fr., prix de la vente du 3 pour 100, on obtient 37110 fr.

Au cours de 69,80, les 1500 fr. de rentes 3 pour 100 coûteront le quatrième terme de la proportion

$$3 : 69{,}80 = 1500 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 69^{f},80 \times 500,$$

ou 34900 fr.

Retranchant ce prix des 37110 fr. obtenus ci-dessus, on a pour reste 2210 fr., qui représentent le bénéfice total.

Le bénéfice pour 100 s'obtiendra par la proportion

$$35750^{f} : 2210^{f} = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 6^{f},18....$$

Mais ce bénéfice se rapporte à une durée de 6 mois; pour l'année, il faut le doubler; le taux demandé est donc 12,36... pour 100.

650. Actions du comptoir d'escompte. Au prix le plus bas, 535 fr. ont rapporté 40 fr.; on en conclut que 1 fr. aurait rapporté 535 fois moins, ou $\frac{40^{f}}{535}$, et que 100 fr. eussent rapporté 100 fois plus, ou $\frac{40^{f} \times 100}{535}$, c'est-à-dire $7^{f},476...$, ou un peu moins de $7\frac{1}{2}$ pour 100.

Au prix le plus haut, 810 fr. ont rapporté 40 fr.; et, en raisonnant de même, on verrait que 100 fr. devraient rapporter $\frac{40^{f} \times 100}{810}$, c'est-à-dire $4^{f},938...$, ou un peu moins de 5 pour 100.

651. 1° Les 4 pour 100 sur 500 fr. donnent une somme de 20 fr.; si on la retranche du dividende payé par action en 1850, c'est-à-dire de 40 fr., le reste, 20 fr., exprimera les $\frac{3}{4}$ de ce qui reste du bénéfice par action, quand on en retranche 20 fr. Or, le nombre dont les $\frac{3}{4}$ valent 20 fr., est le quotient de 20 fr. par $\frac{3}{4}$, ou $\frac{80^{f}}{3}$, ou $26^{f},6666....$ En y ajoutant 20 fr., on aura donc le bénéfice par action; on trouve ainsi $46^{f},6666....$ Le bénéfice total s'obtiendra ensuite en multipliant $46^{f},6666...$ par 40000, nombre des actions, ce qui donne $1866666^{f},66....$

2° Autrement : soit x le bénéfice par action, on devra avoir

$$20 + \tfrac{3}{4}(x - 20) = 40;$$

d'où $\quad \frac{3}{4}x = 35 \quad$ et $\quad x = \frac{140}{3} = 46^{f},6666....$

Le reste s'achèvera comme dans la première méthode.

652. Les 5 pour 100 sur 720 fr. font une somme de 36 fr.; tel

doit être le dividende payé par action. En opérant ensuite comme au numéro précédent, on trouvera que le bénéfice du Comptoir doit être de $41^f,3333...$, et le bénéfice total de $1633333^f,33$.

653. Le bénéfice total étant de 2000000 fr., le bénéfice par action en serait la 40000e partie, c'est-à-dire 50 fr. Le dividende à payer par action se composerait alors de 20 fr., plus les $\frac{3}{4}$ de ce qui reste de 50 fr. quand on en retranche 20 fr.; c'est-à-dire que ce dividende aurait pour expression

$$20^f + \frac{3}{4}(50^f - 20^f) \quad \text{ou} \quad \frac{20^f + 50^f \times 3}{4},$$

ce qui revient à $42^f,50$.

Le prix d'une action s'obtiendrait dès lors par la proportion

$$4,50 : 100 = 42^f,50 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 944^f,44.$$

654. Les 75 actions du Comptoir d'escompte, vendues à 580 fr., représentent un capital de $580^f \times 75$, ou de. . 43500 fr.

Les 15 actions de la Banque, achetées à 2840 fr., représentent un capital de 2840×15, ou de. 42600

La différence. . . 900 fr.

représente un premier bénéfice.

D'autre part, le dividende payé dans l'année pour les 75 actions du Comptoir d'escompte se serait élevé à $36^f \times 75$, ou. 2700 fr.

Et le dividende payé pour les 15 actions de la Banque s'est élevé à $194^f \times 15$, ou à. 2900

La différence. . . 200 fr.

représente un second bénéfice qu'il faut ajouter au premier; en sorte que le bénéfice total résultant de l'opération a été de 1100 fr.

Quant au bénéfice pour 100, il est donné par le quatrième terme de la proportion

$$43500^f : 1100^f = 100^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 2^f,528...,$$

c'est-à-dire un peu plus de $2\frac{1}{2}$ pour 100.

655. Actions et obligations du crédit foncier. Il est de 60000 fois 250 fr., c'est-à-dire de 15000000 fr.

656. Si l'on a acheté au prix le plus bas, 440 fr. ont rapporté

30 fr.; par conséquent 100 fr. auraient rapporté le quatrième terme de la proportion

$$440 : 30 = 100^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 6^f,818...,$$

ou près de 6,82 pour 100.

Si l'on a acheté au prix le plus haut, 660 fr. ont rapporté 30 fr.; par conséquent 100 fr. auraient rapporté le quatrième terme de la proportion

$$660 : 30 = 100^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 4^f,545...,$$

ou un peu moins de 4,55 pour 100.

657. 1° Les 5 pour 100 sur 500 fr. font une somme de 25 fr.; en la retranchant du dividende 30 fr. payé en 1854, il reste 5 fr. qui représentent les $\frac{4}{5}$ de la différence entre le bénéfice par action et 25 fr. Or, le nombre dont les $\frac{4}{5}$ font 5 fr., est le quotient de 5 fr. par $\frac{4}{5}$, c'est-à-dire $\frac{25}{4}$ ou $6^f,25$; en y ajoutant 25 fr., on obtient le bénéfice par action, qui est ainsi de $31^f,25$. Le bénéfice total s'obtient en multipliant $31^f,25$ par 60000, ce qui donne 1875000 fr.

Le bénéfice pour 100 s'obtiendra en remarquant que le bénéfice net qu'on vient de déterminer doit être rapporté au capital réel, c'est-à-dire à 30000000 fr.; en sorte qu'en appelant x le taux du bénéfice, on doit avoir

$$30000000 : 1875000 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 6,25,$$

c'est-à-dire $6\frac{1}{4}$ pour 100.

658. Il faut calculer d'abord les sommes déboursées. Elles se composent :

De 18 fois 925 fr., soit.....	16650 fr.
De 30 fois 395 fr., soit.....	11850
De 25 fois 440 fr., soit.....	11000
De 43 fois 85 fr., soit.....	3655
De 51 fois 90 fr., soit.....	4590
Total...	47745 fr.

Il faut calculer en second lieu les rentrées.

Les actions de 1000 fr. ont fourni chacune un intérêt de 30 fr., ce qui fait en tout 18 fois 30 fr., ou..... 540 fr.

A reporter... 540 fr.

Report. . . . 540 fr.

Sur les 30 premières actions de 500 fr., l'énoncé indique que 7 ont été remboursées à 600 fr., ce qui produit 4200

Les 23 autres ont produit chacune un intérêt de 15 fr., ce qui fait en tout $15^f \times 23$, ou 345

Les 25 nouvelles obligations de 500 fr. ont produit chacune un intérêt de 20 fr., en tout $20^f \times 25$, ou. . . . 500

Sur les 43 premières obligations de 100 fr., l'énoncé indique que 15 ont été remboursées à 120 fr., ce qui fait 120×15, ou. 1800

Les 28 autres ont produit un intérêt de 3 fr. chacune, soit en tout $3^f \times 28$, ou. 84

Enfin, les 51 dernières obligations de 100 fr. ont produit chacune un intérêt de 4 fr., soit en tout $4^f \times 51$, ou 204

La somme de toutes les rentrées s'élève à. . . . 7673 fr.

Mais pour obtenir le bénéfice, il faut en déduire le prix de revient des obligations remboursées, savoir :

7 fois 395 fr., ou. . . . . 2765 fr.

plus, 15 fois 85, ou. 1275

En tout. . . 4040 fr. 4040

Le bénéfice se réduit donc à. . . . . 3633 fr.

Le bénéfice pour 100 sera donné par la proportion

$$47745 : 3633 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 7{,}609\ldots,$$

ou un peu plus de 7,60 pour 100.

659. Actions du crédit mobilier. Pour produire 9,65 d'intérêt, il faut un capital de 100 fr.; pour produire 1 franc d'intérêt, il faudrait $\frac{100^f}{9{,}65}$; et pour produire 59 fr. d'intérêt, il a fallu un capital 59 fois plus grand, c'est-à-dire $\frac{5900^f}{9{,}65}$, ou bien $611^f{,}398\ldots$, ou à peu près $611^f{,}40$.

660. Soit x le bénéfice par action; d'après l'énoncé on devra avoir

$$25 + \frac{9}{10}\left(x - 25 - \frac{1}{20}x\right) = 59,$$

ou

$$\frac{1}{10} \cdot 25 + \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{20} \cdot x = 59 \text{ fr.},$$

ou encore $$\frac{171}{200}x = 56{,}50;$$

d'où $$x = \frac{56^{f},50 \times 200}{171} = 66^{f},08187....$$

Pour obtenir le bénéfice total, il reste à multiplier par 120000, ce qui donne $7929824^{f},40$.

661. Si, en achetant des actions du Crédit mobilier à 1360 fr., on place son argent au même taux qu'en achetant du $4\frac{1}{2}$ p. 100 à 94,10, on doit avoir, en nommant y le dividende payé aux actionnaires,

$$94{,}10 : 4{,}50 = 1360 : y, \quad \text{d'où} \quad y = 65^{f},037....$$

En opérant dès lors comme au numéro précédent, on aura

$$25 + \frac{9}{10}\left(x - 25 - \frac{1}{20}x\right) = 65{,}037;$$

d'où l'on tirera $$x = 73^{f},14269....$$

Le bénéfice total sera donc

$$73^{f},14269... \times 120000 \quad \text{ou} \quad 8777122^{f},80.$$

662. Actions industrielles. Le dividende cherché sera donné par la proportion

$$67{,}50 : 3 = 935 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 41^{f},55....$$

663. Son bénéfice est de 75 fois 5 fr., c'est-à-dire de 375 fr. Quant au taux de ce bénéfice, puisque 925 fr. ont rapporté 5 fr. en un mois, ils rapporteraient 60 fr. en un an; le taux cherché sera donc le quatrième terme de la proportion

$$925 : 60 = 100^{f} : x, \quad \text{d'où} \quad x = 6{,}486...,$$

ou un peu moins de $6\frac{1}{2}$ pour 100.

664. L'intérêt de 500 fr. à 5 pour 100 est 25 fr.; en y ajoutant 40 fr., on obtient 65 fr. pour la somme répartie par action; l'ensemble des répartitions s'est donc élevé à $65^{f} \times 72000$, c'est-à-dire à 4680000 fr. Ajoutant cette somme aux dépenses de la Compagnie, c'est-à-dire à $6466826^{f},50$ on obtient pour le total des sommes dépensées $11146826^{f},50$; et en retranchant ce total de la recette 11815330,32, on trouve pour l'excédant de bénéfice destiné au fonds d'amortissement $668503^{f},82$.

665. Les 90 actions lui ont rapporté 90 fois 65 fr. (voir le

numéro précédent), c'est-à-dire 5850 fr. La somme déboursée sera donc donnée par la proportion

$$7 : 100 = 5850^{f} : x, \quad \text{d'où} \quad x = 83571^{f},43.$$

Le prix d'une action est la quatre-vingt-dixième partie de cette somme, c'est-à-dire $928^{f},573$....

666. Si l'on divise le bénéfice total par le nombre des actions, c'est-à-dire 1875 fr. par 150, le quotient $12^{f},50$ exprimera le bénéfice par action. Il faudra donc que le cours s'élève à $1065^{f} + 12^{f},50$, c'est-à-dire à $1077^{f},50$. Et, en effet, si le spéculateur qui a acheté à terme à 1065 fr. revend à $1077^{f},50$, il fera un bénéfice de $12^{f},50$ par action, abstraction faite du courtage; le bénéfice total sera donc $12^{f},50 \times 150$ ou 1875 fr.

667. Le spéculateur achète dans l'espoir de revendre avec bénéfice; pour cela, il faut qu'au moment de la liquidation le cours des actions du chemin de fer d'Orléans soit supérieur à 1365 fr. Dans ce cas, le spéculateur lève la prime, c'est-à-dire exécute son marché, et gagne, par action, la différence entre le cours et 1365 fr.

Si, par exemple, le cours s'élève à 1380 fr., il gagne 15 fr. par action, soit en tout $15^{f} \times 125$ ou 1875 fr. Le bénéfice est illimité.

Si le cours est inférieur à 1365 fr., il y a perte pour le spéculateur, puisqu'il vendra moins cher qu'il n'a acheté; et la perte, par action, sera la différence entre 1365 fr. et le cours.

Si, par exemple, le cours descend à 1355 fr., il perd 10 fr. par action, soit en tout 1250 fr.

Si le cours descend au-dessous de $1365^{f} - 10$ fr., c'est-à-dire au-dessous de 1355 fr., le spéculateur abandonne la prime, et sa perte se trouve ainsi limitée à 10 fr. par action, soit en tout à 1250 fr.

Ce spéculateur joue à la hausse, puisqu'il a intérêt à ce que le cours s'élève.

668. Soit c le cours des actions du chemin de fer de Lyon au moment de la liquidation. Si le spéculateur abandonne sa prime, il perd d'abord 10 fr. par action; mais, de plus, comme pour exécuter son marché ferme il doit acheter au cours c, il perd encore la différence entre ce cours et le prix de vente; ainsi sa perte totale est exprimée par

$$[1] \qquad 10 + c - 1352^{f},50.$$

S'il lève la prime, les deux marchés s'exécutent, et il perd la différence entre le prix de vente et le prix d'achat, ou

$$[2] \qquad 1360^f - 1352^f,50.$$

Pour qu'il ait intérêt à lever, il faut donc que la perte exprimée par [1] soit plus grande que celle qui est exprimée par [2] et qu'on ait

$$10 + c - 1352,50 > 1360 - 1352,50, \quad \text{d'où} \quad c > 1350.$$

Cela posé, nous pouvons analyser les chances du spéculateur.

Pour $c > 1350$, il lève la prime et perd $7^f,50$ par action, soit en tout $7^f,50 \times 175$ ou $1312^f,50$.

Pour $c = 1350$, il perd $7^f,50$ par action, soit qu'il lève ou qu'il abandonne la prime.

Pour $c < 1350$, il abandonne la prime; et sa perte par action est exprimée par la formule [1]. Elle est d'autant moindre que c est plus petit. Elle se réduit à zéro lorsqu'on a

$$10 + c - 1352,50 = 0, \quad \text{d'où} \quad c = 1342,50.$$

Pour $c < 1342,50$, la perte se change en bénéfice, et ce bénéfice est exprimé par

$$1352,50 - c - 10 \quad \text{ou} \quad 1342,50 - c.$$

Ce bénéfice est d'autant moindre que c est plus petit; il est donc illimité.

Le spéculateur dont il s'agit joue à la baisse, puisqu'il a intérêt à ce que le cours soit le plus bas possible.

669. Comme au n° **620**, il ne peut se présenter que trois cas : ou les deux primes seront abandonnées; ou la prime de 10 fr. sera abandonnée, l'autre ne l'étant pas; ou les deux primes seront levées. Il ne saurait arriver que la prime de 10 fr. fût seule levée.

1° Les primes sont abandonnées. Dans ce cas, le spéculateur gagne la différence des deux primes, soit 10 fr. par action, ou 2000 fr. en tout.

2° La prime de 10 fr. est abandonnée. Le spéculateur a vendu à 810; et, pour exécuter son marché, il faudra qu'il rachète au cours du jour; soit c ce cours. Il perdra donc par action

$$c - 810$$

plus la prime de 10 fr. qu'il abandonne; soit en tout

$$c - 810 + 10 \quad \text{ou} \quad c - 800.$$

La perte sera nulle pour $c = 800$, et se changera en bénéfice pour $c < 800$.

Quant à l'adversaire du spéculateur, il a acheté à 810, et il revendra au comptant au cours c; il gagnera donc $c - 810$ plus la prime de 10 fr., c'est-à-dire $c - 800$ par action. Ce gain se change en perte si c est moindre que 800; la perte est alors exprimée par $800 - c$; et pour que cet adversaire ait intérêt à lever, il faut qu'on ait $800 - c < 10$, différence des deux primes;

d'où $$c > 790.$$

3° Les deux primes sont levées. Le spéculateur a vendu à 810 fr. et acheté à $822^f,50$; il perdra donc $12^f,50$ par action. Et pour qu'il ait intérêt à lever, il faudra qu'on ait

$$c - 800 > 12^f,50, \quad \text{d'où} \quad c > 812^f,50.$$

Nous pouvons maintenant analyser les chances du spéculateur.

Si c est inférieur à 790, les deux primes sont abandonnées, et le spéculateur gagne 10 fr. par action, soit en tout 2000 fr.

Si $c = 790$, il peut se faire que les deux primes soient encore abandonnées, ou bien que la prime de 20 fr. soit levée. Dans ce dernier cas, le spéculateur gagne $800^f - 790$ fr. ou 10 fr. par action, soit 2000 fr. en tout, comme dans le premier cas.

Si l'on a $c > 790$ et en même temps $c < 800$, le spéculateur gagne $800 - c$ par action, soit en tout $(800 - c).200$.

Pour $c = 797^f,50$ par exemple, le bénéfice est de

$$2^f,50 \times 200 \quad \text{ou} \quad 500 \text{ fr.}$$

Si $c = 800$, il n'y a ni gain ni perte pour le spéculateur.

Si l'on a $c > 800$ et $c < 812,50$, le bénéfice se change en une perte, qui est de $c - 800$ par action, soit en tout $(c - 800).200$. Par exemple, pour $c = 810$, la perte est de $10^f \times 200$ ou 2000 fr.

Pour $c = 812,50$, la perte est de $12^f,50$ par action, soit $12^f,50 \times 200$ ou 2500 fr., soit que le spéculateur lève ou abandonne sa prime.

Si l'on a $c > 812,50$ les deux primes sont levées, la perte reste bornée à $12^f,50$ par action ou 2500 fr. en tout.

En résumé, quand le cours varie de 790 et au-dessous à 812,50 et au-dessus, les chances du spéculateur varient depuis un bénéfice de 2000 fr. jusqu'à une perte de 2500 fr.

Ce spéculateur joue donc à la baisse.

670. Pour résoudre la première question, il suffit de diviser

chacun des dividendes par la moyenne entre le plus haut et le plus bas cours correspondant; l'année qui donnera le quotient le plus élevé sera l'année demandée.

Mais, pour abréger, on peut remarquer qu'on aura des résultats proportionnels en divisant chaque dividende par la somme du plus haut et du plus bas cours correspondant. On trouvera ainsi :

$$\frac{160}{3750+3300}=\frac{160}{7050}=\frac{16}{705}=0{,}02269\ldots\ldots \quad (1845)$$

$$\frac{65{,}50}{3300+2575}=\frac{65{,}50}{5875}= \quad =0{,}01111\ldots\ldots \quad (1846)$$

$$\frac{130}{2600+2300}=\frac{13}{490}= \quad =0{,}02653\ldots\ldots \quad (1847)$$

$$\frac{140}{2350+1200}=\frac{14}{355}= \quad =0{,}03943\ldots\ldots \quad (1848)$$

$$\frac{145}{2100+1500}=\frac{145}{3600}= \quad =0{,}04027\ldots\ldots \quad (1849)$$

$$\frac{165}{2175+2050}=\frac{165}{4225}= \quad =0{,}03905\ldots\ldots \quad (1850)$$

$$\frac{225}{2500+2100}=\frac{225}{4600}= \quad =0{,}04891\ldots\ldots \quad (1851)$$

$$\frac{170}{3500+3000}=\frac{17}{650}= \quad =0{,}02615\ldots\ldots \quad (1852)$$

$$\frac{200}{3400+3200}=\frac{2}{66}=\frac{1}{33}=0{,}03030\ldots\ldots \quad (1853)$$

$$\frac{220}{3100+2900}=\frac{22}{600}=\frac{11}{300}=0{,}03666\ldots\ldots \quad (1854)$$

On voit que c'est l'année 1851 qui a offert le placement le plus avantageux. La moyenne entre le plus haut et le plus bas cours de cette année étant 2300, on obtiendra le taux du placement en posant la proportion :

$$2300 : 225 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 9{,}782\ldots.$$

671. De 1852 à 1855 il y a trois ans; le capitaliste a donc touché, par action, 3 fois 75 fr. ou 225; à quoi il faut ajouter la différence entre le prix de vente 1050 fr., et le prix d'achat 860 fr.,

c'est-à-dire 190 fr. Chaque action lui a donc rapporté, en 3 ans, $225^f + 190^f$ ou 415 fr., et, par conséquent, le bénéfice total a été de $415^f \times 60$, c'est-à-dire de 24900 fr.

Le bénéfice annuel, par action, a été $\frac{415^f}{3}$; le cours du 3 pour 100, qui donnerait lieu au même intérêt, serait donné par la proportion

$$\frac{415}{3} : 860 = 3 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 18{,}65.$$

672. Ce cours suppose un dividende proportionnel, donné par la proportion

$$3800 : 400 = 4000 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 421{,}52.$$

Le cours auquel il faudrait acheter du $4\frac{1}{2}$ pour 100 pour obtenir le même intérêt, sera donné par la proportion

$$400 : 3800 = 4{,}50 : y;$$

d'où
$$y = \frac{4^f{,}50 \times 38}{4} = 42{,}75.$$

673. La différence entre 6900 fr. et 1350 fr., est 5550 fr.; cette différence constitue un premier bénéfice, auquel il faut ajouter les 2290 fr.; on obtient ainsi 7840 fr. pour le bénéfice de 12 années.

Si x représente le dividende demandé, $12x$ sera la somme des dividendes répartis en 12 années; et, pour que le taux de l'intérêt soit le même, on devra avoir

$$1350 : 7840 = 1000 : 12x, \quad \text{d'où} \quad 12x = 5807^f{,}40,$$

et par suite
$$x = 483^f{,}95.$$

674. Fonds étrangers. Le cours cherché sera évidemment donné par la proportion

$$5 : 88\tfrac{5}{8} = 4\tfrac{1}{2} : x, \quad \text{d'où} \quad x = 91{,}0125.$$

Le $4\frac{1}{2}$ pour 100 français devrait donc être à 91 environ.

675. Le cours des métalliques étant $88\frac{5}{8}$, cela revient à dire qu'une obligation de 100 florins (valeur nominale) ne vaut réellement que 88 florins $\frac{5}{8}$; par conséquent une obligation de 1000 florins (ce sont celles dont il s'agit ici) vaut, à ce cours, 10 fois 88 florins $\frac{5}{8}$, ou un nombre de francs marqué par

$$2^f{,}60 \times 88\tfrac{5}{8} \times 10 \quad \text{ou} \quad 2304^f{,}25,$$

et 25 obligations pareilles ont une valeur de

$$2304^f,25 \times 25 \quad \text{ou} \quad 57606^f,25.$$

Au cours de $89\frac{3}{8}$, on trouve de même que leur valeur est exprimée par

$$2^f,60 \times 89\tfrac{3}{8} \times 10 \times 25 \quad \text{ou} \quad 58093^f,75.$$

On achète pour cette somme du 3 pour 100 français à 67,50; la quotité de rentes ainsi obtenue est exprimée par la proportion

$$67,50 : 3 = 58093^f,75 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{58093^f,75 \times 3}{67,50};$$

en ne prenant que la partie entière du quotient, puisque la quotité de rentes doit être exprimée par un nombre entier de francs, on trouve 2581 fr., et il reste $637^f,50$ non employés.

Ces 2581 fr. de rentes, vendus à 68,10, représentent un capital donné par la proportion

$$3 : 68,10 = 2581 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 58588^f,70,$$

auquel il faut ajouter les $637^f,50$ non employés tout à l'heure, ce qui donne pour le produit final $59226^f,20$.

Retranchant les $57606^f,25$ primitivement déboursés, on obtient $1619^f,95$ pour le bénéfice demandé.

Le bénéfice pour une année serait double, c'est-à-dire $3239^f,90$. Le bénéfice pour 100 s'obtiendra donc par la proportion

$$57606^f,25 : 3239^f,90 = 100 : x;$$

d'où l'on tire $x = 5,624...$, ou un peu plus de 5,62 pour 100.

676. Les 3600 fr. de rentes 3 pour 100, à 70,50, représentent un capital donné par la proportion

$$3 : 70,50 = 3600^f : x, \quad \text{d'où} \quad x = 84600 \text{ fr.}$$

Les fonds romains étant à 89, le prix d'une obligation est de 890 fr.; pour avoir le nombre d'obligations cherché, il faut donc diviser 84600 par 890, en ne prenant que la partie entière, ce qui donne 95.

Chaque obligation rapportant 50 fr. de rentes, les 95 obligations rapporteront 95 fois plus, ou 4450 fr.

677. D'après ce qui a été dit dans l'énoncé, si l'on multiplie la valeur de la piastre par le cours du 3 pour 100 intérieur, c'est-à-dire $5^f,40$ par 41, le produit $221^f,40$ exprimera le prix de

5 piastres de rentes. Or, 5 est contenu 1510 fois dans 7550; le prix des titres considérés est donc le produit de $221^f,40$ par 1510, c'est-à-dire 334314 fr.

678. La somme des titres énoncés représente

$$4800 + 800 \times 2 + 200 \times 7 \quad \text{ou} \quad 7800 \text{ piastres de rentes,}$$

c'est-à-dire 1560 fois 5 piastres de rentes. Ils représentent donc un capital de 1560×37 ou 57720 piastres. D'un autre côté, un titre de 50 piastres de rentes (3 pour 100 intérieur), ou de 10 fois 5 piastres de rentes, représente un capital de 10 fois 41 piastres, ou 410 piastres. On aura donc le nombre de titres demandé en divisant 57720 par 410, et ne prenant que la partie entière du quotient, ce qui donne 140, et un reste de 32 piastres. Les nouveaux titres s'élèveront donc à 50×140, ou 7000 piastres; et il y aura 32 piastres non employées.

679. Les 13 titres de 50 piastres, soit 650 piastres de rentes, vendues à 42, représentent un capital de 130 fois 42 piastres; car 5 est contenu 130 fois dans 650. Or, 130 fois 42 piastres font 5460 piastres ou 5460 fois $5^f,40$, c'est-à-dire 29484 fr.

De même, les 7 titres de 200 piastres, soit 1400 piastres de rentes, vendues à $36\frac{1}{2}$, représentent un capital de 280 fois $36\frac{1}{2}$ piastres, puisque 1400 contient 280 fois 5. Or, 280 fois $36\frac{1}{2}$ piastres font 10220 piastres, ou 10220 fois $5^f,40$, c'est-à-dire 55188 fr.

Ce capital, réuni au précédent, donne une somme de 84672 fr.

Les 69 fr. de rentes françaises 3 pour 100, achetées à 68, représentent un capital donné par la proportion

$$3 : 68 = 69 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 1564 \text{ fr.}$$

En retranchant ce capital de 84672 fr., et retranchant encore 8 fr. du reste, on aura le prix des 20 actions de la Banque; on trouve ainsi 83100 fr.

Le prix d'une action est donc le vingtième de cette somme, ou 4155 fr.

680. Pour répondre à cette question, il faut comparer les taux des deux placements. Le premier taux est donné par la proportion

$$110 : 5 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 4,5454\ldots;$$

le second est donné par la proportion

$$94 : 4\tfrac{1}{2} = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 4,7872\ldots.$$

Il y a donc avantage à acheter du $4\frac{1}{2}$ pour 100; et l'on y gagnerait environ 0,24 pour 100.

681. Au cours de 108, le prix de 5 ducats de rentes est de 108 ducats, ou $4^f,40.108$; le prix de 25 ducats de rentes est 5 fois plus grand, c'est-à-dire $4^f,40.108.5$, et le prix de 10 certificats de 25 ducats de rentes chacun est $4^f,40.108.5.10$.

Au cours de 40, le prix de 5 piastres de rentes est de 40 piastres, ou $5^f,40.40$; le prix de 50 piastres de rentes est 10 fois plus grand, c'est-à-dire $5^f,40.40.10$, et le prix de x titres de 50 piastres de rentes chacun est $5^f,40.40.10.x$.

Si x désigne le nombre de titres cherché, on doit avoir

$$5^f,40.40.10.x = 4^f,40.108.5.10,$$

d'où
$$x = \frac{4^f,40.108.5.10}{5^f,40.40.10} = \frac{44.108.5}{54.40}$$
$$= \frac{44.2.5}{40} = \frac{44}{4} = 11.$$

Le capitaliste aura donc 11 titres de 50 piastres de rentes.

682. D'après le sens de la cote, 5 livres sterling de rentes coûteraient 92 livres sterling; il en résulte que 1 livre sterling de rentes coûterait le cinquième de 92 livres sterling, et que 2 livres sterling de rentes coûteraient les $\frac{2}{5}$ de 92 livres sterling. Or, 2 livres sterling sont précisément ce que rapporteraient *au pair* une obligation de 40 livres sterling, puisque l'intérêt est de 5 pour 100, et par conséquent de 1 pour 20, et de 2 pour 40. Le prix d'une obligation est donc $\frac{2}{5}.92$ livres sterling, et le prix de 30 obligations est

$$\tfrac{2}{5} \times 92^{\text{liv st}} \times 30, \quad \text{ou} \quad 92^{\text{liv st}} \times 12, \quad \text{ou} \quad 1104 \text{ livres sterling},$$

c'est-à-dire $25^f,60 \times 1104$, ou enfin $28262^f,40$.

683. Les 1080 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100, vendues à 96, représentent un capital donné par la proportion

$$4,50 : 96 = 1080 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 23040 \text{ fr.}$$

Soit c le cours des obligations grecques; le prix de l'une d'elles sera c livres sterling ou $25^f,60 \times c$; et le prix des 10 obligations sera $256^f \times c$. On devra donc avoir

$$256^f \times c = 23040^f, \quad \text{d'où} \quad c = 90.$$

Les obligations ont donc été achetées à 90.

684. Une obligation turque, dont la valeur nominale est de 2500 fr., rapporte, à 6 pour 100, 150 fr., ou 25 fois 6 fr. d'intérêt. Or, d'après la cote, 5 fr. de rentes valent 91 fr.; par conséquent une obligation de 2500 fr., qui rapporte 25 fois 6 fr. de rentes, vaut 25 fois 91 fr., ou 2275 fr.

685. Puisque les obligations turques ont été émises à 20 pour 100 au-dessous de leur valeur nominale, leur prix d'émission n'a été que les $\frac{80}{100}$ de leur valeur nominale; une obligation de 2500 fr. n'a donc été payée que $2500^f \times \frac{80}{100}$, ou $2500^f \times 0,8$, c'est-à-dire 2000 fr.; et les 10 obligations ont coûté, par conséquent, $2000^f \times 10$, ou 20000 fr.

Chaque obligation a rapporté annuellement 6 pour 100 d'intérêt calculé sur la valeur nominale 2500 fr., c'est-à-dire les $\frac{6}{100}$ de 2500 fr., ou 150 fr.; les 10 obligations ont donc rapporté ensemble 10 fois 150 fr., ou 1500 fr. par année, et en 3 années 4500 fr.

Chaque obligation, vendue au cours de 91, a été payée, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, 2275 fr., et a donné lieu à un bénéfice de 275 fr., ce qui fait pour les 10 obligations, un bénéfice total de 2750 fr.

En y ajoutant les 4500 fr. d'intérêt, on obtient pour le bénéfice réel des 3 années 7250 fr.

Le taux du bénéfice annuel sera donné par la proportion

$$20000^f : \frac{7250^f}{3} = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{7250^f \times 100}{20000 \times 3},$$

ou

$$x = \frac{725}{60} = 12,0833...,$$

ou un peu plus de 12 pour 100.

686. Une obligation de 500 livres sterling rapporte, à $4\frac{1}{2}$ pour 100, 5 fois $4\frac{1}{2}$ livres sterling de rentes. Or, d'après la cote de la Bourse, le prix de $4\frac{1}{2}$ livres sterling de rentes est 94 livres sterling; par conséquent le prix de 5 fois $4\frac{1}{2}$ livres sterling de rentes est 94×5 ou 470 livres sterling, ou bien $25^f,50 \times 470$, c'est-à-dire 11985 fr.

687. Une obligation de 500 livres sterling rapporte annuellement, à $4\frac{1}{2}$ pour 100, $22\frac{1}{2}$ livres sterling; par conséquent 20 obligations de 500 livres sterling rapportent, dans un semestre, 10 fois $22\frac{1}{2}$ livres sterling, ou 225 livres sterling. Les $74^f,25$ de perte proviennent de la différence entre la valeur con-

ventionnelle de la livre sterling, c'est-à-dire $25^f,50$, et sa valeur réelle au change du jour, et ils sont le produit de cette différence par 225. On aura donc la différence dont il s'agit en divisant $74^f,25$ par 225, ce qui donne 0,33. Le change du jour était donc $25^f,50 - 0^f,33$, c'est-à-dire $25^f,17$.

688. 1° Un certificat, dont la valeur nominale est 4000 fr., rapporte, à $2\frac{1}{2}$ pour 100, précisément 100 fr. d'intérêts. Or, 100 contient 40 fois $2\frac{1}{2}$; le prix d'un certificat vaut donc 40 fois le prix de $2^f,50$ de rentes. Mais, d'après le sens de la cote, le prix de $2^f,50$ de rentes est précisément $64^f\frac{1}{4}$ ou $64^f,25$; on obtiendra donc le prix d'un certificat en multipliant $64^f,25$ par 40, ce qui donne 2570 fr.

2° Puisque $64^f,25$ rapportent $2^f,50$, une somme de 100 fr. rapporterait le quatrième terme de la proportion

$$64,25 : 2,50 = 100 : x,$$

d'où $\qquad x = 3,891\ldots,$ ou à peu près 3,89.

689. Le 5 pour 100 piémontais étant à 91, le taux de l'intérêt est donné par la proportion

$$91 : 5 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 5,494\ldots.$$

Le 3 pour 100 étant à 55, le taux de l'intérêt est donné par la proportion

$$55 : 3 = 100 : y, \quad \text{d'où} \quad y = 5,444\ldots.$$

Ainsi, le 5 pour 100 offrait un placement un peu plus avantageux.

690. Cherchons d'abord la valeur de ce titre en livres sterling; elle est donnée par la proportion

$$3 : 93\tfrac{3}{8} = 600 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 200^{\text{liv st}} \times 93\tfrac{3}{8},$$

ou bien 18675 livres sterling.

Le change étant de $25^f,17\frac{1}{2}$ ou $25^f,175$ pour une livre sterling, la somme demandée sera le produit de $25^f,175$ par 18675, c'est-à-dire $470143^f,125$ ou $470143^f,12\frac{1}{2}$.

691. Désignons par c la cote cherchée. Si l'on achète du $4\frac{1}{2}$ français, le taux du placement sera le quatrième terme de la proportion

$$c : 4,5 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{450}{c}.$$

Si l'on achète des consolidés anglais, le taux du placement sera le quatrième terme de la proportion

$$c : 3 = 100 : y, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{300}{c},$$

et l'avantage du premier placement sur le second sera la différence

$$\frac{450}{c} - \frac{300}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{150}{c}.$$

Or, d'après l'énoncé, cette différence doit être équivalente à $1\frac{2}{3}$ ou à $\frac{5}{3}$; la cote cherchée c est donc le nombre qui, multiplié par $\frac{5}{3}$, donnerait 150; ce qui revient à dire que c'est le quotient de 150 par $\frac{5}{3}$, ou le produit de 150 par $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire 90.

692*. Soit x le cours du 5 pour 100, et y le cours du 3 pour 100. La valeur d'un titre de 5000 fr. de rentes 5 pour 100, au cours x, est $\frac{5000^{\text{f}}.x}{5}$ ou $1000x$.

La valeur d'un titre de 4000 fr. de rentes 3 pour 100, au cours y, est de même $\frac{4000^{\text{f}}.y}{3}$.

D'après la première partie de l'énoncé, la somme de ces valeurs doit faire 194000 fr.; on doit donc avoir

$$1000x + \frac{4000y}{3} = 194000,$$

ou, en simplifiant,

$$[1] \qquad 3x + 4y = 582.$$

La valeur d'un titre de $5000^{\text{f}} + 190$ fr., ou 5190 fr. de rentes 5 pour 100 au cours $x - 2$, est exprimée par

$$\frac{5190^{\text{f}}.(x-2)}{5} \quad \text{ou} \quad 1038(x-2).$$

La valeur d'un titre de $4000^{\text{f}} + 12$ fr., ou 4012 fr. de rentes 3 pour 100 au cours $y - 1{,}50$, est exprimée par

$$\frac{4012^{\text{f}}(y-1{,}50)}{3}.$$

D'après la seconde partie de l'énoncé, la somme de ces valeurs doit encore faire 194000 fr.; on doit donc avoir

$$1038(x-2)+\frac{4012(y-1,50)}{3}=194000,$$

ou, en faisant disparaître le dénominateur 3, effectuant les calculs indiqués, et opérant les réductions

$$[2] \qquad 3114x+4012y=594246.$$

Si de cette équation on retranche membre à membre l'équation [1] préalablement multipliée par 1000, il reste

$$[3] \qquad 114x+12y=12246,$$

et si de cette dernière on retranche encore l'équation [1] préalablement multipliée par 3, il reste

$$105x=10500, \quad \text{d'où} \quad x=100.$$

Substituant pour x cette valeur dans l'équation [1], on obtient

$$300+4y=582,$$

d'où

$$y=\frac{282}{4}=70,50.$$

Le 5 pour 100 était donc *au pair*, et le 3 pour 100 à 70,50.

CHAPITRE V.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES SUR LES INTÉRÊTS COMPOSÉS, ET SUR LES QUESTIONS QUI S'Y RAPPORTENT.

---

§ 1. Des intérêts composés.

693. I. L'intérêt annuel, à 5 pour 100, s'obtient en multipliant le capital par 5 et en divisant le produit par 100, ce qui revient à prendre le vingtième du capital.

L'intérêt de 10000 fr. au bout d'un an est donc le vingtième de 10000 fr., c'est-à-dire 500 fr. Et puisque les intérêts s'ajoutent au capital à la fin de chaque année, le capital devient, au bout de la première année, $10000^f + 500$ fr. ou 10500 fr.

L'intérêt annuel de 10500 fr., à 5 pour 100, est le vingtième de 10500 fr., c'est-à-dire 525 fr. Au bout de la seconde année, le capital devient donc de $10500^f + 525$ fr., ou 11025 fr.

L'intérêt annuel de 11025 fr. à 5 pour 100 est le vingtième de 11025 fr., c'est-à-dire $551^f,25$. Au bout de la troisième année, le capital est donc devenu $11025^f + 551^f,25$ ou $11576^f,25$.

II. Mais le calcul peut être fait d'une autre manière, qui montre mieux la loi suivant laquelle le résultat se trouve lié aux données.

A la fin de la première année, le capital s'augmente du vingtième de ce capital; il se trouve donc multiplié par $1 + \frac{1}{20}$ ou par 1,05; et il a par conséquent pour valeur $10000^f \times 1,05$.

Ce nouveau capital, au bout de la seconde année, s'augmente à son tour de son vingtième, et se trouve par conséquent multiplié par $1 + \frac{1}{20}$ ou par 1,05; sa valeur est donc $10000^f \times 1,05 \times 1,05$.

Ce dernier capital, au bout de la troisième année, s'augmente encore de son vingtième, et se trouve par conséquent multiplié de nouveau par 1,05; en sorte que sa valeur est

$$10000^f \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 \quad \text{ou} \quad 10000^f \times (1,05)^3,$$

c'est-à-dire que le capital *définitif* est égal au capital *primitif*

10000 fr., multiplié par la troisième puissance du nombre 1,05 qui se compose de l'unité plus $\frac{5}{100}$.

La seconde puissance de 1,05 est 1,1025; et la troisième, ou le produit de 1,1025 par 1,05 est 1,157625.

Si l'on multiplie 10000 fr. par cette troisième puissance, on obtient comme tout à l'heure 11576f,25.

III. Enfin, le calcul peut se faire plus commodément encore par le moyen des logarithmes. Pour obtenir le logarithme du capital cherché, il suffit, en effet, d'ajouter au logarithme du capital primitif 10000, le triple du logarithme de 1,05.

Or, le logarithme de 10000 est	4,
le logarithme de 1,05 est 0,0211893	
et le triple de ce logarithme est.	0,0635679
le logarithme du capital cherché est donc	4,0635679

Le nombre correspondant à ce logarithme est 11576,25.

694. En raisonnant comme ci-dessus (II, III) on verra que pour obtenir le logarithme du capital définitif, il faut ajouter au logarithme du capital primitif le produit du logarithme de 1,045 par le nombre d'années 7.

Le logarithme de 12500 est.	4,0969100
le logarithme de 1,045 est 0,0191163.	
et le produit de ce logarithme par 7 est	0,1338141
le logarithme du capital cherché est donc.	4,2307241

Le nombre correspondant à ce logarithme est 17010,77. Le capital définitif est donc 17010f,77.

695*. En répétant le raisonnement du n° **693** (II), on voit qu'au bout de la première année le capital a s'est accru de ses intérêts pendant un an, c'est-à-dire de $\frac{at}{100}$ ou de ar, en désignant par r le quotient du taux t par 100; le capital est donc devenu $a + ar$ ou $a(1 + r)$, c'est-à-dire que le capital primitif se trouve multiplié par $1 + r$.

Au bout de la seconde année, le capital $a(1 + r)$ se trouve de nouveau multiplié par $1 + r$, et devient $a(1 + r)^2$.

Au bout de la troisième année, le capital deviendrait $a(1 + r)^3$; et, au bout de la $n^{ième}$ année, il devient $a(1 + r)^n$.

On a donc

$$A = a(1 + r)^n \qquad [1]$$

c'est la formule demandée, dans laquelle r remplace $\frac{t}{100}$.

En y appliquant les logarithmes, on trouve

[2] $$\log A = \log a + n \log (1 + r).$$

696. En opérant comme au n° **694**, ou, ce qui revient au même, en se servant de la formule [2] du n° **695**, on formera le tableau suivant qui est la réponse à la question.

Tableau des capitaux définitifs produits par un capital de 1 *franc placé à intérêts composés.*

Nombre d'années.	3 pour 100.	3 1/2 pour 100.	4 pour 100.	4 1/2 pour 100.	5 pour 100.	5 1/2 pour 100.	6 pour 100.
1	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000	1,050000	1,055000	1,060000
2	1,060900	1,071225	1,081600	1,092025	1,102500	1,113025	1,123600
3	1,092727	1,108717	1,124864	1,141166	1,157625	1,174242	1,191016
4	1,125509	1,147522	1,169858	1,192518	1,215506	1,238825	1,262477
5	1,159273	1,187685	1,216652	1,246182	1,276281	1,306960	1,338226
6	1,194052	1,229254	1,265318	1,302260	1,340095	1,378843	1,418520
7	1,229873	1,272278	1,315930	1,360862	1,407100	1,454679	1,503631
8	1,266769	1,316808	1,368568	1,422101	1,477455	1,534687	1,593849
9	1,304772	1,362896	1,423310	1,486095	1,551328	1,619096	1,689480
10	1,343916	1,410597	1,480243	1,552969	1,628894	1,708146	1,790845
11	1,384233	1,459968	1,539452	1,622853	1,710339	1,802094	1,898300
12	1,425760	1,511066	1,601029	1,695882	1,795856	1,901209	2,012198
13	1,468532	1,563954	1,665072	1,772196	1,885649	2,005776	2,132930
14	1,512588	1,618692	1,731674	1,851946	1,979931	2,116094	2,260906
15	1,557966	1,675346	1,800941	1,935283	2,078928	2,232479	2,396561
16	1,604706	1,733983	1,872979	2,022370	2,182875	2,355266	2,540355
17	1,652846	1,794672	1,947897	2,113377	2,292018	2,484806	2,692776
18	1,702431	1,857485	2,025813	2,208479	2,406619	2,621470	2,854343
19	1,753504	1,922497	2,106845	2,307861	2,526950	2,765651	3,025604
20	1,806109	1,989784	2,191119	2,411715	2,653297	2,917763	3,207141
21	1,860293	2,059427	2,278763	2,520242	2,785963	3,078240	3,399569

697. On trouve dans la table du n° **696** que 1 franc, placé pendant 7 ans à $4\frac{1}{2}$ pour 100 et à intérêts composés, produit un ca-

pital définitif de $1^f,360862$. Une somme de 12500 fr. placée dans les mêmes conditions produira donc 12500 fois plus; ainsi le capital définitif cherché est le produit de $1^f,360862$ par 12500; en effectuant le calcul, on trouve $17010^f,7750$; résultat qui s'accorde, à moins d'un centime près, avec celui du n° **694**.

698. I. Si cette somme était connue, en ajoutant à son logarithme 9 fois le logarithme de 1,05 on obtiendrait le logarithme de 45000. Pour obtenir le logarithme de la somme cherchée, il faut donc du logarithme de 45000 retrancher 9 fois le logarithme de 1,05.

Le logarithme de 45000 est	4,6532125
le logarithme de 1,05 est 0,0211893	
et le produit de ce logarithme par 9 est	0,1907037
la différence. . .	4,4625088

est le logarithme du capital primitif cherché. On trouve à l'aide des tables : $29007^f,40$.

II. La formule [2] du n° **695** donne la relation

$$\log a = \log A - n \log (1 + r),$$

dont l'application conduit aux mêmes calculs et au même résultat.

III. La table du n° **696** nous apprend que 1 fr. placé pendant 9 ans à 5 pour 100 et à intérêts composés produit un capital définitif de $1^f,551328$. Autant de fois cette somme sera contenue dans 45000 fr., autant le capital primitif cherché contiendra de fois 1 franc; en faisant la division on trouve $29007^f,405$, résultat qui diffère de moins d'un centime de celui auquel on est parvenu par la première méthode.

699. I. Puisque le logarithme du capital définitif se compose du logarithme du capital primitif augmenté d'autant de fois le logarithme de 1,045 qu'il y a d'années dans la durée du placement, il en résulte que la différence entre le logarithme du capital définitif et le logarithme du capital primitif, divisée par le logarithme de 1,045, donnera le nombre d'années.

Le logarithme de 389484,70 est.	5,5904905
le logarithme de 240000 est.	5,3802112
la différence . . .	0,2102793

divisée par le logarithme de 1,045, c'est-à-dire par 0,0191163 donne pour quotient 11 ; c'est le nombre d'années cherché.

II. La formule [2] du n° **695** donne

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log (1 + r)},$$

dont l'application conduit aux mêmes calculs et au même résultat.

III. Puisque 240000 fr. produisent un capital définitif de 389484f,70, le capital produit par 1 franc serait 240000 fois moindre; en divisant 389484f,70 par 240000 on trouve 1f,6228529... ou simplement 1f,622853 en s'arrêtant à la sixième décimale. Or, si dans la table du n° **696** on suit la colonne verticale qui se rapporte au taux de $4\frac{1}{2}$, on trouve que le nombre 1,622853 répond à la onzième ligne horizontale. Le nombre d'années cherché est donc 11.

700. I. Puisque le logarithme du capital définitif se compose du logarithme du capital primitif, augmenté de 5 fois le logarithme de 1 plus le centième du taux, ce dernier logarithme s'obtiendra en prenant le cinquième de la différence entre le logarithme du capital définitif et le logarithme du capital primitif.

Le logarithme de 23525,28 est.	4,3715348
le logarithme de 18000 est	4,2552725
la différence est donc.	0,1162623
le cinquième de cette différence est.	0,0232525

C'est le logarithme de 1,055.... En retranchant une unité, on obtient 0,055... qui exprime le centième du taux. Le taux lui-même s'obtiendra donc en multipliant ce résultat par 100, ce qui donne 5,5 ou $5\frac{1}{2}$.

II. La formule [2] du n° **695** donne

$$\log (1 + r) = \frac{\log A - \log a}{n},$$

formule dont l'application conduit aux mêmes calculs et au même résultat.

III. En divisant 23525f,28 par 18000, on trouve 1f,306960 pour le capital définitif produit par un capital primitif de 1 franc. Or si, dans la table du n° **696**, on suit la ligne horizontale qui se rapporte à une durée de 5 ans, on trouve que 1,306960 est dans la colonne verticale qui répond à un intérêt de $5\frac{1}{2}$ pour 100.

Le taux demandé est donc $5\frac{1}{2}$.

701. On a vu au n° **694** qu'une somme de 12500 fr. placée pendant 7 ans à $4\frac{1}{2}$ pour 100 et à intérêts composés, produit un capital de $17010^f,77$. Il reste à ajouter à cette somme ses intérêts simples à $4\frac{1}{2}$ pour 100 pendant 5 mois.

Or, puisque 100 fr. en 12 mois rapportent . . $4^f,50$

100 en 1 — rapporteront. $\frac{4^f,50}{12}$,

100 fr. pendant 5 mois rapporteront. $\frac{4^f,50 \times 5}{12}$,

1 fr. — rapporterait . $\frac{4^f,50 \times 5}{12 \times 100}$,

et $17010^f,77$ pendant 5 mois, rapporteront $\frac{4^f,50 \times 5 \times 17010,77}{12 \times 100}$;

en effectuant les calculs, on trouve $318^f,95$.

En ajoutant ces intérêts à $17010^f,77$, on obtient pour le capital définitif demandé $17329^f,72$.

702*. D'après la formule [1] du n° **695**, le capital A′ produit au bout du nombre entier n d'années a pour expression

$$A' = a(1 + r)^n.$$

L'intérêt de 1 fr. par an étant r, l'intérêt de 1 fr. pendant une fraction k de l'année sera kr, et l'intérêt de A′ pendant le même même temps sera $A'kr$. Le capital définitif A est donc donné par la relation

$$A = A' + A'kr \quad \text{ou} \quad A = A'(1 + kr)$$

ou, en mettant pour A′ sa valeur,

[3] $$A = a(1 + r)^n (1 + kr):$$

c'est la formule demandée.

En lui appliquant les logarithmes, on obtient

[4] $$\log A = \log a + n \log(1 + r) + \log(1 + kr).$$

703*. On tire de la formule [4] ci-dessus

$$\log a = \log A - [n \log(1 + r) + \log(1 + kr)]$$

ou, en remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$\log a = \log 120000 - [5 \log 1,05 + \log(1 + \tfrac{3}{12}.0,05)].$$

Le logarithme de 120000 est 5,0791812,

le logarithme de 1,05 est 0,0211893, et le produit de ce logarithme par 5 est 0,1059465.

La quantité de $1 + \frac{3}{12}.0,05$ revient à 1,0125, et son logarithme est 0,0053950. Ajoutant ce logarithme à 0,1059465 on obtient 0,1113415, somme qui, retranchée du logarithme de 120000, donne pour reste 4,9678397. C'est le logarithme de 92862,36. La somme cherchée est donc 92862f,36.

704*. D'après la valeur de A donnée par la formule [3] du n° **702**, on voit que cette quantité est plus grande que $a(1+r)^n$, mais plus petite que $a(1+r)^{n+1}$. En d'autres termes, le quotient de A par a est compris entre $(1+r)^n$ et $(1+r)^{n+1}$; par conséquent le logarithme de ce quotient, ou $\log A - \log a$, est compris entre $n \log(1+r)$ et $(n+1)\log(1+r)$; d'où l'on conclut que la quantité

$$[5] \qquad \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$$

est comprise entre n et $n+1$. Si donc on calcule cette expression, sa partie entière donnera n.

Si alors on divise A par $a(1+r)^n$, opération qui se fera par logarithmes, le quotient exprimera $1 + kr$; retranchant 1 on aura kr, et divisant par r on aura k, fraction qu'il sera facile ensuite de convertir soit en mois, soit en jours.

Dans le cas du problème proposé, l'expression [5] prend pour valeur

$$\frac{\log 40000 - \log 25000}{\log 1,04}$$

ou

$$\frac{4,6020599 - 4,3979400}{0,0170333}$$

ou bien

$$\frac{0,2041199}{0,0170333}.$$

La partie entière du quotient est 11; la durée du placement se compose donc d'abord de 11 années.

Il s'agit maintenant de calculer le quotient de 40000 par $25000.(1,04)^{11}$.

Pour cela il faut d'abord du logarithme de 40000 retrancher le logarithme de 25000, ce qui donne pour reste, ainsi qu'on vient de le voir, 0,2041199; puis retrancher encore de ce reste le produit du logarithme de 1,04 par 11, soit $0,0170333 \times 11$ ou 0,1873663. Le nouveau reste 0,0167536 est le logarithme de 1,03933.... Retranchant 1, il reste 0,03933...; divisant par 0,04

on obtient 0,983; c'est la fraction d'année qu'il faut ajouter aux 11 années déjà obtenues. Pour la convertir en jours (à raison de 360 jours par an, comme le veulent les usages commerciaux), il suffit de multiplier 360 par 0,983 et de ne prendre que la partie entière du produit, en forçant l'unité s'il y a lieu, ce qui donne 354 jours.

La durée du placement doit donc être de 11 ans, 11 mois, 24 jours.

705* Dans le cas qui nous occupe, on a $A = 2a$; en sorte qu'en divisant par a, la formule [3] du n° **702** peut s'écrire

$$2 = (1 + r)^n (1 + kr).$$

1° Si $r = 0{,}04$, on trouvera d'abord, en opérant comme au numéro précédent, que le quotient du logarithme de 2 par le logarithme de 1,04, c'est-à-dire $\frac{0{,}3010300}{0{,}0170333}$, est compris entre 17 et 18; la durée du placement devra donc être d'abord de 17 années.

Divisant maintenant 2 par $(1{,}04)^{17}$, on trouve, en opérant par logarithmes, 1,026748. Retranchant 1 et divisant ensuite par 0,04, on obtient 0,6687, fraction qui, convertie en jours, comme nous l'avons indiqué au numéro précédent, donne 241 jours. La durée cherchée est donc 17 ans, 8 mois et 1 jour.

2° Si le taux est $4\frac{1}{2}$ pour 100, on trouvera, en opérant de même, que la durée cherchée est de 15 ans, 8 mois et 27 jours.

3° Si le taux est 5 pour 100, on trouvera 14 ans, 2 mois et 13 jours.

706*. La formule [3] du n° **702** ne peut être résolue directement par rapport à r, du moins par les procédés de l'algèbre élémentaire; mais on peut procéder de la manière suivante.

Comme r est ordinairement une fraction assez petite, et que k est aussi une fraction, la quantité $1 + kr$ diffère très-peu de $(1 + r)^k$; car on a

$$(1 + r)^k = 1 + kr + \frac{k(k-1)}{1.2} r^2 + \text{etc.},$$

et, en négligeant le carré de r et ses puissances supérieures, il reste dans le second membre $1 + kr$.

On peut donc poser approximativement

$$A = a(1 + r)^n (1 + r)^k = a(1 + r)^{n+k},$$

d'où l'on tire

$$\log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n+k}.$$

Cette relation donnera pour r une valeur un peu trop forte, mais suffisamment approchée ; nous la désignerons par r_1.

Si l'on veut approcher davantage de la valeur exacte, on pourra opérer comme il suit :

On posera $$(1+kr) = (1+r)^m,$$

d'où $$m = \frac{\log(1+kr)}{\log(1+r)},$$

et dans cette dernière expression on remplacera r par sa valeur approchée r_1. On aura alors

$$A = a(1+r)^{n+m},$$

d'où $$\log(1+r) = \frac{\log A - \log a}{n+m},$$

relation qui donnera pour r une valeur r_2 plus approchée que r_1 et qui suffira dans les applications.

Dans l'exemple proposé, on aura d'abord

$$\log(1+r) = \frac{\log 14594{,}30 - \log 10000}{8 + \frac{7}{12}}$$

ou $$\log(1+r) = \frac{0{,}1641836 \times 12}{103} = 0{,}0191282,$$

d'où l'on tire $1 + r = 1{,}045028\ldots$ et $r_1 = 0{,}045028$.

On trouvera ensuite

$$m = \frac{\log(1 + \frac{7}{12}.0{,}045028)}{\log 1{,}045028} = \frac{\log 1{,}026266}{\log 1{,}045028}$$

ou $$m = \frac{0{,}0112601}{0{,}0191282} = 0{,}58866\ldots.$$

Par suite

$$\log(1+r) = \frac{0{,}1641836}{8{,}58866\ldots} = 0{,}0191163,$$

d'où $$1 + r = 1{,}045 \quad \text{et} \quad r_2 = 0{,}045.$$

Le taux de l'intérêt était donc $4\frac{1}{2}$ pour 100.

707*. Si l'on désigne par x le nombre d'années cherché, on devra avoir, en vertu de la formule [1] du n° **695**,

$$8400.(1,045)^x = 8360\,(1,05)^x,$$

relation qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(\frac{1,05}{1,045}\right)^x = \frac{8400}{8360};$$

on en tire

$$x = \frac{\log 8400 - \log 8360}{\log 1,05 - \log 1,045}$$

ou bien

$$x = \frac{3,9242793 - 3,9222063}{0,0211893 - 0,0191163} = \frac{0,0020730}{0,0020730},$$

c'est-à-dire $x = 1$. La condition indiquée dans l'énoncé du problème serait donc remplie au bout de la première année.

708*. En opérant comme au numéro précédent, on aura successivement

$$60000.(1,04)^x = 50000.(1,05)^x,$$

puis

$$\left(\frac{105}{104}\right)^x = \frac{6}{5},$$

d'où

$$x = \frac{\log 6 - \log 5}{\log 105 - \log 104} = \frac{0,7781512 - 0,6989700}{2,0211893 - 2,0170333},$$

ou

$$x = \frac{0,0791812}{0,0041560} = 19,05223\ldots,$$

ou un peu plus de 19 ans.

Si l'on suppose qu'au bout de ce temps les deux capitaux soient restés placés à intérêt simple, la fraction donnée 0,05223 convertie en jours, à raison de 365 jours par an, donne approximativement le nombre de jours qui doivent compléter la durée du placement. On trouve ainsi 19 jours à ajouter aux 19 ans.

709*. I. En désignant par x l'intérêt de 1 fr. par an dans le second placement, on devra avoir

$$18000.(1 + x)^{12} = 20000.(1,05)^{12},$$

ou

$$9.(1 + x)^{12} = 10.(1,05)^{12};$$

d'où l'on tire, en appliquant les logarithmes,

$$\log(1+x) = \log 1{,}05 + \frac{\log 10 - \log 9}{12},$$

ou $$\log(1+x) = 0{,}0211893 + \frac{1{,}0000000 - 0{,}9542425}{12}$$

$$= 0{,}0211893 + 0{,}0038131 = 0{,}0250024;$$

d'où $1 + x = 1{,}059259\ldots$ et $x = 0{,}059259\ldots.$

Le taux demandé est donc environ 5,9 pour 100.

II. On peut éviter les transformations algébriques en procédant de la manière suivante.

On cherchera d'abord ce que deviennent 20000 fr. placés pendant 12 ans, à 5 pour 100, et à intérêts composés; c'est le problème du n° **694**; on trouvera $35917^f{,}13$.

On cherchera ensuite à quel taux il faut placer 18000 fr. pendant 12 ans, à intérêts composés, pour produire un capital définitif de $35917^f{,}13$; c'est le problème du n° **700**; on trouvera 5,9259..., ou simplement 5,9 pour 100 comme ci-dessus.

710*. Une somme a, placée pendant 10 ans à $4\frac{1}{2}$ pour 100 et à intérêts composés, produit un capital définitif exprimé par

$$a\,(1{,}045)^{10},$$

Si l'on désigne par x l'intérêt annuel de 1 fr. au taux cherché, l'intérêt de 1 fr., au bout de 10 ans, sera $10x$, l'intérêt de a francs sera $10x \times a$ ou $10ax$, et le capital primitif a, placé pendant 10 ans à ce taux et à intérêts simples, deviendra

$$a + 10ax, \quad \text{ou bien} \quad a\,(1 + 10x).$$

D'après l'énoncé du problème, on devra donc avoir

$$a\,(1 + 10x) = a\,(1{,}045)^{10} \quad \text{ou} \quad 1 + 10x = (1{,}045)^{10};$$

d'où $$x = 0{,}1.(1{,}045)^{10} - 0{,}1.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$(1{,}045)^{10} = 1{,}5529\ldots \quad \text{et} \quad x = 0{,}15529\ldots - 0{,}1,$$

ou bien $$x = 0{,}05529.$$

Le taux demandé est donc 5,529..., ou un peu plus de $5\frac{1}{2}$ pour 100.

711*. Soit a la somme placée, et n le nombre entier ou fractionnaire d'années qui exprime la durée du placement.

A 4 pour 100 et à intérêts composés, le capital produit est

$$a(1,04)^n.$$

A 5 pour 100 et à intérêts simples, le capital produit est

$$a + a.n.0,05 \quad \text{ou} \quad a(1 + n.0,05).$$

On doit donc avoir, d'après l'énoncé,

$$a(1,04)^n = a(1 + n.0,05),$$

ou

$$a(1,04)^n = 1 + 0,05.n. \qquad [1]$$

Pour tirer de cette relation la valeur de n, on peut faire usage de la table du n° **696**. La colonne verticale qui répond à $4\frac{1}{2}$ pour 100 contient les valeurs que prend le premier membre de l'équation [1] ci-dessus, quand on y remplace n par 1, 2, 3, etc. Si l'on attribue à n les mêmes valeurs dans le second membre, on obtient successivement 1,05, 1,10, 1,15, etc. Or, si l'on compare les valeurs que prennent ainsi les deux membres, on trouve que pour $n = 11$, le premier membre prend la valeur 1,539452, et le second la valeur plus grande 1,55; tandis que si l'on fait $n = 12$, le premier membre prend la valeur 1,601029, et le second la valeur plus petite 1,60. Il en résulte que n est compris entre 11 et 12.

Au bout de 11 ans, le capital 1,539452, produit par le premier mode de placement, reste placé à 4 pour 100 et à intérêts simples pendant un nombre de jours que nous nommerons x; le capital produit est donc

$$1,539452.\left(1 + 0,04.\frac{x}{360}\right).$$

Le capital 1,55, produit au bout de la onzième année dans le second mode de placement, reste placé à 5 pour 100 pendant le même nombre de jours x, et devient $1,55 + 0,05.\frac{x}{360}$.

On doit donc avoir l'équation

$$1,539452\left(1 + 0,04.\frac{x}{360}\right) = 1,55 + 0,05.\frac{x}{360},$$

qui devient, en effectuant les calculs et simplifiant,

$$0{,}01157808 . x = 0{,}010548 \times 360 = 3{,}79728000,$$

et donne $x = 328$ jours (par excès).

La durée du placement est donc 11 ans 10 mois et 28 jours.

712*. Une somme de 40000 fr., placée pendant 2 ans à intérêts composés, produit un capital exprimé par

$$40000^{f} . (1 + r)^2,$$

en désignant par r l'intérêt annuel de 1 fr.

La même somme, placée pendant 2 ans à intérêts simples, produit un capital exprimé par

$$40000^{f} (1 + 2r).$$

D'après l'énoncé, on doit donc avoir

$$40000 (1 + r)^2 = 40000 (1 + 2r) + 81,$$

ou $$(1 + r)^2 = 1 + 2r + 0{,}002025,$$

ou encore $$r^2 = 0{,}002025;$$

d'où $$r = \sqrt{0{,}002025} = 0{,}045.$$

Le taux demandé était donc 4,5 ou $4\frac{1}{2}$ pour 100.

713*. Si l'on convertit d'abord 1 mois et 25 jours, ou 55 jours, en fraction décimale de l'année, à raison de 360 jours par an, on trouve 0,1527777.... En nommant donc x l'intérêt annuel de 1 fr., on devra avoir

$$(1 + x)^3 = 1 + 3{,}1527777\ldots x,$$

ou bien $$1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1 + 3{,}1527777 . x,$$

ou enfin $$x^2 + 3x = 0{,}1527777\ldots;$$

d'où l'on tire $$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 0{,}1527777\ldots \times 4}}{2},$$

ou, en ne prenant que la valeur positive, et simplifiant sous le radical,

$$x = \frac{-3 + \sqrt{9{,}611111\ldots}}{2} = \frac{-3 + 3{,}10017\ldots}{2},$$

et enfin $$x = \frac{0{,}10017\ldots}{2} = 0{,}05008\ldots.$$

Le taux demandé est donc, à très-peu près, 5 pour 100.

714*. Désignons par r l'intérêt annuel de 1 fr. Le capital définitif produit par les 30000 fr. sera exprimé par

$$30000^{f}.(1+r)^{7},$$

et le capital définitif produit par les 20000 fr. sera exprimé par

$$20000^{f}(1+r)^{14}.$$

On devra donc avoir, d'après l'énoncé,

$$20000^{f}.(1+r)^{14}+30000^{f}.(1+r)^{7}=77864^{f},75,$$

ou, en divisant tous les termes par 20000,

$$[1] \qquad (1+r)^{14}+1,5\,(1+r)^{7}=3,8932375.$$

Pour résoudre cette équation, posons

$$(1+r)^{7}=x, \quad \text{d'où} \quad (1+r)^{14}=x^{2},$$

il viendra

$$x^{2}+1,5x=3,8932375,$$

équation du second degré, qui n'a qu'une racine positive,

$$x=1,360861....$$

On a donc

$$(1+r)^{7}=1,360861,$$

d'où

$$\log(1+r)=\frac{\log 1,360861}{7}=\frac{0,1338138}{7}=0,01911626...,$$

ou, en s'arrêtant au septième chiffre décimal,

$$\log(1+r)=0,0191163.$$

On en déduit

$$1+r=1,045 \quad \text{et} \quad r=0,045.$$

Le taux demandé était donc $4\frac{1}{2}$ pour 100.

715*. En désignant par n le nombre d'années formant la durée du placement de la seconde somme, on devra avoir

$$25000^{f}.(1,05)^{2n}+50000^{f}.(1,05)^{n}=111901^{f},20.$$

Pour résoudre cette équation, on posera

$$(1,05)^{n}=x,$$

l'équation à résoudre deviendra ainsi

$$25000x^2 + 50000x = 111901{,}20,$$

ou, en divisant par 25000,

$$x^2 + 2x = 4{,}476048.$$

Cette équation n'a qu'une racine positive

$$x = 1{,}340095.$$

On a, par conséquent,

$$(1{,}05)^n = 1{,}340095,$$

relation d'où l'on pourrait tirer n par logarithmes. Mais il est plus simple de se servir ici de la table du n° **696**. Si l'on suit la colonne verticale qui répond au taux de 5 pour 100, on y trouvera le nombre 1,340095 dans la ligne horizontale qui répond à une durée de 6 années.

La somme de 50000 fr. a donc été placée pendant 6 ans, et la somme de 25000 fr. pendant 12 ans.

716*. Soit x la durée du placement de la première; le capital définitif qu'elle a produit a pour expression

$$12000^{\text{f}}.(1{,}03)^x;$$

le capital définitif produit par la seconde est exprimé par

$$15000^{\text{f}}.(1{,}03)^{x+3}.$$

D'après l'énoncé, on doit donc avoir

$$15000.(1{,}03)^{x+3} - 12000.(1{,}03)^x = 5562{,}25,$$

relation que l'on peut écrire

$$[15.(1{,}03)^3 - 12]\,(1{,}03)^x = 5{,}56225,$$

en divisant par 1000, et mettant $(1{,}03)^x$ en facteur commun.

Si l'on effectue les calculs indiqués entre crochets, on trouvera

$$4{,}3909.(1{,}03)^x = 5{,}56225,$$

d'où $$x = \frac{\log 5{,}56225 - \log 4{,}3909}{\log 1{,}03},$$

ou $$x = \frac{0{,}7452505 - 0{,}6425535}{0{,}0128372} = \frac{0{,}1026970}{0{,}0128372},$$

ou à très-peu près $$x = 8.$$

La somme de 12000 fr. a donc été placée pendant 8 ans, et la somme de 15000 fr. pendant $8 + 3$, ou 11 ans.

717*. Soit r l'intérêt annuel de 1 fr., et n le nombre d'années qui exprime la durée du placement; les conditions de l'énoncé seront exprimées par les deux équations

$$60000^f.(1+r)^n - 60000^f.(1+r)^{n-1} = 3996^f,12,$$

et $$60000^f.(1+r)^{n+1} - 60000^f.(1+r)^n = 4156^f,02.$$

En divisant par 60000, et mettant en facteur commun dans chacune des deux équations la plus petite puissance de $1+r$ qui y entre, on pourra les écrire

[1] $$(1+r)^{n-1}.r = 0,066602,$$

[2] $$(1+r)^n .r = 0,069267.$$

Divisant l'équation [2] par l'équation [1], on obtient

$$1+r = \frac{0,069267}{0,066602},$$

d'où $$r = \frac{69267}{66602} - 1 = 0,04.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation [2] devient

$$(1,04)^n.0,04 = 0,069267,$$

d'où $$n = \frac{\log 0,069267 - \log 0,04}{\log 1,04} = \frac{\bar{2},8405264 - \bar{2},6020600}{0,0170333},$$

ou $$n = \frac{0,2384664}{0,0170333} = 14.$$

Le taux de l'intérêt était donc 4 pour 100, et la durée du plament a été de 14 ans.

718*. Désignons par r et r' l'intérêt annuel de 1 fr. correspondant à chacun des deux taux cherchés. La première condition du problème sera exprimée par l'équation

$$36000^f.(1+r)^{10} + 24000^f.(1+r')^{10} = 87474^f,45,$$

et la seconde par l'équation

$$24000^f.(1+r)^{10} + 36000^f.(1+r')^{10} = 90894^f,18.$$

attendu que $87474^f,45 + 3419^f,73 = 90894^f,18$.

Pour résoudre plus commodément ces deux équations, posons

$$(1+r)^{10} = x \quad \text{et} \quad (1+r')^{10} = y$$

substituant, et divisant par 1000, on obtient les deux équations nouvelles

$$36x + 24y = 87,47445,$$

$$24x + 36y = 90,89418.$$

Ajoutons ces équations membre à membre, il viendra

$$60(x + y) = 178,36863, \quad \text{d'où} \quad y + x = 2,9728105.$$

Retranchons au contraire la première de la seconde, nous trouverons

$$12(y - x) = 3,41973, \quad \text{d'où} \quad y - x = 0,2849775.$$

Ayant la somme et la différence des deux inconnues, on aura d'après un théorème connu :

$$y = \tfrac{1}{2}(2,9728105 + 0,2849775) = 1,6288940,$$

$$x = \tfrac{1}{2}(2,9728105 - 0,2849775) = 1,3439165.$$

On pourrait en déduire, par logarithmes, les valeurs de r et et de r'; mais il est plus simple de se servir de la table du n° **696**. Si l'on suit la ligne horizontale qui correspond à une durée de 10 ans, on trouvera le nombre 1,343916 dans la colonne verticale qui répond au taux de 3 pour 100, et le nombre 1,628894 dans la colonne verticale qui répond au taux de 5 pour 100.

Les deux taux demandés sont donc 3 pour 100 et 5 pour 100.

719*. Une variation d'une demi-unité dans le taux de l'intérêt correspond à une variation de $0^f,005$ dans l'intérêt annuel de 1 franc; en appelant r cet intérêt annuel et a la somme placée, on aura donc

$$a.(1 + r - 0,005)^{13} = 221524,20 \qquad [1]$$

et

$$a.(1 + r + 0,005)^{13} = 250722. \qquad [2]$$

En divisant ces équations membre à membre, on obtient

$$\left(\frac{1 + r + 0,005}{1 + r - 0,005}\right)^{13} = \frac{2507220}{2215242}$$

et

$$\left(\frac{1 + r + 0,005}{1 + r - 0,005}\right) = \sqrt[13]{\frac{2507220}{2215242}}.$$

En effectuant les calculs au moyen des logarithmes, on trouve

pour la valeur du second membre : 1,0095696.... On a par conséquent

$$\frac{1+r+0{,}005}{1+r-0{,}005}=1{,}0095696...,$$

équation d'où l'on tire

$$1+r=0{,}005.\frac{1{,}0095696...+1}{1{,}0095696...-1}=1{,}0499...$$

ou à très-peu près $1+r=1{,}05$, d'où $r=0{,}05$.

Substituant cette valeur dans l'équation [2], on obtient

$$a.(1{,}055)^{13}=250722,$$

d'où $$\log a=\log 250722-13\log 1{,}055$$

ou $$\log a=5{,}3991925-13.0{,}0232525=5{,}0969100,$$

et par conséquent

$$a=125000.$$

Ainsi la somme placée était 125000 fr., et le taux de l'intérêt 5 pour 100.

720. L'intérêt annuel de 100 fr. étant $4^f{,}50$, l'intérêt semestriel de la même somme est $2^f{,}25$. En raisonnant comme au n° **694**, on verra que pour obtenir le logarithme du capital définitif cherché, il faut, au logarithme du capital primitif 12500, ajouter le logarithme de 1,0225 répété autant de fois qu'il y a de semestres, c'est-à-dire 14 fois.

Le logarithme de 12500 est.	4,0969100;
le logarithme de 1,0225 est 0,00966332; et le produit de ce logarithme par 14 est	0,1352865
le logarithme du capital définitif est donc.	4,2321965

Le nombre correspondant est $17068^f{,}54$.

On remarquera que ce résultat est plus grand que celui qui a été obtenu au n° **694**.

721*. En raisonnant comme au n° **695** on verra que, chaque semestre, le capital se trouve multiplié par

$$1+\tfrac{1}{2}\frac{t}{100}$$

ou par $$1+\tfrac{1}{2}r;$$

en désignant par r l'intérêt annuel de 1 franc. On aura donc

$$A = a(1 + \tfrac{1}{2}r)^x:$$

c'est la formule demandée, dans laquelle r remplace $\frac{t}{100}$.

722*. Soit A le capital définitif produit dans l'hypothèse où les intérêts se capitalisent par année, et A′ le capital définitif produit dans l'hypothèse où les intérêts se capitalisent par semestre; on aura, en remarquant que le nombre des semestres est $2n$,

$$A = a(1 + r)^n \quad \text{et} \quad A' = a(1 + \tfrac{1}{2}r)^{2n}.$$

Si l'on divise la seconde égalité par la première, on trouve

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1 + \frac{1}{2}r)^{2n}}{(1 + r)^n} = \left(\frac{1 + r + \frac{1}{4}r^2}{1 + r}\right)^n.$$

Or, dans le second membre, le numérateur est plus grand que le dénominateur; le capital A′ est donc plus grand que le capital A.

723. Un demi-centième, exprimé en fraction décimale, revient à 0,005. Dire que le capital définitif eût augmenté des 0,005 de sa valeur, revient à dire qu'il eût été multiplié par 1,005. Le rapport des capitaux définitifs, calculés dans les deux hypothèses de la capitalisation par semestre et de la capitalisation par années, est donc 1,005; et, en vertu de la formule obtenue au numéro précédent, on doit avoir

$$\left(\frac{1 + r + \frac{1}{4}r^2}{1 + r}\right)^{13} = 1{,}005.$$

Si l'on désigne momentanément par x la quantité entre parenthèses, on peut donc écrire

$$x^{13} = 1{,}005, \quad \text{d'où} \quad \log x = \frac{\log 1{,}005}{13} = 0{,}00016662$$

et par conséquent $\qquad x = 1{,}0003837....$

On a donc à résoudre l'équation

$$\frac{1 + r + \frac{1}{4}r^2}{1 + r} = 1{,}0003837...$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$1 + \frac{r^2}{4(r + 1)} = 1{,}0003837... \quad \text{ou} \quad r^2 - 4(r + 1).0{,}0003837... = 0$$

ou encore $\qquad r^2 - 0{,}0015348.r - 0{,}0015348 = 0.$

Cette équation n'a qu'une racine positive

$$r = 0{,}03994 \quad \text{ou à très-peu près} \quad r = 0{,}04.$$

Le taux de l'intérêt était donc 4 pour 100.

724*. Soit a la somme placée, r l'intérêt annuel de 1 franc dans la première hypothèse, x l'intérêt annuel de 1 franc dans la seconde hypothèse, et n le nombre d'années. On devra avoir d'après l'énoncé du problème

$$a(1+x)^n = a(1+\tfrac{1}{2}r)^{2n}$$

ou, en divisant par a, et extrayant ensuite la racine $n^{\text{ième}}$ des deux membres

$$1+x = (1+\tfrac{1}{2}r)^2 = 1 + r + \frac{r^2}{4},$$

d'où

$$x = r + \frac{r^2}{4}.$$

Dans le cas où $r = 0{,}04$, il vient

$$x = 0{,}04 + \frac{(0{,}04)^2}{4} = 0{,}0404,$$

le taux cherché est alors 4,04 pour 100.

725*. Soit n le nombre d'années cherché; l'énoncé du problème donne immédiatement la relation

$$20000^{\text{f}}.(1{,}02)^{2n} = 20131^{\text{f}},17.(1{,}04)^n,$$

d'où l'on tire, en appliquant les logarithmes,

$$\log 20000 + 2n \log 1{,}02 = \log 20131{,}17 + n \log 1{,}04,$$

puis

$$n = \frac{\log 20131{,}17 - \log 20000}{2 \log 1{,}02 - \log 1{,}04}$$

ou

$$n = \frac{4{,}3038690 - 4{,}3010300}{0{,}0172003 - 0{,}0170333} = \frac{0{,}0028390}{0{,}0001670}$$

ou enfin

$$n = 17.$$

La durée du placement était donc de 17 ans.

§ 2. Des annuités et de l'amortissement.

726. Le capital définitif total se composera :

1° Du capital produit au bout de 13 ans par la première somme de 2000 fr., c'est-à-dire..... $2000^f.(1,045)^{13}$

2° Du capital produit au bout de 12 ans par la deuxième somme de 2000 fr., c'est-à-dire..... $2000^f.(1,045)^{12}$

3° Du capital produit au bout de 11 ans par la troisième somme de 2000 fr., c'est-à-dire..... $2000^f.(1,045)^{11}$ et ainsi de suite;

4° Enfin du capital produit au bout de 6 ans par la huitième somme de 2000 fr., c'est-à-dire..... $2000^f.(1,045)^6$.

Ces capitaux, rangés en ordre inverse, forment une progression géométrique croissante, dont le premier terme est $2000^f.(1,045)^6$, dont la raison est 1,045, et qui a 8 termes. Pour obtenir le capital définitif total, ou la somme de ces 8 termes, il faut se rappeler que la somme des termes d'une progression géométrique croissante est exprimée par une fraction dont le numérateur se forme en multipliant le dernier terme par la raison, et retranchant de ce produit le premier terme, et dont le dénominateur est égal à la raison diminuée d'une unité. En appelant A le capital définitif total on aura donc

$$A = \frac{2000^f.(1,045)^{14} - 2000^f.(1,045)^6}{1,045 - 1},$$

formule que l'on peut écrire

$$A = 2000^f.(1,045)^6.\frac{[(1,045)^8 - 1]}{0,045}.$$

Pour effectuer les opérations indiquées, on commencera par calculer à part la quantité $(1,045)^8$; on trouvera, au moyen des logarithmes, ou à l'aide de la table du n° **696**, qu'elle a pour valeur 1,422101. Il en résulte que la quantité entre crochets est égale à 0,422101 ; on a, par conséquent,

$$A = 2000^f.(1,045)^6.\frac{0,422101}{0,045},$$

formule calculable par logarithmes, et qui donne

$$\log A = \log 2000 + 6 \log 1,045 + \log 0,422101 - \log 0,045.$$

Or, log 2000 = ...	3,3010300
Log 1,045 = 0,0191163, ainsi le produit de ce logarithme par 6 est.....	0,1146978
Log 0,422101 = ...	$\bar{1}$,6254164
La somme de ces trois nombres est donc.....	3,0411442
D'ailleurs, on trouve log 0,045 = ...	$\bar{2}$,6532125
La différence.....	4,3879317

est le logarithme de A. Par conséquent, ce capital définitif total a pour valeur 24430^{f},46.

727. Supposons que la somme placée annuellement soit 1 fr., les capitaux définitifs produits par chaque placement seront ceux qui suivent, savoir :

Par le 1er placement, au bout de 13 ans . .	1^{f},772196
— 2e — — 12 —. . .	1 ,695882
— 3e — — 11 —. . .	1 ,622853
— 4e — — 10 —. . .	1 ,552969
— 5e — — 9 —. . .	1 ,486095
— 6e — — 8 —. . .	1 ,422101
— 7e — — 7 —. . .	1 ,360862
— 8e — — 6 —. . .	1 ,302260
La somme de ces capitaux définitifs est...	12^{f},215218

Pour obtenir le capital définitif demandé, il n'y a qu'à multiplier cette somme par 2000, ce qui donne 24430^{f},436.

En comparant ce résultat à celui du numéro précédent, on voit que la différence n'est que de 2 à 3 centimes; elle provient des décimales qu'il a fallu négliger dans l'un et l'autre calcul.

728*. En raisonnant comme au n° **726**, on verra :

Que le capital produit par le 1er placement sera $a(1+r)^{m}$;
en désignant par r le quotient du taux t par 100, ou l'intérêt annuel de 1 fr.

Que le capital produit par le 2e placement sera $a(1+r)^{m-1}$;
— — 3e — $a(1+r)^{m-2}$;
— — 4e — $a(1+r)^{m-3}$;

et ainsi de suite;
enfin, que le capital produit par le $n^{ième}$ placement sera $a(1+r)^{m-n+1}$.

Ces capitaux, rangés en ordre inverse, forment une progression géométrique croissante, dont le premier terme est

$a(1+r)^{m-n+1}$, dont la raison est $1+r$, et qui a n termes. Leur somme A aura donc pour valeur, en vertu de la règle rappelée au n° **726**,

$$A = \frac{a(1+r)^{m+1} - a(1+r)^{m-n+1}}{(1+r)-1},$$

ou
$$A = a(1+r)^{m-n+1} \cdot \frac{[(1+r)^n - 1]}{r}. \qquad [1]$$

Pour se servir de cette formule, on posera d'abord

$$(1+r)^n = p,$$

on obtiendra p par logarithmes; et, en substituant dans [1], il viendra

$$A = a(1+r)^{m-n+1} \cdot \frac{p-1}{r}, \qquad [2]$$

formule à laquelle on pourra appliquer les logarithmes.

729*. Dans la formule [1] du numéro précédent, il faut faire $n = 10$, $m = 15$, $r = 0{,}05$ et $A = 34000$ fr.; elle donne alors

$$34000^f = a(1{,}05)^6 \frac{[(1{,}05)^{10} - 1]}{0{,}05},$$

et l'on en tire

$$a = \frac{34000^f . 0{,}05}{(1{,}05)^6 [(1{,}05)^{10} - 1]}.$$

Pour effectuer les opérations indiquées, on calculera à part la quantité $(1{,}05)^{10}$; on trouve par logarithmes, ou à l'aide de la table du n° **696**, qu'elle a pour valeur 1,628894.

Par conséquent

$$a = \frac{34000^f . 0{,}05}{(1{,}05)^6 . 0{,}628894};$$

$$\log a = (\log 34000 + \log 0{,}05) - (6 \log 1{,}05 + \log 0{,}628894),$$

ou, en effectuant, $\log a = 3{,}3047356$,

d'où

et, par conséquent, $a = 2017^f{,}14$.

730*. Dans ce cas, on a $n = m + 1$, ou $m = n - 1$; et la formule [1], du n° **728**, devient simplement

$$A = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

On aurait pu y arriver directement en remarquant que les termes de la progression géométrique sont alors

$$a, \quad a(1+r), \quad a(1+r)^2 \ldots a(1+r)^{n-1},$$

et leur somme est bien exprimée par la formule ci-dessus.

731*. La formule du numéro précédent donne

$$A = \frac{800^f\,[(1,04)^{17} - 1]}{0,04}.$$

On trouve d'abord, par logarithmes, ou à l'aide de la table du n° **696**,

$$(1,04)^{17} = 1,947897.$$

On a alors

$$A = \frac{800^f . 0,947897}{0,04},$$

et, en effectuant les calculs, $A = 18957^f,94$.

732*. Les 3000 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 représentent au pair un capital exprimé par

$$\frac{100^f \times 3000}{4,5}, \quad \text{ou} \quad 66666^f,67.$$

La formule du n° **730**, qui donne

$$a = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1},$$

deviendra donc

$$a = \frac{66666^f,67 \times 0,045}{(1,045)^{21} - 1}.$$

On trouvera d'abord

$$(1,045)^{21} = 2,520242,$$

et ensuite

$$a = \frac{66666^f,67 \times 0,045}{1,520242},$$

en effectuant les calculs par logarithmes, on trouve $a = 1973^f,37$.

733*. De la formule du n° **730**, on tire

$$(1+r)^n = \frac{Ar}{a} + 1.$$

Dans le cas qui nous occupe, on aura donc

$$(1,03)^n = \frac{30000^f \times 0,03}{500} + 1 = 2,8,$$

d'où $$n = \frac{\log 2,8}{\log 1,05} = \frac{0,4471580}{0,0128372}.$$

Le quotient de ces deux nombres est compris entre 34 et 35, mais plus près de ce dernier. Il faudrait donc continuer le placement pendant 35 ans.

734*. La formule du n° **730** peut être mise sous la forme

$$\frac{A}{a}.r + 1 = (1 + r)^n$$

et, dans le cas actuel, on a par conséquent

$$\frac{57301,63}{3600}.r + 1 = (1 + r)^{12}$$

ou $$15,91712.r + 1 = (1 + r)^{12}.$$

Cette équation est d'un degré supérieur; mais comme, dans les questions de ce genre, le taux de l'intérêt est ordinairement un des nombres compris dans la série 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, on peut multiplier successivement 15,91712 par les nombres 0,03 0,035 0,04 0,045 0,05 0,055 0,06 qui représentent la valeur de r correspondante à ces divers taux, ajouter au produit une unité, et comparer le résultat avec les nombres inscrits dans la douzième ligne horizontale du tableau du n° **696**, et qui expriment les valeurs de $(1 + r)^{12}$. On trouvera :

$$15,91712 \times 0,03 + 1 = 1,477514 \text{ et } (1,03)^{12} = 1,425760,$$
$$15,91712 \times 0,035 + 1 = 1,557099 \text{ et } (1,035)^{12} = 1,511066,$$
$$15,91712 \times 0,04 + 1 = 1,636685 \text{ et } (1,04)^{12} = 1,601029,$$
$$15,91712 \times 0,045 + 1 = 1,716270 \text{ et } (1,045)^{12} = 1,695882,$$
$$15,91712 \times 0,05 + 1 = 1,795856 \text{ et } (1,05)^{12} = 1,795856.$$

Ces deux derniers résultats étant identiques, il s'en suit que $r = 0,05$ satisfait à l'équation, et que par conséquent le taux cherché est 5 pour 100.

735*. Soit a l'annuité, A la somme empruntée, r l'intérêt annuel de 1 franc, et n le nombre des annuités payées pour éteindre la dette.

D'après la remarque faite dans l'énoncé, cette dette s'élève à une somme marquée par (695)

$$A(1+r)^n.$$

D'un autre côté, les annuités successivement payées pouvant être considérées comme placées à intérêts composés entre les mains du prêteur, produiront, à son profit, un capital définitif, qui, en vertu de la formule du n° **730**, sera exprimé par

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}.$$

On devra donc avoir

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}=A(1+r)^n,$$

c'est la formule demandée.

736*. La formule ci-dessus donne

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

et, dans le cas qui nous occupe,

$$a=\frac{800000^f.0,05(1,05)^{20}}{(1,05)^{20}-1}.$$

Pour effectuer les opérations indiquées, on calculera d'abord $(1,05)^{20}$; soit au moyen des logarithmes, soit au moyen de la table du n° **696**, on trouvera 2,653297; par conséquent

$$a=\frac{800000^f.0,05.2,653297}{1,653297}.$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouve $64194^f,10$.

737*. La formule du n° **735** donne

$$A=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r(1+r)^n}$$

et, dans le cas qui nous occupe,

$$A=\frac{421^f,50[(1,045)^{10}-1]}{0,045.(1,045)^{10}}.$$

On calculera d'abord $(1,045)^{10}$; on trouvera, soit par l'emploi

des logarithmes, soit à l'aide de la table du n° **696**... 1,552969; par conséquent

$$A = \frac{421^f,50.0,552969}{0,045.1,552969}.$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouve

$$A = 3335^f,20.$$

738*. Dans la formule du n° **735** posons

$$(1+r)^n = x,$$

elle deviendra

$$\frac{a(x-1)}{r} = Ax,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a}{a - Ar}.$$

Dans le cas qui nous occupe on aura donc

$$x = \frac{30000}{30000 - 450000.0,05} = 4$$

et par suite

$$(1,05)^n = 4,$$

d'où

$$n = \frac{\log 4}{\log 1,05} = \frac{0,6020600}{0,0211893}.$$

Le quotient est compris entre 28 et 29; on devra donc adopter 29 pour que l'annuité ne dépasse pas 30000 fr.

On aura ensuite à résoudre cette question : *Quelle annuité faut-il payer pendant* 29 *ans pour éteindre une dette de* 450000 fr., le *taux de l'intérêt étant* 5 pour 100. En opérant comme au n° **736**, on trouvera pour le montant de l'annuité $29720^f,48$.

739*. La formule du n° **735** donne

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar} = \frac{1}{1 - \frac{A}{a}.r}$$

et dans l'exemple qui nous occupe

$$(1+r)^n = \frac{1}{1 - \frac{10000}{1907,62}.r} = \frac{1}{1 - 5,24213.r}.$$

Cette équation est d'un degré supérieur; mais comme le taux

de l'intérêt est vraisemblablement un des nombres 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, etc.; on peut calculer le second membre pour la série de ces valeurs de r, et comparer le résultat aux nombres inscrits dans la sixième ligne horizontale de la table du n° **696**, lesquels expriment la valeur du premier membre. On trouvera ainsi :

	1er membre.	2e membre.
pour $r = 0{,}03$	— 1,194052	— 1,186611,
— $r = 0{,}035$	— 1,229254	— 1,224701,
— $r = 0{,}04$	— 1,265318	— 1,265318;

ces deux derniers résultats étant identiques, il en résulte que $r = 0{,}04$ satisfait à l'équation, et que par conséquent le taux demandé était 4 pour 100.

740*. La formule du n° **735** montre que, toutes choses égales d'ailleurs, l'annuité est proportionnelle au montant de la dette primitive; on devra donc avoir, en nommant a l'annuité demandée,

$$a : 1907^{f},62 = 84600 : 10000,$$

d'où
$$a = \frac{1907^{f},62 \times 846}{100} = 16138^{f},47.$$

741*. Les 10 annuités produiront entre les mains du prêteur 10 capitaux définitifs partiels ayant respectivement pour expression :

$a(1{,}05)^9$, $a(1{,}05)^8$, $a(1{,}05)^7$,... etc...., $a(1{,}05)$ et a, dont la somme est

$$\frac{a[(1{,}05)^{10} - 1]}{0{,}05}.$$

Quant à la dette réelle, elle équivaudra à

$$300000^{f}.(1{,}05)^{15}.$$

On devra donc avoir

$$\frac{a[(1{,}05)^{10} - 1]}{0{,}05} = 300000^{f}.(1{,}05)^{15};$$

d'où
$$a = \frac{15000^{f}.(1{,}05)^{15}}{(1{,}05)^{10} - 1}.$$

On trouvera d'abord

$$(1{,}05)^{10} = 1{,}628894 \quad \text{et} \quad (1{,}05)^{15} = 2{,}078928;$$

puis
$$a = \frac{15000^{f}.2{,}078928}{0{,}628894} = 49585^{f},34.$$

742*. En raisonnant comme au numéro précédent, on obtiendra la relation

$$\frac{121190^{f},50.[(1,045)^{n}-1]}{0,045}=480000^{f}.(1,045)^{2n}.$$

Pour résoudre cette équation, on posera

$$(1,045)^{n}=x,$$

l'équation ci-dessus devient ainsi

$$\frac{121190,50\,(x-1)}{0,045}=480000.x^{2},$$

relation que l'on peut écrire, en multipliant par 0,045, et transposant,

$$21600\,x^{2}-121190,50.x+121190,50=0.$$

On en tire $x=4,308411$ et $x=1,302260$.

La seconde valeur convient seule à la question; et si l'on cherche ce nombre dans la colonne verticale de la table du n° **696**, qui répond au taux de $4\frac{1}{2}$ pour 100, on trouve qu'il répond à une durée de 6 ans. On a donc $n=6$; et, par conséquent, il y a eu 6 annuités.

La première valeur eût donné $n=33$ et une fraction; solution possible à la rigueur, mais peu compatible avec les données de la question.

743*. D'après la remarque qui termine l'énoncé, ce n'est pas la formule du n° **735** qui est applicable au cas qui nous occupe, mais bien celle du n° **730**. On en tire

$$(1+r)^{n}=1+\frac{Ar}{a},$$

et, dans le cas qui nous occupe,

$$(1+r)^{n}=1+100r.$$

Si l'intérêt est calculé à 5 pour 100, on a

$$(1,05)^{n}=6,\quad \text{d'où}\quad n=\frac{\log 6}{\log 1,05}=\frac{0,7781512}{0,0211893},$$

valeur comprise entre 36 et 37 ans.

Si l'intérêt est calculé à $4\frac{1}{2}$ pour 100, on a

$$(1,045)^n = 5,5, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log 5,5}{\log 1,045} = \frac{0,7403627}{0,0191163},$$

valeur comprise entre 38 et 39 ans.

Si l'intérêt est calculé à 4 pour 100, on a

$$(1,04)^n = 5, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log 5}{\log 1,04} = \frac{0,6989700}{0,0170333},$$

valeur comprise entre 41 et 42 ans.

Enfin, si l'intérêt est calculé à 3 pour 100, on a

$$(1,03)^n = 4, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log 4}{\log 1,03} = \frac{0,6020600}{0,0128372},$$

valeur comprise entre 46 et 47 ans.

744*. On a, dans le premier cas,

$$(1,05)^n = 1 + 200.0,05 = 11,$$

d'où
$$n = \frac{\log 11}{\log 1,05} = \frac{1,0413927}{0,0211893},$$

valeur comprise entre 49 et 50 ans.

Si la dette doit être réduite à moitié, il faut d'abord, dans la formule $(1+r)^n = 1 + \frac{A}{a}.r$, remplacer A par $\frac{1}{2}$A, et faire ensuite $r = 0,05$ et $a = \frac{A}{200}$, ce qui donne

$$(1,05)^n = 1 + 100.0,05 = 6, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log 6}{\log 1,05},$$

valeur comprise, comme on l'a vu plus haut, entre 36 et 37 ans.

Si la dette doit être réduite au tiers, il faut, dans la formule, remplacer A par $\frac{2}{3}$A, et faire ensuite $r = 0,05$ et $a = \frac{A}{200}$, ce qui donne

$$(1,05)^n = 1 + \tfrac{2}{3}.200.0,05 = \tfrac{23}{3}, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log 23 - \log 3}{\log 1,05},$$

ou
$$n = \frac{0,8846066}{0,0211893},$$

valeur comprise entre 41 et 42 ans.

Enfin, si la dette doit être réduite au quart, il faut, dans la formule, remplacer A par $\frac{3}{4}$A, et faire ensuite $r = 0{,}05$ et $a = \frac{A}{200}$, ce qui donne

$$(1{,}05)^n = 1 + \tfrac{3}{4}.200.0{,}05 = \tfrac{17}{2},$$

d'où $$n = \frac{\log 17 - \log 2}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}9294189}{0{,}0211893},$$

valeur comprise entre 43 et 44 ans.

745*. Puisque, par hypothèse, on paye 90 fr. un titre de rente dont la valeur nominale est 100 fr., la dette à amortir se trouve réduite dans le même rapport. Il faut donc, dans la formule du n° **743**, remplacer d'abord A par les $\frac{90}{100}$ de A, et faire ensuite $a = \frac{A}{100}$.

Mais pour avoir la valeur de r, il faut chercher à quel taux réel on place son argent en achetant de la rente 5 pour 100 au cours de 90; ce taux est donné par la proportion

$$90 : 5 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{500}{90},$$

et, par conséquent, $$r = \tfrac{5}{90}.$$

On aura donc

$$(\tfrac{95}{90})^n = 1 + 90.\tfrac{5}{90} = 6,$$

d'où $$n = \frac{\log 6}{\log 95 - \log 90} = \frac{0{,}7781512}{0{,}0234811},$$

valeur comprise entre 33 et 34 ans.

746*. Soit c le cours demandé. En raisonnant comme au numéro précédent, on obtiendra la relation

$$(1 + r)^{33} = 1 + c.r.$$

Mais le taux de l'intérêt sera donné par la proportion

$$c : 5 = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{500}{c},$$

et, par conséquent, $$r = \frac{5}{c}.$$

La relation ci-dessus devient donc

$$\left(1+\frac{5}{c}\right)^{33}=1+c.\frac{5}{c}=6,$$

d'où $$\log\left(1+\frac{5}{c}\right)=\frac{\log 6}{33}=0{,}02358034,$$

et, par suite, $$1+\frac{5}{c}=1{,}0557968;$$

puis $$\frac{5}{c}=0{,}0557968\ldots \quad \text{et} \quad c=\frac{5}{0{,}0557968},$$

et enfin $$c=89^{f},61.$$

747*. 1° Supposons d'abord qu'il s'agisse des rentes 5 pour 100. Pour obtenir le cours moyen demandé, il faudrait diviser par 5 chacun des nombres inscrits dans la colonne des rentes 5 pour 100, afin d'obtenir le nombre des coupons de 5 fr. de rentes qu'ils expriment. On multiplierait le quotient par le cours inscrit dans la colonne suivante, et l'on aurait ainsi les sommes déboursées. On en ferait le total, et l'on diviserait ce total par la somme des nombres de coupons ci-dessus obtenus, afin d'obtenir le prix moyen de l'un d'eux.

Mais dans ce calcul on peut se dispenser de diviser par 5, attendu que ce diviseur, affectant chacun des termes du dividende et du diviseur total, n'affecte pas le quotient définitif, ou le cours demandé.

On se bornera donc à multiplier chaque nombre de la première colonne par celui qui lui correspond dans la seconde, à faire la somme des produits obtenus, et à diviser cette somme par celle des nombres inscrits dans la première colonne.

En opérant ainsi, on trouvera que la somme des produits des nombres de la première colonne par ceux de la seconde est $3673792455^{f},70$. La somme des nombres de la première colonne étant 44540978 fr.; en divisant le premier résultat par le second, on obtient, pour le cours moyen demandé, 82,481..., ou simplement 82,48.

On trouvera de la même manière, que :

Pour les rentes	$4\frac{1}{2}$ pour 100,	le cours moyen est...				94,57
—	—	4 pour 100,	—	—	...	89,28
—	—	3 pour 100,	—	—	...	74,56

2° Pour les rentes 5 pour 100, en raisonnant comme au n° **745**, on trouvera que le taux de l'intérêt est $\frac{500}{82,48}$, d'où $r = \frac{5}{82,48}$. On aura donc

$$\left(1 + \frac{5}{82,48}\right)^n = \left(\frac{87,48}{82,48}\right)^n = 1 + 82,48 \cdot \frac{5}{82,48} = 6,$$

d'où $$n = \frac{\log 6}{\log 87,48 - \log 82,48} = \frac{0,7781512}{0,0255601},$$

valeur comprise entre 30 et 31 ans.

Pour les rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100, on trouvera que le taux de l'intérêt est $\frac{4,50}{94,57}$; par conséquent $r = \frac{4,50}{94,57}$. On aura donc

$$\left(1 + \frac{4,50}{94,59}\right)^n = \left(\frac{99,07}{94,57}\right)^n = 1 + 94,57 \cdot \frac{4,50}{94,57} = 5,5,$$

d'où $$n = \frac{\log 5,5}{\log 99,07 - \log 94,57} = \frac{0,7403627}{0,0201888},$$

valeur comprise entre 36 et 37 ans.

Pour les rentes 4 pour 100, on trouvera que le taux de l'intérêt est $\frac{400}{89,28}$; par conséquent $r = \frac{4}{89,28}$. On aura donc

$$\left(1 + \frac{4}{89,28}\right)^n = \left(\frac{93,28}{89,28}\right)^n = 1 + 89,28 \cdot \frac{4}{89,28} = 5,$$

d'où $$n = \frac{\log 5}{\log 93,28 - \log 89,28} = \frac{0,6989700}{0,0190343},$$

valeur comprise entre 31 et 32 ans.

Enfin, pour les rentes 3 pour 100, on trouvera que le taux de l'intérêt est $\frac{300}{74,56}$; par conséquent $r = \frac{3}{74,56}$. On aura donc

$$\left(1 + \frac{3}{74,56}\right)^n = \left(\frac{77,56}{74,56}\right)^n = 1 + 74,56 \cdot \frac{3}{74,56} = 4,$$

d'où $$n = \frac{\log 4}{\log 77,56 - \log 74,56} = \frac{0,6020600}{0,0171319},$$

valeur comprise entre 35 et 36 ans.

748*. Pour obtenir le prix de rachat correspondant à chaque année, il faut multiplier la quotité de rentes par le cours moyen,

et diviser le produit par 3. Tous les produits dont il s'agit ont été faits au numéro précédent; il restera donc à les diviser par 3.

Pour obtenir le taux réel de l'intérêt, il faut multiplier 3 fr. par 100, et diviser le produit par le cours de la rente; si l'on veut ensuite obtenir l'intérêt de 1 fr., il faudra diviser par 100; on aura donc sur-le-champ l'intérêt annuel de 1 fr. en divisant 3 fr. par le cours.

On trouvera de la sorte :

Années.	Prix de rachat.	Intérêt réel de 1 fr.
1825	55177353f,74	0f,03870
1826	77939944 ,88	0 ,04502
1827	77534083 ,80	0 ,04261
1828	77387260 ,93	0 ,04189
1829	77513028 ,38	0 ,03751
1830	61599148 ,00	0 ,03846
1831	26169895 ,19	0 ,05010
1832	24926041 ,68	0 ,04397
1833	52605766 ,45	0 ,03860
1834	15860710 ,08	0 ,04216
1835	17871431 ,93	0 ,03758
1836	18555202 ,39	0 ,03744
1837	19275729 ,71	0 ,03776
1838	20015215 ,39	0 ,03726
1839	20747164 ,90	0 ,03739
1840	21575345 ,19	0 ,03737
1841	22422973 ,07	0 ,03844
1842	25248390 ,52	0 ,03555
1843	26216034 ,49	0 ,03695
1844	27191366 ,15	0 ,03628
1845	30590843 ,64	0 ,03564
1846	31762206 ,00	0 ,03603
1847	32968464 ,46	0 ,03883
1848	20083770 ,00	0 ,05868

Cela posé, pour obtenir le capital définitif demandé, il faudra multiplier le prix d'achat correspondant à 1825 par l'unité augmentée de l'intérêt de 1 fr. cette année, c'est-à-dire par 1,03870; ajouter au produit le prix d'achat correspondant à 1826; multiplier la somme par 1 plus l'intérêt de 1 fr. en 1826, c'est-à-dire par 1,04502; ajouter au produit le prix d'achat correspondant à 1827; multiplier la somme par 1,04261; ajouter au produit le

prix d'achat correspondant à 1828; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait ajouté au résultat du calcul correspondant à 1847 le prix d'achat correspondant à 1848....

En effectuant ces calculs, on trouve $1566058919^f,48$.

749*. La somme des prix de rachat inscrits dans le tableau ci-dessus est $881237370^f,97$; en la divisant par 24, on trouve pour le montant de l'annuité moyenne $36718223^f,79$.

Le cours du 3 pour 100 étant supposé fixé à 74,56, le taux réel de l'intérêt est $\frac{300}{74,56}$, ce qui donne pour l'intérêt de 1 fr. $\frac{3}{74,56}$; en sorte que l'unité augmentée de cet intérêt équivaut à $1+\frac{3}{74,56}$ ou à $\frac{77,56}{74,56}$.

Le capital définitif demandé a donc pour expression (**730**)

$$36718223^f,79 \cdot \frac{\left[\left(\frac{77,56}{74,56}\right)^{24}-1\right]}{\frac{3}{74,56}}$$

ou $$\frac{1}{3} \cdot 36718223^f,79 \cdot \left[\left(\frac{77,56}{74,56}\right)^{24}-1\right] \cdot 74,56.$$

On trouvera d'abord, par logarithmes,

$$\left(\frac{77,56}{74,56}\right)^{24} = 2,577303....$$

Par conséquent l'expression à calculer est

$$\frac{1}{3} \cdot 36718223^f,79 \cdot 1,577303 \cdot 74,56$$

et, en effectuant les opérations indiquées, on trouvera

$$1439325241^f,33,$$

résultat inférieur à celui du numéro précédent.

750*. Désignons par R la quantité de rentes considérées, r l'intérêt de 1 fr., et A le capital nominal de ces rentes; on aura

$$1 : r = A : R, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{R}{r}.$$

Substituant cette valeur dans la formule du n° 730, on obtient

$$\frac{a.[(1+r)^n-1]}{r}=\frac{R}{r},$$

d'où $$a=\frac{R}{(1+r)^n-1}=\frac{R}{(1+r)^{40}-1},$$

puisque, dans le cas qui nous occupe, on a $n=40$.

Pour les rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 on aura donc

$$a=\frac{156017282^f}{(1,045)^{40}-1}.$$

On trouvera d'abord, par logarithmes,

$$(1,045)^{40}=5,81637,$$

par conséquent

$$a=\frac{156017282^f}{4,81637}=32393126^f,36.$$

Pour les rentes 4 pour 100 on aura de même

$$a=\frac{2363326^f}{(1,04)^{40}-1}.$$

On trouve $$(1,04)^{40}=4,80100,$$

par conséquent

$$a=\frac{2363326^f}{3,801}=621764^f,27.$$

Pour les rentes 3 pour 100 on aura enfin :

$$a=\frac{64305634^f}{(1,03)^{40}-1}.$$

On trouve $$(1,03)^{40}=3,26203,$$

par conséquent

$$a=\frac{64305634^f}{2,26203}=28428285^f,21.$$

La somme annuelle à consacrer à l'amortissement eût donc été la somme des trois résultats qu'on vient d'obtenir, c'est-à-dire

$$61443175^f,84.$$

751*. 1° Pour résoudre la première partie de la question, il faut faire usage de la formule

$$(1+r)^n = 1 + \frac{A}{a}.r$$

établie au n° **745**.

Ici l'on a $r = 0{,}045$ et $a = \frac{2}{100}A$; la formule devient donc

$$(1{,}045)^n = 1 + 50.0{,}045 = 3{,}25,$$

on en tire

$$n = \frac{\log 3{,}25}{\log 1{,}045} = \frac{0{,}5118834}{0{,}0191163} = 26{,}7773\ldots,$$

c'est-à-dire 26 ans, 9 mois et 10 jours environ.

2° Soit A′ le capital définitif produit en 1857, c'est-à-dire au bout de 8 ans; nous aurons

$$A' = \frac{a\,[(1{,}045)^8 - 1]}{0{,}045}.$$

D'ailleurs, si A désigne toujours le capital nominal de la dette, on a

$$A = 50.a.$$

En divisant la première égalité par la seconde, on obtient

$$\frac{A'}{A} = \frac{(1{,}045)^8 - 1}{2{,}25}.$$

On trouve d'abord

$$(1{,}045)^8 = 1{,}422101\ldots,$$

par conséquent

$$\frac{A'}{A} = \frac{0{,}422101}{2{,}25} = 0{,}187600\ldots,$$

fraction qui surpasse de très-peu $\frac{3}{16}$.

752*. Il faut d'abord calculer la portion de la dette qui sera amortie par voie de remboursement. La dotation est de 600000 fr., dont le tiers s'élève à 200000 fr. Le taux de l'intérêt est 50 pour 1000 ou 5 pour 100. En appelant A_1 la portion de la

dette amortie par voie de remboursement, on aura donc, d'après la formule du n° **730**,

$$A_1 = \frac{200000^f\,[(1,05)^{36} - 1]}{0,05}$$

ou

$$A_1 = 4000000^f\,[(1,05)^{36} - 1].$$

On trouvera

$$(1,05)^{36} = 5,791815\ldots,$$

et par conséquent

$$A_1 = 4000000^f.4,791815 = 19167260 \text{ fr.}$$

Retranchons ce capital de la dette totale, il reste 40832740 fr., qui devront être amortis par voie de rachat. Pour abréger, nous désignerons ce second capital partiel par A_2.

Soit c le cours cherché. Puisque l'on paye c ce qui vaut 1000 fr., la dette se trouve diminuée dans le même rapport. Dans la formule du n° **730**, il faut donc d'abord remplacer A par $\frac{c}{1000}.A_2$; en même temps a devra être remplacé par les deux tiers de la dotation ou 400000 fr.

Enfin, le taux réel de l'intérêt sera donné par la proportion

$$c : 50^f = 100 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{5000}{c},$$

et, par suite, $r = \frac{50}{c}$. On aura donc

$$\frac{c}{1000} A_2 = \frac{a\left[\left(1 + \frac{50}{c}\right)^{36} - 1\right]}{\frac{50}{c}},$$

d'où

$$\frac{A_2}{20a} + 1 = \left(1 + \frac{50}{c}\right)^{36},$$

ou

$$\left(1 + \frac{50}{c}\right)^{36} = 1 + \frac{40832740}{800000} = 6,1040925.$$

On tire de cette relation

$$\log\left(1+\frac{50}{c}\right)=\frac{\log 6,1040925}{36}=0,02182281,$$

d'où $$1+\frac{50}{c}=1,0515327...;$$

puis $$\frac{50}{c}=0,0515327 \quad \text{et} \quad c=\frac{50}{0,0515327...},$$

ou enfin $c=970^{f},257...$, c'est-à-dire un peu plus de $970^{f},25$.

755*. On a vu, au n° **721**, que, dans l'hypothèse où les intérêts se capitalisent par semestre, si l'on nomme a le capital primitif, r l'intérêt annuel de 1 fr., N le nombre de semestres formant la durée du placement, et A le capital définitif, on a

$$A=a(1+\tfrac{1}{2}r)^{N}.$$

Pour appliquer cette formule au cas qui nous occupe, il faut d'abord y remplacer a par $\frac{1}{2}a$, attendu que si a désigne l'annuité, la somme payée à chaque semestre est $\frac{1}{2}a$.

Il faut ensuite y faire successivement

$$N=2n-1,\ N=2n-2,\ \text{etc...},\quad \text{jusqu'à}\quad N=0,$$

afin d'obtenir les capitaux définitifs partiels correspondants aux capitaux primitifs partiels, tous égaux à $\frac{1}{2}a$. On trouve ainsi

$$\tfrac{1}{2}a(1+\tfrac{1}{2}r)^{2n-1},\quad \tfrac{1}{2}a(1+\tfrac{1}{2}r)^{2n-2},\ \text{etc...},\quad \tfrac{1}{2}a(1+\tfrac{1}{2}r),\quad \text{et}\quad \tfrac{1}{2}a.$$

Or, la somme de ces capitaux définitifs partiels, considérés en ordre inverse, est la somme des termes d'une progression géométrique croissante, dont le premier terme est $\frac{1}{2}a$, la raison $1+\frac{1}{2}r$, et le dernier terme $\frac{1}{2}a(1+\frac{1}{2}r)^{2n-1}$; d'après la formule connue, qui donne la somme des termes d'une progression géométrique, on aura donc, en appelant A le capital définitif total,

$$A=\frac{\frac{1}{2}a(1+\frac{1}{2}r)^{2n}-\frac{1}{2}a}{(1+\frac{1}{2}r)-1},$$

ou $$A=\frac{a[(1+\frac{1}{2}r)^{2n}-1]}{r},$$

c'est la formule du n° **750**, dans laquelle on a remplacé respectivement a, r et n par $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}r$ et $2n$; mais a y représente toujours l'*annuité*, c'est-à-dire la somme versée en deux semestres.

754*. D'après la formule établie au numéro précédent, le capital définitif demandé sera exprimé par

$$\frac{(1,02125)^{100}-1}{0,0425}.$$

On trouve

$$(1,02125)^{100}=8,188549;$$

le capital définitif cherché a donc pour valeur

$$\frac{7,188549}{0,0425}, \quad \text{ou} \quad 169^{f},14.$$

755*. La formule du n° **753**, résolue par rapport à a, donne

$$a=\frac{Ar}{(1+\frac{1}{2}r)^{2n}-1},$$

ou, en remplaçant A par 100 fr., et r par 0,0425,

$$a=\frac{4^{f},25}{(1,02125)^{2n}-1}.$$

On fera successivement $n=20$, $n=21$, $n=22$, etc., jusqu'à $n=50$; et l'on obtiendra le tableau suivant :

Nombre d'années.	Annuité.	Nombre d'années.	Annuité.
20	$3^{f},222374$	36	$1^{f},198960$
21	2,996114	37	1,136382
22	2,791676	38	1,077716
23	2,606206	39	1,022652
24	2,437322	40	0,970916
25	2,283028	41	0,922254
26	2,141628	42	0,876440
27	2,011682	43	0,833270
28	1,891956	44	0,792554
29	1,781382	45	0,754124
30	1,679036	46	0,717820
31	1,584116	47	0,683504
32	1,495916	48	0,651044
33	1,413816	49	0,620320
34	1,337270	50	0,591220
35	1,265796		

756*. Dans la formule du numéro précédent, il faut remplacer A par 100 fr., r par $0^f,037$, et n par 50, ce qui donne

$$a = \frac{3^f,70}{(1,0185)^{100} - 1},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$a = 0^f,704332....$$

(Dans les calculs relatifs au crédit foncier, dont il sera question ci-après, on ne conserve que six décimales, mais on force la dernière.)

§ 3. Du crédit foncier.

757*. Si la somme empruntée était 100 fr., l'annuité à servir se décomposerait comme il suit :

1° Intérêts à $4\frac{1}{2}$ pour 100.	$4^f,25$
2° Frais d'administration.	0 ,60
3° Amortissement, donné par le tableau du n° **755**.	0 ,59122
Total. . .	$5^f,44122$

ou, en complétant les centimes. . . . . $5^f,45$.

Pour un prêt de 10000 fr., qui est 100 fois plus considérable, l'annuité sera donc aussi 100 fois plus grande, c'est-à-dire égale à 545 fr.

758*. Pour un prêt de 100 fr., il aurait à payer :

1° Les intérêts à $4\frac{1}{4}$ pour 100.	$4^f,25$
2° Les frais d'administration.	0,60
3° L'amortissement, qui, d'après le tableau du n° **755**, est, pour 30 ans, de.	1,679036
Total. . .	$6^f,529036$

Pour un prêt de 24000 fr., ou de 240 fois 100 fr., l'annuité sera de 240 fois $6^f,529036$, c'est-à-dire de $1566^f,96864$, ou $1566^f,97$; soit $783^f,48$ par semestre.

759*. Pour un prêt de 100 fr. on aurait à payer annuellement :

Pour intérêts et frais d'administration.	$4^f,85$
Pour amortissement (voy. le tableau du n° **755**).	2 ,996114
Total. . .	$7^f,846114$

Pour un prêt de 18600 fr., qui est 186 fois plus considérable, on aura à payer 186 fois $7^f,846114$, c'est-à-dire $1459^f,3772...$, soit par semestre $729^f,69....$

760 *. Pour un prêt de 100 fr. l'annuité se composerait :

1° Des intérêts et frais d'administration.....	$4^f,85$
2° De l'amortissement qui pour 45 ans est de...	$0^f,754124$
En tout...	$5^f,604124$
Et par semestre...	$2^f,802062$

Autant de fois cette somme sera contenue dans $610^f,85$, autant la somme empruntée contiendra de fois 100 fr. ; en faisant la division on trouve 218 pour quotient ; la somme empruntée était donc 218 fois 100 fr. ou 21800 fr.

761 *. Puisque le propriétaire paye $980^f,27$ pour un prêt de 32750 fr., il payerait, pour un prêt de 100 fr., une somme donnée par le quatrième terme de la proportion

$$32750 : 980,27 = 100 : x,$$

d'où
$$x = \frac{98027}{32750} = 2^f,993191 ;$$

et par conséquent l'annuité serait le double de ce nombre ou $5^f,986382$.

Si l'on en retranche $4^f,85$ pour les intérêts et les frais d'administration, il reste $1^f,136382$ pour l'amortissement. Or, le tableau du n° **755** montre que cet amortissement répond à une durée de 37 ans. C'est donc pour 37 ans que la somme dont il s'agit a été empruntée.

762 *. Le tableau du n° **755** montre qu'un prêt de 100 fr. pour 48 ans donne lieu à un amortissement de $0^f,651044$; en y ajoutant $4^f,85$ pour les intérêts et les frais d'administration, on obtient pour l'annuité $5^f,501044$. Un prêt de 10000 fr. pour le même temps donnera donc lieu à une annuité 100 fois plus grande, c'est-à-dire de $550^f,1044$. Cette annuité est aussi celle qui est payée par le premier propriétaire. Mais le tableau montre qu'un prêt de 100 fr. pour 26 ans donne lieu à un amortissement de $2^f,141628$; en y ajoutant $4^f,85$ on obtient pour l'annuité $6^f,991628$. Autant de fois cette annuité sera contenue dans $550^f,1044$, autant il y aura de fois 100 fr. dans la somme cherchée.

En faisant la division, on obtient pour quotient $78^f,6804$; la somme cherchée est donc $100^f \times 78,6804$ ou $7868^f,04$.

763*. Le tableau du n° **755** montre qu'un prêt de 100 fr. pour 47 ans donne lieu à un amortissement de.... $0^f,683504$, tandis que pour 48 ans, il n'est que de..... $0^f,651044$.

Comme les annuités correspondantes se composent de l'amortissement augmenté de $4^f,85$, la différence des annuités est celle des amortissements, c'est-à-dire ..... $0^f,03246$.

Autant de fois ce nombre sera contenu dans $16^f,23$, autant la somme empruntée contiendra de fois 100 fr. En faisant la division, on trouve pour quotient 500; la somme empruntée était donc $100^f \times 500$ ou 50000 fr.

764*. La différence des annuités étant de $221^f,50$ pour un prêt de 50000 fr., elle serait 500 fois plus petite pour un prêt de 100 fr., c'est-à-dire qu'elle serait de $0^f,4429$.

Or la différence des annuités est la même que la différence des amortissements, puisque pour passer des unes aux autres il suffirait d'en retrancher $4^f,85$. Il s'agit donc de trouver dans la table du n° **755** deux nombres d'années différant de 7 unités, et tels que les amortissements qui leur correspondent diffèrent de $0^f,4429$.

Pour cela, on retranchera $0^f,4429$ de chacun des nombres de la table, et l'on verra si la différence obtenue est le nombre inscrit dans cette même table 7 lignes plus bas. Arrivé au nombre qui correspond à une durée de 33 ans, on obtient pour différence 0,970916 qui est précisément le nombre inscrit 7 lignes plus bas et qui correspond à une durée de 40 ans. La durée du prêt dont il s'agit était donc de 33 ans.

765*. On a vu au n° **756** que l'annuité à payer pour amortir en 50 ans une dette de 100 fr., quand les intérêts sont calculés à 3,70 pour 100 et capitalisés par semestre est de . . . $0^f,704332$

Si l'on ajoute à ce nombre les intérêts de 100 fr. à 3,70 pour 100, soit..... $3^f,70$

on obtient pour somme..... $4^f,404332$

Pour avoir les frais d'administration, il suffit de retrancher ce dernier résultat du montant de l'annuité totale, qui est alors de 5 fr.; et il reste ..... $0^f,595668$.

766*. L'annuité étant de 5 pour 100, s'obtiendra en prenant le vingtième de 32000 fr., ce qui donne 1600 fr., et par semestre 800 fr.

L'intérêt de 32000 fr. à 3,70 pour 100 est exprimé par

$$\frac{32000^f \times 3{,}70}{100} \quad \text{ou} \quad 1184 \text{ fr. par an ;}$$

par semestre, ce serait la moitié ou 592 fr.

L'amortissement étant de $0^f{,}704332$ pour 100 fr.. sera de 320 fois $0^f{,}704332$ pour 32000 fr. ; en faisant la multiplication, on trouve $225^f{,}38624$.

Pour un semestre, ce sera la moitié, ou $112^f{,}69$ environ.

767*. La durée du prêt étant de 50 ans, l'amortissement, pour un prêt de 100 fr., est de $0^f{,}591220$ par an (**755**). Au bout de 36 ans, cette annuité produit un capital définitif exprimé (**755**) par

$$\frac{0^f{,}591220\,[(1{,}02125)^{72} - 1]}{0{,}0425}, \quad \text{ou}\ldots \quad 49^f{,}311087.$$

Sur 100 fr., il resterait donc dû.....	50 ,688913
A quoi il faut ajouter 3 pour 100 ou.....	1 ,520667
La somme à payer serait donc.....	$52^f{,}209580$

Pour un prêt de 20000 fr., elle sera 200 fois plus grande, c'est-à-dire $10441^f{,}92$.

768*. La durée du prêt étant de 40 ans, l'amortissement, pour un prêt de 100 fr., est de $0^f{,}970916$ (**755**). Au bout de 25 ans, cette annuité produit un capital définitif exprimé (**755**) par

$$\frac{0^f{,}970916\,[(1{,}02125)^{50} - 1]}{0{,}0425}, \quad \text{ou}\ldots \quad 42^f{,}527577.$$

Sur 100 fr., il resterait donc dû.....	57 ,472423
A quoi il faut ajouter 3 pour 100 ou.....	1 ,724173
La somme à payer serait donc.....	$59^f{,}196596$

Pour un prêt de 60000 fr., elle sera 600 fois plus grande, c'est-à-dire $35517^f{,}96$.

769*. Quand la durée du prêt est de 30 ans, l'amortissement, pour un prêt de 100 fr., est (**755**) de $1^f{,}679036$. Au bout de

11 ans, cette annuité produit (**753**) un capital définitif exprimé par

$$\frac{1^f,679037\,[(1,02125)^{22}-1]}{0,0425}, \quad \text{ou....} \quad 34^f,732424.$$

Sur 100 fr., il resterait donc dû.....	$65^f,267576$
A quoi il faut ajouter 3 pour 100, ou....	$1\ ,958027$
La somme à payer serait donc.....	$67^f,225603$

Autant de fois cette somme sera contenue dans $10084^f,84$, autant la somme empruntée contiendra de fois 100 fr.; en faisant la division, on trouve pour quotient 150; la somme empruntée est donc 150 fois 100 fr., c'est-à-dire 15000 fr.

770*. Si pour un prêt de 250000 fr., on a à payer une somme de $164662^f,54$; pour un prêt de 100 fr., on aurait à payer 2500 fois moins, ou $65^f,865015$. Cette somme représente le reste de la dette, augmenté des 3 pour 100 de ce reste; c'est-à-dire qu'elle représente les $\frac{103}{100}$ du reste de la dette; on obtiendra donc ce reste en divisant $65^f,865015$ par $\frac{103}{100}$, c'est-à-dire en multipliant cette somme par 100 et divisant le produit par 103, ce qui donne $63^f,946617$. La portion de la dette déjà payée est donc $100^f - 63^f,946617$, c'est-à-dire $36^f,053383$. C'est le capital produit, au bout du temps cherché, par l'annuité correspondante à une durée de 38 ans, savoir (**753**) par $1^f,077716$. En appelant n le nombre d'années cherché, on doit donc avoir (**753**)

$$\frac{1^f,077716\,[(1,02125)^{2n}-1]}{0,0425} = 36^f,053383,$$

d'où l'on tire

$$(1,02125)^{2n} = 1 + \frac{36^f,053383 \times 0,0425}{1^f,077716}$$

ou

$$(1,02125)^{2n} = 2,418504.$$

On en déduit, en appliquant les logarithmes,

$$2n = \frac{\log 2,418504}{\log 1,02125} = \frac{0,3835469}{0,00913207} = 42,$$

d'où $n = 21$. L'emprunteur compte donc se libérer ainsi au bout de 21 ans.

771*. Si pour un prêt de 12000 fr. on a à payer $10020^f,1032$, pour un prêt de 100 fr. on aurait à payer 120 fois moins, c'est-à-dire $83^f,50086$. Cette somme représente, comme ci-dessus, le

reste de la dette, augmenté des 3 pour 100 de ce reste; qu'on obtiendra par conséquent en divisant $83^f,50086$ par $\frac{103}{100}$; on trouve $81^f,068796$. C'est le capital définitif produit en 8 ans par l'annuité correspondante à la durée du prêt; en nommant donc a cette annuité, on devra avoir (**755**)

$$\frac{a[(1,02125)^{16}-1]}{0,0425} = 81^f,068796,$$

d'où

$$a = \frac{81^f,068796}{(1,02125)^{16}-1} = 2,011682.$$

En consultant la table du n° **755**, on trouve que cette annuité correspond à un prêt de 27 ans. Telle est la durée demandée.

772*. L'emprunteur qui veut se libérer au bout de 20 ans, n'a effectué que 19 versements annuels. La fraction demandée se composera donc : 1° de 2 pour 100, ou 0,02; 2° du cinquième ou 0,20; 3° il y aura à déduire 19 fois $1\frac{1}{2}$ pour 100, soit $0,015 \times 19$ de ce cinquième, c'est-à-dire $0,20 \times 0,015 \times 19$ ou $0,003 \times 19$. La fraction demandée sera donc

$$0,02 + 0,20 - 0,003 \times 19,$$

ou

$$0,22 - 0,057,$$

ou enfin

$$0,163.$$

773*. On aura à prendre 1° 2 pour 100 ou 0,02 du capital non amorti; 2° le cinquième de ce capital, ou 0,20; 3° il en faudra retrancher $n-1$ fois $1\frac{1}{2}$ pour 100 de ce cinquième, c'est-à-dire

$$0,20 \times 0,015\,(n-1) \quad \text{ou} \quad 0,003\,(n-1).$$

La fraction demandée sera donc

$$0,22 - 0,003\,(n-1).$$

774*. D'après ce qui a été dit aux deux numéros précédents, si R désigne la portion de capital non encore amortie au moment de la libération, l'emprunteur aura à payer

$$\mathrm{R} + \mathrm{R}\,(0,22 - 0,003.35) \quad \text{ou} \quad 1,115.\mathrm{R}.$$

Pour calculer R, il faut se rappeler que, dans le mode d'emprunt qui nous occupe, l'amortissement annuel est $0^f,704332$

pour 100 fr. de capital emprunté. Au bout de 36 ans, la portion de capital amortie sera donc exprimée (755) par

$$\frac{0^f,704332\,[(1,0185)^{72}-1]}{0,037},\quad \text{ou}\ldots\ldots\quad 52^f,211536.$$

Sur 100 fr., il restera donc dû . . . . . 47f,788464.
La somme à payer, pour 100 fr. de capital emprunté, sera donc

$$47^f,788464 \times 1,115 \quad \text{ou} \quad 53^f,284137.$$

Pour 20000 fr. de capital emprunté, la somme à payer sera 200 fois plus grande, c'est-à-dire . . . . . 10656f,83.
Au n° 767, on a trouvé. . . . . 10441f,92.
Le remboursement anticipé au bout de 36 ans serait donc plus onéreux pour l'emprunteur dans l'hypothèse des intérêts à 3f,70 pour 100 que dans celle des intérêts à 4f,25.

775*. Dans la première hypothèse, l'amortissement annuel étant de 0f,591220 (755), pour 100 fr. de capital emprunté, la portion de ce capital amortie au bout de 16 ans sera

$$\frac{0^f,591220\,[(1,02125)^{32}-1]}{0,045},\quad \text{ou}\ldots\quad 13^f,352743.$$

Il restera donc dû.	86f,647257
A quoi il faudra ajouter 3 pour 100 ou. . .	2f,599418
Et l'emprunteur aura à payer.	89f,246675

Dans la seconde hypothèse, l'amortissement annuel étant de 0f,704,332 pour 100 fr. de capital emprunté, la portion de ce capital amortie au bout de 16 ans sera

$$\frac{0^f,704332\,[(1,0185)^{32}-\ ]}{0,037},\quad \text{ou}\ldots\ldots\quad 15^f,187842.$$

Il restera donc dû. 84f,812158;
et l'emprunteur aura à payer (773)

$$84^f,812158\,(1,22-0,003.15),$$

c'est-à-dire

$$84^f,812158 \times 1,175 \quad \text{ou} \quad 99^f,654285.$$

La somme à payer au moment du remboursement sera donc plus considérable dans la seconde hypothèse que dans la première.

776*. L'annuité payée dans le premier mode est 5f,45 ou plus

exactement $5^f,44122$ (757); dans le second mode, elle n'est que de 5 fr. On aura donc à tenir compte de la différence $0^f,44122$ payée en plus chaque année, en deux semestres, avec les intérêts à 3 pour 100 capitalisés par semestre. On devra calculer à cet effet l'expression (755)

$$\frac{0^f,44122\,[(1,015)^{32}-1]}{0,03},$$

ce qui donne..... $8^f,976169$.

Or, les sommes à payer, dans les deux modes d'emprunt, au moment où l'emprunteur se libère, c'est-à-dire $89^f,246675$ d'une part et $99^f,654285$ de l'autre (775), diffèrent de... $10^f,407610$

Si on en retranche les..... $8^f,976169$

le reste..... $1^f,431241$

exprimera l'excès des déboursés dans le second mode, qui est par conséquent le moins avantageux pour l'époque où la libération s'opère.

777*. 1° Dans le premier mode, la portion de capital amortie au bout de 17 ans, sera, pour 100 fr. de capital emprunté,

$$\frac{0^f,591220\,[(1,02125)^{34}-1]}{0,045}, \text{ ou} \ldots\ldots \quad 14^f,523766.$$

Il restera donc dû ..... $85^f,476234$

En y ajoutant les 3 pour 100, ou..... $2^f,564287$

on aura la somme à payer par l'emprunteur, soit. . $88^f,040521$

Dans le second mode, la portion de capital amortie en 17 ans sera

$$\frac{0^f,704332\,[(1,0185)]^{34}-1]}{0,037}, \text{ ou} \ldots\ldots \quad 16^f,465837,$$

et il restera dû ..... $83^f,534163$.

Ce reste devra être multiplié par

$$1,22 - 0,003.16, \text{ ou par } 1,172$$

ce qui donne pour la somme à payer..... $97^f,902039$

On a trouvé dans le premier mode..... $88\ ,040521$

Différence à la charge du second..... $9^f,861518$

Mais, en tenant compte des sommes versées, on aura à calculer comme ci-dessus l'expression

$$\frac{0^f,44122\,[(1,015)^{34}-1]}{0,03},\quad \text{qui revient à...}\quad 9^f,690986$$

La différence à la charge du second mode se trouve donc réduite à..... $0^f,170532$

en sorte que le premier mode présente un léger avantage.

2° Dans le premier mode, la portion du capital amortie au bout de 18 ans sera, pour 100 fr. de capital emprunté :

$$\frac{0^f,591220\,[(1,02125)^{36}-1]}{0,045},\quad \text{ou.....}\quad 15^f,745086$$

Il restera donc dû..... 84 ,254914
et, en y ajoutant les 3 pour 100 ou..... 2 ,527647
on trouvera pour la somme à payer par l'emprunteur $86^f,782561$

Dans le second mode, la portion de capital amortie au bout de 18 ans sera

$$\frac{0^f,704332\,[(1,0185)^{36}-1]}{0,037},\quad \text{ou.....}\quad 17^f,791555,$$

et il restera dû..... $82^f,208445$.

Ce reste devra être multiplié par

$$1,22-0,003.17 \quad \text{ou par} \quad 1,169,$$

ce qui donne pour la somme à payer..... $96^f,101672$
On a trouvé dans le premier mode..... $86^f,782561$
différence à la charge du second..... $9^f,319111$

Mais, en tenant compte des sommes versées, on aura à ajouter aux charges du premier mode la valeur de l'expression

$$\frac{0^f,44122\,[(1,015)^{36}-1]}{0,03},\quad \text{c'est-à-dire....}\quad 10^f,428442$$

La différence... $1^f,109131$

est donc en définitive à la charge du premier mode, et c'est le second qui se trouve être cette fois le plus avantageux.

Remarque. Jusqu'à 17 ans, il y a avantage à adopter le premier mode; mais si la libération doit avoir lieu plus tard, il vaut mieux adopter le second.

778*. D'après la remarque faite au numéro précédent, le cultivateur devra choisir le deuxième mode, c'est-à-dire celui dans lequel les intérêts sont calculés à 3,70 pour 100.

Pour calculer ce qu'il aura à payer en se libérant au bout de 25 ans, opérons d'abord dans l'hypothèse d'un capital de 100 fr. La portion de ce capital, amortie au bout de 25 ans, est exprimée par

$$\frac{0^f,704332\,[(1,0185)^{50}-1]}{0,037}, \text{ ou} \ldots\ldots\ 28^f,566237.$$

Il reste donc dû. . . . . $71^f,433763$.

Il faut multiplier ce reste par

$$1,22 - 0,003.24, \text{ ou par } 1,148,$$

ce qui donne. . . . . $82^f,005960$.

Pour un emprunt de 40000 fr., la somme à payer sera 400 fois plus grande, c'est-à-dire. . . . . $32802^f,38$.

779*. Cherchons d'abord quelle serait la différence des sommes à payer dans les deux modes, pour 100 fr. de capital emprunté.

Dans le premier mode, la portion de capital amortie au bout de 30 ans, serait

$$\frac{0^f,591220\,[(1,02125)^{60}-1]}{0,0425}, \text{ ou} \ldots\ldots\ 35^f,211882.$$

Il resterait donc dû . . . . . $64^f,788118$

et, en y ajoutant les 3 pour 100, ou. . . . . 1 ,943644

on obtient pour la somme à payer . . . . . $66^f,731762$

Dans le second mode, la portion de capital amortie au bout de 30 ans, serait

$$\frac{0^f,704332\,[(1,0185)^{60}-1]}{0,037}, \text{ ou} \ldots\ldots\ 38^f,143149,$$

il resterait dû par conséquent. . . . . $61^f,856851$.

Ce reste doit être multiplié par

$$1,22 - 0,003.29, \text{ ou par } 1,133,$$

ce qui donne pour la somme à payer. . . . . $70^f,083812$.

L'excès de la somme à payer dans le second mode, sur celle à payer dans le premier, est donc. . . . . $3^f,352050$.

Autant de fois cet excès sera contenu dans $8044^f,92$, autant la

somme empruntée contiendra de fois 100 fr. En faisant la division, on obtient pour quotient 2400; la somme empruntée est donc 2400 fois 100 fr., ou 240000 fr.

780*. La durée de l'emprunt étant de moins de 50 ans, il ne peut être question que du premier ordre d'emprunt, dans lequel les intérêts sont calculés à $4\frac{1}{4}$ pour 100.

L'emprunteur aura à payer 3000 fr., plus les 3 pour 100 de cette somme, savoir 90 fr.; en tout, 3090 fr.

Le tableau du n° **755** montre que pour produire au bout de 40 — 18, ou 22 ans, un capital définitif de 100 fr., il faut payer un amortissement annuel de $2^f,791676$; et en y ajoutant $4^f,25$ pour les intérêts, et $0^f,60$ pour les frais d'administration (**757**), en tout $4^f,85$, on obtient $7^f,641676$ pour l'annuité totale qu'on aurait eue à payer en empruntant 100 fr. pour 22 ans. En empruntant 3000 fr. pour le même temps, on aurait eu à payer une somme 30 fois plus grande, ou $229^f,25$. L'annuité payée par l'emprunteur devra être diminuée d'autant.

Or, en empruntant 100 fr. pour 40 ans, il avait à payer annuellement, d'après le tableau, $0^f,970916$, plus $4^f,85$, en tout $5^f,820916$; en empruntant 15000 fr. pour le même temps, il avait donc à payer annuellement 150 fois plus, ou $873^f,14$. Cette annuité étant réduite de $229^f,25$, il n'aura plus à payer annuellement que $643^f,89$.

781*. L'emprunteur voulant se libérer au bout d'un temps supérieur à 17 ans, c'est le second mode d'emprunt qu'il a dû adopter, d'après la remarque du n° **777**.

Il devra payer en se libérant (**775**),

$$40000^f\,[1,22 - 0,003.24],$$

ou $\qquad 40000^f \times 1,148$, c'est-à-dire 45920 fr.

Il reste à calculer la diminution que subira son annuité. Pour cela, il faut chercher d'abord l'annuité, qui, au taux de 3,70 pour 100, produit, en 25 ans, un capital définitif de 100 fr. Cette annuité est exprimée (voy. la formule du n° **755**) par

$$\frac{100^f \times 0,037}{(1,0185)^{50} - 1}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2^f,465612.$$

En y ajoutant $3^f,70$ pour l'intérêt, et $0^f,60$ pour frais d'administration; en tout . . . . . $4,30$

on obtient. . . . . $6^f,765612$

pour l'annuité totale qu'on aurait à payer en empruntant 100 fr.

pour 25 ans, au taux de 3,7 pour 100. En empruntant 40000 fr., on aurait à payer une somme 400 fois plus grande, ou 2706f,25. L'annuité payée par l'emprunteur devra être diminuée d'autant.

Or, il payait une annuité de 5 fr. pour chaque capital de 100 fr. emprunté, en tout 2000 fois 5 fr., ou 10000 fr. Il n'aura donc plus à payer que la différence entre 10000 fr. et 2706f,25, c'est-à-dire 7293f,75.

732*. Au bout de 15 ans, l'amortissement annuel de 0f,59122 par 100 fr. de capital, soit en tout 0f59122 × 600 ou 354f,732, aura produit un capital définitif exprimé par (755)

$$\frac{354^f.732\,[(1,02125)^{30}-1}{0,0425}, \quad \text{ou} \quad 7337^f,9676,$$

sur 60000 fr. il restera donc dû	52662f,0324
A ce moment, l'emprunteur paye	15000 ,0000
La dette est donc réduite à . . .	37662f,0324

Pour éteindre cette dette en 40 — 15, ou 25 ans, il faut un amortissement annuel exprimé par (755)

$$\frac{37662^f,0324 \times 0,0425}{(1,02125)^{50}-1}, \quad \text{ou} \quad 869^f,8348.$$

Dans l'intervalle qui s'écoule depuis la quinzième jusqu'à la vingt-huitième année, c'est-à-dire en 13 ans, cet amortissement aura produit un capital définitif exprimé par (755)

$$\frac{859^f,8384[(1,02125)^{26}-1]}{0,0425}, \quad \text{ou} \quad 14719^f,5910.$$

La dette se trouvera donc réduite à

37662f,0324 — 14719f,5910, c'est-à-dire à 22942f,4414.

L'emprunteur aura donc à payer :

1° Au bout de 15 ans.	15000f,0000
Plus les 3 pour 100 de cette somme, ou. .	450 ,0000
En tout. . .	15450 ,0000
2° Au bout de 28 ans.	22942 ,4414
Plus les 3 pour 100 de cette somme.	688 .2732
En tout. . .	23630f,7146.

L'annuité primitive payée par l'emprunteur était de 600 fois 5f,441220, c'est-à-dire de . . . . . 3264f,7320.

Le tableau du n° 755 montre que pour produire au bout de

40 — 15, ou 25 ans, un capital définitif de 100 fr., il faut payer un amortissement annuel de $2^f,283028$; ce qui, joint aux $4^f,25$ d'intérêt annuel, et aux $0^f,60$ pour frais d'administration, donne une annuité totale de $7^f,133028$. Pour produire au bout du même temps un capital définitif de 15000 fr., il faudrait donc un amortissement, et, par suite, une annuité 150 fois plus grande, c'est-à-dire $1069^f,9542$. L'annuité devra donc être réduite d'autant, c'est-à-dire qu'elle ne doit plus être que de. . $2194^f,7778$.

785*. L'amortissement annuel primitif est de 300 fois $0^f,704332$, c'est-à-dire de $211^f,2996$. A la fin de la première période de 10 ans, cet amortissement aura produit un capital définitif exprimé par (**755**)

$$\frac{211^f,2996\,[(1,0185)^{20}-1]}{0,037}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots \quad 2529^f,0158.$$

La dette de 30000 fr. se trouvera donc réduite à. . $27470^f,9842$,
A ce moment, l'emprunteur se libère de. . . . . 6000 ,0000,
il reste donc dû . . . . . 21470 ,9842.

Pour éteindre cette dette en 50 — 10, ou 40 ans, il faut un amortissement annuel exprimé (**756**) par

$$\frac{21470^f,9842 \times 0,037}{(1,0185)^{80}-1}, \text{ ou } \quad 238^f,2849.$$

Au bout de la seconde période de 10 années, cet amortissement annuel aura produit un capital définitif exprimé par

$$\frac{238^f,2849\,[(1,0185)^{20}-1]}{0,037}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots \quad 2852^f,0000,$$

sur les $21470^f,9842$, il restera donc dû . . . . . $18618^f,9842$.
A ce moment, l'emprunteur se libère de . . . . . 10000 ,0000.
Sa dette se trouve donc réduite à. . . . . 8618 ,9842.

Pour éteindre cette dette en 40 — 10, ou 30 ans, il faut un amortissement annuel exprimé par

$$\frac{8618^f,9842 \times 0,037}{(1,0185)^{60}-1}, \text{ ou } \quad 52^f,6636.$$

Au bout de la troisième période de 10 années, cet amortissement annuel aura produit un capital définitif exprimé par

$$\frac{52^f,6636\,[(1,0185)^{20}-1]}{0,037}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots \quad 630^f,3236,$$

sur les $8618^f,9842$, il restera donc dû. . . . . $7988^f,6606$.

Nous pouvons maintenant calculer ce que l'emprunteur aura à débourser à la fin de chaque période de 10 années.

A la fin de la première période, il aura à payer

$6000^f.(1,22 - 0,003.9)$, ou $6000^f \times 1,193$, ou 7158 fr.

A la fin de la seconde période, il aura à payer

$10000^f(1,22 - 0,003.19)$, ou $10000^f \times 1,163$, ou 11630 fr.

A la fin de la troisième période, il aura à payer

$7988^f,6606(1,22 - 0,003.29)$, ou $7988^f,6606 \times 1,133$,

c'est-à-dire. . . . . $9051^f,15$.

Il reste à obtenir les réductions successives de l'annuité. L'annuité primitive était de 300 fois 5 fr., ou de. . . . . 1500 fr.

Pour obtenir la réduction à la fin de la première période de 10 années, il faut calculer d'abord l'amortissement annuel nécessaire pour éteindre en 40 ans une dette de 100 fr.; cet amortissement est exprimé par

$$\frac{100^f \times 0,037}{(1,0185)^{80} - 1}, \text{ ou } 1^f,109799.$$

En y ajoutant $3^f,70$ pour les intérêts, et $0^f,60$ pour les frais d'administration, en tout $4^f,30$, on obtient. . . . . $5^f,409799$, pour l'annuité afférente à un capital de 100 fr. Pour un capital de 6000 fr., l'annuité sera 60 fois plus grande, ou. . $324^f,59$.

L'annuité primitive de 1500 fr. sera donc réduite à. . 1175,41.

Pour obtenir la réduction à la fin de la seconde période de 10 années, il faut calculer l'amortissement annuel nécessaire pour éteindre en 30 ans une dette de 100 fr.; cet amortissement est exprimé par

$$\frac{100^f \times 0,037}{(1,0185)^{60} - 1}, \text{ ou } 1^f,846550.$$

En y ajoutant $4^f,30$, on obtient. . . . . $6^f,146550$.

Pour un capital de 10000 fr., l'annuité sera 100 fois plus grande, c'est-à-dire. . . . . $614^f,6550$.

L'annuité de $1175^f,41$ sera donc réduite à. . . . . $560^f,76$.

784. 1° Une prime de 20 pour 100, au bout de 10 ans, revient à une prime annuelle de 2 pour 100; le porteur d'une obligation aurait donc placé son argent à $3 + 2$, ou 5 pour 100, si cette obligation était remboursée au bout de 10 ans.

2° Une prime de 20 pour 100, au bout de 20 ans, revient à

une prime annuelle de 1 pour 100; le taux réel du placement serait donc dans ce cas de $3+1$, ou 4 pour 100.

En raisonnant de même, on trouvera

3° Que le taux réel du placement serait $3^f,666...$, si l'obligation était remboursée au bout de 30 ans.

4° Que le taux serait $3^f,50$ au bout de 40 ans.

5° Que le taux serait $3^f,40$ au bout de 50 ans.

785*. L'amortissement annuel cherché sera donné (755) par la formule

$$a = \frac{120^f \times 0,025}{(1,0125)^{100} - 1}, \quad \text{d'où} \quad a = 1^f,217827,$$

attendu que le capital définitif est ici 100 fr., plus 20 fr., ou 120 fr.

786. Dans l'hypothèse dont il s'agit, la société reçoit annuellement :

1° Intérêts du capital.	$3^f,700000$
2° Amortissement.	0 ,704332
3° Frais d'administration (pour mémoire).	0 ,595668
Total. . .	$5^f,000000$

D'un autre côté, elle a à débourser :

1° Intérêts d'un dixième d'obligation.	$3^f,000000$
2° Amortissement du capital et de la prime. . . .	1 ,217827
3° Frais d'administration (pour mémoire).	0 ,595668
Total. . .	$4^f,813495$

La différence entre ces deux résultats, ou . . . . . $0^f,186505$ est le bénéfice cherché.

787*. On a trouvé plus haut (785), pour l'amortissement annuel relatif à un capital de 120 fr., à 2,50 pour 100. $1^f,217827$.

L'amortissement relatif à un capital de 100 fr., s'obtiendra en multipliant celui-ci par $\frac{100}{120}$, ou $\frac{5}{6}$, ce qui donne. . $1^f,014856$.

Cela posé, les portions de capital amorti au bout des temps indiqués seront données par les formules

$$\frac{0^f,704332\,[(1,0185)^{2n} - 1]}{0,037} \quad \text{et} \quad \frac{1^f,014856\,[(1,0125)^{2n} - 1]}{0,025},$$

dans lesquelles on fera successivement :

$$n = 10, \quad n = 20, \quad n = 30, \quad n = 40.$$

En effectuant ces calculs, on trouvera :

Nombres d'années.	Amortissement à 3,70.	Amortissement à 2,50.
10	8f,430052	11f,449076
20	20,545971	26,127230
30	38,143126	44,945172
40	63,464787	69,070448

En retranchant ces nombres de 100 fr., on aura les restes des dettes aux époques considérées, et l'on pourra former le tableau suivant :

Nombres d'années.	Restes à 3,70.	Restes à 2,50.	Différences.
10	91f,569948	88f,550924	3f,019024
20	79,454029	73,872770	5,581259
30	61,856874	55,054828	6,802046
40	36,535213	30,929552	5,605661

788. Il résulte de ce que l'on a vu au n° **773**, que si n est le nombre d'années écoulées depuis l'emprunt, et R ce qu'il reste à payer pour se libérer, la remise sur les 20 pour 100 de ce reste est exprimée par

$$R \times 0{,}20 \times 0{,}015 \times (n - 1), \quad \text{ou} \quad 0{,}003\,(n - 1).R.$$

Si l'on remplace successivement n par 10, 20, 30, 40, et R par les nombres inscrits dans la seconde colonne du tableau précédent, qui se rapporte à un amortissement au taux de 3,70, on obtiendra les remises correspondantes, et l'on pourra former le tableau suivant :

Nombres d'années.	Différences des deux amortissements.	Remises (à 1 1/2 p. 100).
10	3f,019024	2f,472389
20	5,581259	4,528880
30	6,802046	5,381548
40	5,605661	4,274620

On voit que la remise faite par le Crédit foncier est un peu inférieure à la différence des deux amortissements.

789. En conservant les notations du numéro précédent, la remise eût été exprimée par

$$0{,}20 \times 0{,}02\,(n - 1)\,R, \quad \text{ou par} \quad 0{,}004\,(n - 1)\,R.$$

En effectuant les calculs comme au numéro précédent, on peut former le tableau qui suit :

Nombres d'années.	Différences des deux amortissements.	Remises à 2 pour 100.
10	3f,019024	3f,296518
20	5 ,581259	6 ,038506
30	6 ,802046	7 ,175397
40	5 ,605661	5 ,699493

La Société du Crédit foncier n'aurait donc pas pu, sans perte, porter la remise sur le cinquième de la dette restante, aux 2 pour 100 de ce cinquième par versement effectué.

790. 1° Pour un prêt de 20 ans, l'annuité comprend :

L'amortissement, qui, d'après le tableau du n° **755**, est de.	3f,222374
L'intérêt à $4\frac{1}{4}$ pour 100.	4 ,250000
Les frais d'administration.	0 ,600000
En tout. . .	8f,072374

D'un autre côté, les déboursés annuels de la Société comprennent :

L'intérêt à 3 pour 100.	3f,000000
L'amortissement du capital et de la prime.	1 ,217827
Les frais d'administration.	0 ,600000
En tout. . .	4f,817827

La différence à l'avantage de la Société est donc. 3 ,254547

Pendant les 20 années de prêt, cette différence annuelle produit, à 2,50 pour 100 et à intérêts composés par semestre, un capital définitif exprimé par

$$\frac{3^f,254547\,[(1,0125)^{40}-1]}{0,025}, \text{ ou. . . . . } 83^f,787560,$$

et, au bout des 30 années suivantes, ce capital devient :

$$83^f,787560.(1,0125)^{60}, \text{ ou. . . . . } 176^f,555530.$$

D'autre part, pendant ces 30 années, les déboursés de la Société s'élèvent à $4^f,817827 \times 30$, ou. 144 ,534810.

Son bénéfice en 50 ans est donc. 32f,020720,

et, par conséquent, son bénéfice annuel en est le 50e, ou. . . . . 0f,640414.

2° Pour un prêt de 40 ans, l'annuité comprend :

L'amortissement, qui, d'après le tableau du n° **755**, est de. . . . . 0f,970916.
L'intérêt et les frais d'administration. . . . . 4,850000.
En tout. . . 5f,820916.

Le déboursé annuel de la Société étant toujours. 4f,817827,
la différence, à l'avantage de la Société, est. . . . . 1f,003089.
Pendant les 40 années du prêt, cette différence annuelle produit un capital exprimé par

$$\frac{1^f,003089\,[(1,0125)^{80}-1]}{0,025}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ 68^f,269300,$$

et, au bout des 10 années suivantes, ce capital devient

$$68^f,269300\ (1,0125)^{20}, \text{ ou} \ldots\ 87^f,523760.$$

Les déboursés de la Société pendant ces 10 années s'élèvent d'ailleurs à 10 fois 4f,817827, ou. . . . . 48,178270.
Le bénéfice en 50 ans est donc. 39f,345490,
et, par conséquent, le bénéfice annuel. . . . . 0f,786910.

791*. Il faut d'abord calculer ce que devra l'emprunteur. La durée de l'emprunt étant de 40 ans, l'amortissement, en vertu du tableau du n° **755**, est de 0f,970916 pour 100 fr. de capital emprunté. Au bout de 15 ans, cet amortissement aura produit un capital définitif exprimé par

$$\frac{0^f,970916\,[(1,02125)^{30}-1]}{0,0425}, \text{ ou} \ldots\ldots\ 20^f,084328.$$

Sur 100 fr., il restera donc dû à cette époque. . . 79f,915672,
et, en y ajoutant 3 pour 100, ou. 2,397470,
on obtient pour la somme à payer. . . . . 82f,313142.

Pour 35000 fr. de capital emprunté, la somme à payer sera 350 fois plus grande, c'est-à-dire. . . . . 28809f,60.

Les obligations étant reçues au pair, c'est-à-dire à 1000 fr., l'emprunteur devra donner 28 obligations entières, 8 dixièmes d'obligation plus 9f,60 en argent.

Le cours des obligations foncières étant. 995f,
si l'on y ajoute pour le courtage 0,125 pour 100, ou . . 1,25
en forçant le chiffre des centimes, on aura le prix d'une obligation. 996f,25

Le prix de 28,8 obligations sera donc $996^f,25 \times 28,8$, c'est-à-dire 28692 fr. En y ajoutant les $9^f,60$, on obtient pour le déboursé total $28701^f,60$. L'emprunteur gagnerait donc 108 fr. à payer en obligations foncières.

792 *. Calculons d'abord ce que l'emprunteur devra encore au bout de 20 ans. L'amortissement étant de $0^f,704332$ pour 100 fr. de capital emprunté, cet amortissement aura produit au bout de 20 ans un capital définitif exprimé par

$$\frac{0^f,704332\,[(1,0185)^{40}-1]}{0,037}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots \quad 20^f,545971$$

Sur 100 fr. il restera donc dû. . . . . $79^f,454029$

Sur 250000 fr. de capital emprunté, le reste à payer sera 2500 fois plus considérable, c'est-à-dire . . . . . $198635^f,07$ ce qui, au pair, représente 198,6 obligations, plus $35^f,07$.

Mais, par hypothèse, l'emprunteur gagnerait 4000 fr. en payant en obligations foncières; ces 198,6 obligations doivent donc lui coûter 194600 fr.; et chacune d'elles doit coûter par conséquent $\frac{194600^f}{198,6}$: c'est-à-dire $979^f,859$... ou $979^f,86$. Mais ce prix comprend $0^f,125$ pour 100 de courtage; c'est-à-dire que c'est le prix d'une obligation multiplié par 1,00125. En le divisant donc par ce nombre on aura le prix d'une obligation. On trouve $978^f,636$.... Le cours demandé devrait donc être $978^f,50$ au plus.

CHAPITRE VI.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES SUR LA POPULATION, LES TABLES DE MORTALITÉ ET LES ÉTABLISSEMENTS DE PRÉVOYANCE.

§ 1. Problèmes sur la population.

793. Pour obtenir le nombre moyen d'habitants par kilomètre carré, il suffit de diviser la population totale par le nombre de kilomètres carrés sur lesquels elle est répartie, c'est-à-dire de diviser 1174346 par 34,24. On trouve pour quotient 34297,48, ou 34297 habitants, à moins d'une unité près; c'est la population spécifique demandée.

794. La population de Paris a augmenté en 1856 de 37768 — 29950 ou de 7815 habitants. Le rapport de cette augmentation à la population fixe est

$$\frac{7815}{1000000}, \text{ ou à peu près } \frac{1}{128}.$$

795. La population du département de la Seine en 1856 était la somme des nombres 1174346, 356034 et 197039, c'est-à-dire 1727419. La superficie totale de ce département est la somme des nombres $34^k,24$ et $441^k,26$, c'est-à-dire $475^k,50$. La population spécifique demandée est le quotient de 1727419 habitants par 475,50, c'est-à-dire 3633 habitants, à un habitant près.

796. On trouve pour la somme des populations des 86 départements 36039364 habitants, et pour leur superficie totale 530278,91 kilomètres carrés. Le quotient du premier nombre par le second exprimera la population spécifique demandée; on trouve 67,963, ou près de 68 habitants par kilomètre carré.

797. Pour obtenir les nombres demandés, il suffit de diviser par 86 la population totale et la superficie de la France. On trouve pour la population moyenne d'un département 419062 habitants, et pour la superficie moyenne 6166,03 kilomètres carrés.

DÉPARTEMENTS.	Popul. spéc.	DÉPARTEMENTS.	Popul. spéc.
1. Seine	3632,85	44. Ardennes	61,56
2. Rhône	224,34	45. Loire (Haute-)	60,66
3. Nord	213,41	46. Seine-et-Marne	59,51
4. Seine-Inférieure	127,53	47. Jura	59,41
5. Rhin (Bas-)	123,83	48. Saône (Haute-)	58,50
6. Rhin (Haut-)	121,59	49. Vendée	58,13
7. Pas-de-Calais	107,91	50. Vienne (Haute-)	57,97
8. Loire	106,16	51. Pyrénées (Basses-)	57.26
9. Manche	100,40	52. Lot	56,36
10. Bouches-du-Rhône	92,73	53. Dordogne	54,96
11. Somme	91,97	54. Doubs	54,88
12. Côtes-du-Nord	90,27	55. Sèvres (Deux-)	54,64
13. Finistère	90,25	56. Pyrénées (Hautes-)	54,28
14. Calvados	86,65	57. Corrèze	53,69
15. Seine-et-Oise	86,40	58. Indre-et-Loire	52,09
16. Ille-et-Vilaine	86,37	59 Var	51,46
17. Moselle	84,03	60. Ariége	51,35
18. Loire-Inférieure	80,88	61. Loiret	50,97
19. Garonne (Haute-)	76,51	62. Creuse	50,09
20. Vaucluse	75,82	63. Drôme	49,80
21. Aisne	75,56	64. Yonne	49,66
22. Sarthe	75,27	65. Eure-et-Loir	49,55
23. Puy-de-Dôme	74,22	66. Meuse	49,09
24. Maine-et-Loire	73,64	67. Gers	48,48
25. Mayenne	72,30	68. Allier	48,20
26. Gard	71,92	69. Nièvre	47,84
27. Orne	70,54	70. Vienne	46,28
28. Ardèche	69,81	71. Marne	45,48
29. Morbihan	69,72	72. Aveyron	45,05
30. Meurthe	69,68	73. Aude	44,80
31. Charente-Inférieure	69,56	74. Pyrénées-Orientales	44,41
32. Isère	69,56	75. Côte-d'Or	43,96
33. Eure	67,92	76. Cher	43,76
34. Oise	67,65	77. Aube	43,60
35. Saône-et-Loire	67,24	78. Cantal	43,14
36. Vosges	66,73	79. Loir-et-Cher	41,57
37. Gironde	65,78	80. Marne (Haute-)	41,24
38. Hérault	64,61	81. Indre	40,25
39. Ain	63,96	82. Landes	33,24
40. Charente	63,73	83. Corse	27,46
41. Lot-et-Garonne	63,51	84. Lozère	27,24
42. Tarn-et-Garonne	63,11	85. Alpes (Hautes-)	23,18
43. Tarn	61,79	86. Alpes (Basses)	21,52

798. En parcourant le tableau du n° **796** on trouve que le département qui approche le plus de la moyenne pour la population est le département du Gard, dont la population est de 419797 habitants; et que celui qui approche le plus de la moyenne pour la superficie est le département de la Somme qui a 6161,20 kilomètres carrés.

799. En divisant la population de chaque département par sa superficie en kilomètres carrés, on obtiendra la population spécifique de chacun; et, si on les range dans l'ordre des populations spécifiques, on formera le tableau ci-contre.

Le département qui se rapproche le plus de la moyenne de la France pour la population spécifique, est le département de l'Eure dont la population spécifique est 67,92.

800. C'est le rapport du nombre 3632,85 au nombre 67,963, c'est-à-dire 53,45....

801. Le premier rapport est celui du nombre 34297,48 au nombre 3632,85; c'est-à-dire... 9,44....

Le second rapport est celui du nombre 34297,48 au nombre 67,963; c'est-à-dire 504,64....

802. On a vu au n° **796** que la superficie du département des Basses-Alpes est de 6954,19 kilomètres carrés. Si sa population spécifique était celle de la France entière, ou $67^h,963$, sa population réelle serait le produit de $67^h,963$ par 6954,19, c'est-à-dire 472628, à un habitant près.

803. Dans le département du Nord, la population a augmenté de 9325 habitants; le chiffre de la population étant, d'après le n° **796**, de 1212353 habitants, le rapport demandé est

$$\frac{9325}{1212353}, \text{ ou à peu près } \frac{1}{130}.$$

Dans le département du Calvados, la population a diminué de 1750 habitants; le chiffre de la population étant de 478397 habitants, le rapport demandé est

$$\frac{1750}{478397}, \text{ ou à peu près } \frac{1}{273}.$$

804. D'après le tableau du n° **796**, la population du département de l'Orne est de 430127 habitants. L'excès des naissances sur les décès a donc été la 14832e partie de ce nombre, c'est-à-dire 29 habitants.

805. Le rapport demandé est

$$\frac{154385}{35783059}, \text{ ou à peu près } \frac{1}{232}.$$

806. En 1852, la population de la France était de

$$35783059 + 154385, \quad \text{ou} \quad 35937444 \text{ habitants.}$$

Si l'on divise ce nombre par 254,2, on aura l'accroissement en 1853 ; on trouve 141374. En 1853, la population s'était donc élevée à 35937444 + 141374, ou 36078818 habitants.

807. La somme des accroissements inscrits dans le tableau depuis 1817 jusqu'à 1851 est de 5473601 habitants. Or, en 1851, la population de la France était de 35783059 habitants (**805**); en 1816 elle était donc de 35783059 — 5473601, c'est-à-dire de 30309458 habitants.

Si aux 5473601 habitants, formant l'accroissement de la population de 1816 à 1851, on ajoute les accroissements de 1852 et et de 1853, et qu'on retranche de la somme le nombre qui exprime la diminution en 1854, on obtient pour résultat 5700039 habitants, pour l'augmentation totale. L'augmentation moyenne sera la trente-huitième partie de ce nombre, c'est-à-dire 150001 habitants.

En supposant ainsi l'accroissement annuel constant, la population moyenne s'obtiendra en ajoutant à la population de 1816, c'est-à-dire 30309458 habitants, la moitié de l'accroissement total de 1816 à 1854, c'est-à-dire la moitié de 5700039, ou 2850019, ce qui donne 33159477 habitants.

808. Dans cette hypothèse, les valeurs successives de la population seraient les termes d'une progression géométrique composée de 41 termes, dont le premier serait la population de 1816, ou 30309458, et le dernier celle de 1856, ou 36039364. On aurait donc, en désignant par q la raison de la progression,

$$36039364 = 30309458 . q^{40},$$

d'où

$$q = \sqrt[40]{\frac{36039364}{30309458}} = 1{,}004338.$$

Si la population est représentée par 1, l'accroissement annuel serait donc représenté par 0,004338, ou à peu près $\frac{1}{230}$.

809. Soit n le nombre d'années qu'il faudrait ajouter au millésime 1856 pour obtenir le millésime cherché. Désignons

par P la population de 1856. A l'époque cherchée, la population sera 2P; et formera le dernier terme d'une progression géométrique composée de $n+1$ termes, dont le premier est P; la raison sera $1+\frac{1}{230}$ ou $\frac{231}{230}$. On devra donc avoir

$$2P = P\left(\frac{231}{230}\right)^n,$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{\log 2}{\log 231 - \log 230} = \frac{0,30103000}{0,00188414},$$

ou $n = 159,7$, c'est-à-dire 160 ans, à une unité près.

Le millésime cherché serait donc $1856+160$, ou 2010.

310. En 1851, la population était la somme des nombres 4066300 et 259184, c'est-à-dire 4325484 habitants.

En appelant q la raison de la progression, on doit donc avoir

$$4325484 = 4066300 . q^{10},$$

d'où $$\log q = \frac{\log 4325484 - \log 4066300}{10} = 0,0026835...,$$

d'où $q = 1,006198....$ Le rapport de l'accroissement annuel à la population est donc 0,006198..., ou à peu près $\frac{1}{161}$.

311. Soit n le nombre d'années cherché, on devra avoir

$$4325484\left(1+\frac{1}{161}\right)^n = \frac{1}{7}.35783059\left(1+\frac{1}{230}\right)^n,$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{\log 35783059 - \log 4325484 - \log 7}{(\log 162 - \log 161) - (\log 231 - \log 230)},$$

ou $$n = \frac{7,5536774 - 6,6360348 - 0,8450980}{0,00268913 - 0,00188414},$$

ou encore $$n = \frac{0,0725446}{0,00080499} = 90 \text{ ans},$$

à une unité près. Le millésime de l'année cherchée est donc $1851+90$, ou 1941.

312. Désignons par r le rapport demandé, et par P la population des États-Unis à une époque donnée; on doit avoir, d'après l'énoncé,

$$P(1+r)^{25} = 2P,$$

d'où $$\log(1+r) = \frac{\log 2}{25} = \frac{0,3010300}{25} = 0,0120412,$$

et par suite $1 + r = 1{,}028113...,$

et $r = 0{,}028113...,$ ou environ $\frac{1}{35}$.

813. La population de la Belgique étant, d'après le n° **810**, de 4325484 habitants, autant de fois 118 sera contenu dans ce nombre, autant la superficie demandée contiendra de kilomètres carrés. En faisant la division, on trouve 36656 kilomètres carrés environ.

814. La population spécifique de la France étant 67,963, celle de l'Angleterre est $67{,}963 \times 1{,}1771$, ou, à très-peu près, 80. Sa population est donc $80^h \times 200000$, c'est-à-dire 16000000 d'habitants.

815. La population spécifique de la France étant 67,963, celle du globe entier est le quotient de ce nombre par 4,5309, c'est-à-dire, à très-peu près, 15. Pour avoir la population du globe, il faut donc multiplier 15 habitants par le nombre de kilomètres carrés contenus dans le quart de la surface terrestre.

Or, si R désigne le rayon du globe, la circonférence d'un de ses grands cercles est exprimée par $2\pi R$ (π étant le rapport de la circonférence au diamètre); mais cette circonférence est de 40000000 de mètres, ou de 40000 kilomètres; on a donc

$$2\pi R = 40000^k, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{20000^k}{\pi}.$$

Le quart de la surface du globe est exprimé par πR^2. Si on le désigne par S, on aura donc, en remplaçant R par sa valeur,

$$S = \pi \cdot \left(\frac{20000}{\pi}\right)^2 = \frac{400000000^{kc}}{\pi}.$$

La population demandée a donc pour expression

$$\frac{15^h.400000000}{\pi}, \quad \text{ou} \quad \frac{6000000000}{\pi}.$$

En faisant la division par logarithmes, on trouve 1909859000 habitants.

816. On a vu, au n° **805**, que la population de la France, en 1851, était de 35783059 habitants. A l'aide des accroissements indiqués n° **807**, il est facile d'en déduire les valeurs de la population pour chacune des 10 années considérées; et si l'on divise

le nombre des naissances par le chiffre de la population, on pourra former le tableau suivant :

Années.	Population.	Rapport des naissances à la population.
1845	35100704	0,028262...
1846	35252679	0,027897...
1847	35315234	0,026010...
1848	35419824	0,026785...
1849	35433282	0,028094...
1850	35620601	0,027034...
1851	35783059	0,027384...
1852	35937444	0,026854...
1853	36078815	0,025970...
1854	36009497	0,025644...

La somme des valeurs inscrites dans la troisième colonne est 0,269934.... La valeur moyenne demandée est le dixième de cette somme, c'est-à-dire 0,0269934..., ou, à peu près, $\frac{1}{37}$.

817. Il suffit de diviser le nombre de décès indiqué dans l'énoncé par la population obtenue au numéro qui précède ; on formera ainsi le tableau suivant :

Années.	Rapport des décès à la population.	Années.	Rapport des décès à la population.
1845.....	0,021501...	1850.....	0,021775...
1846.....	0,023586...	1851.....	0,022844...
1847.....	0,024239...	1852.....	0,022558...
1848.....	0,023833...	1853.....	0,022052...
1849.....	0,027714...	1854.....	0,027569...

La somme des valeurs inscrites dans la seconde colonne est 0,237671. La valeur moyenne demandée est le dixième de cette somme, c'est-à-dire 0,0237671, ou, à peu près, $\frac{1}{42}$.

818. D'après ce qu'on a vu aux deux numéros précédents, la population de la France s'accroît annuellement par les naissances d'environ $\frac{1}{37}$ de sa valeur ; mais elle diminue par les décès d'environ $\frac{1}{42}$. Elle s'accroît donc en définitive d'une fraction qui est la différence des deux précédentes, c'est-à-dire de $\frac{5}{1554}$, ou à peu près $\frac{1}{311}$.

Cette fraction est notablement moindre que celle qui a été déduite au n° 808 de l'hypothèse d'un accroissement en progression géométrique, dans la période comprise entre 1816 et 1856.

819. Pour cela, il faut opérer comme si l'on cherchait le plus grand commun diviseur entre les deux nombres donnés, et négliger le reste d'une des premières divisions. Le nombre 469082 est contenu 1 fois dans 497557, et il reste 28475. Ce reste est contenu 16 fois dans 469082, et il reste 3482. Si l'on néglige ce second reste, on voit que 469082 contient 16 fois 28475; par conséquent, 497557 le contient 17 fois. Les deux nombres donnés sont donc sensiblement dans le même rapport que 17 et 16.

Si, en effet, on calcule en décimales le rapport des deux nombres donnés, on trouve 1,0606...; et si l'on calcule de même le rapport de 17 à 16, on trouve 1,0625, quotient qui ne diffère du véritable que dans les millièmes.

820. On obtiendra les nombres cherchés en divisant 1000000 en deux parties proportionnelles aux naissances des deux sexes données au numéro précédent, ou, ce qui revient sensiblement au même, proportionnelles aux nombres 17 et 16.

En divisant 1000000 par $17+16$, ou 33, on obtient pour quotient 30303,03.... Le nombre des naissances masculines sera donc $30303,03 \times 17$, c'est-à-dire 515151,51, ou 515152; et le nombre des naissances féminines sera $30303,03 \times 16$, c'est-à-dire 484848,48, ou 484848.

821. Il faut opérer comme au n° **819.** Le nombre 405639 est contenu 1 fois dans 410998, et il reste 5359. Ce reste est contenu 75 fois dans 405639, et il reste 3714. Si l'on néglige ce second reste, on voit que 5359 est contenu 75 fois dans 405639; il est donc contenu 76 fois dans 410998. Ainsi les deux nombres donnés sont sensiblement entre eux dans le rapport des nombres 76 et 75.

Si, en effet, on divise 408640 par 403237, on trouve pour quotient 1,0132...; et si l'on divise 75 par 74, on obtient 1,0135.... Le second rapport ne diffère donc du premier que dans les dix-millièmes.

822. Il faut diviser 1000000 en deux parties proportionnelles aux nombres des décès des deux sexes donnés au numéro précédent, ou proportionnelles aux nombres 76 et 75.

En divisant 1000000 par $76+75$, ou 151, on obtient pour quotient 6622,516.... Le nombre des décès masculins sera donc $6622,516 \times 76$, c'est-à-dire 503311,216..., ou 503311. Le nombre des décès féminins sera $6622,516 \times 75$, c'est-à-dire 496688,700, ou simplement 496689.

823*. Désignons par p le nombre des habitants du sexe masculin à une époque donnée, et par p' le nombre des habitants du sexe féminin; soit $P = p + p'$ la population totale.

Le nombre des naissances annuelles (**816**) sera $P.\frac{1}{37}$; et le nombre des naissances masculines (**819**) sera $P.\frac{1}{37}.\frac{17}{33}$.

D'un autre côté, le nombre des décès annuels (**817**) sera $P.\frac{1}{42}$; et le nombre des décès masculins (**821**) sera $P.\frac{1}{42}.\frac{76}{151}$. La population masculine sera donc devenue

$$p + P\left(\frac{1}{37}.\frac{17}{33} - \frac{1}{42}.\frac{76}{151}\right).$$

Le nombre des naissances féminines sera $P.\frac{1}{37}.\frac{16}{33}$; le nombre des décès féminins sera $P.\frac{1}{42}.\frac{75}{151}$. La population féminine sera donc devenue

$$p' + P\left(\frac{1}{37}.\frac{16}{33} - \frac{1}{42}.\frac{75}{151}\right).$$

Mais, par hypothèse, le rapport des deux populations n'a pas changé, on doit donc avoir

$$\frac{p + P\left(\frac{1}{37}.\frac{17}{33} - \frac{1}{42}.\frac{76}{151}\right)}{p' + P\left(\frac{1}{37}.\frac{16}{33} - \frac{1}{42}.\frac{75}{151}\right)} = \frac{p}{p'},$$

d'où l'on conclut, en retranchant les deux fractions terme à terme, et divisant ensuite les deux termes du résultat par P,

$$\frac{\frac{1}{37}.\frac{17}{33} - \frac{1}{42}.\frac{76}{151}}{\frac{1}{37}.\frac{16}{34} - \frac{1}{42}.\frac{75}{151}} = \frac{p}{p'},$$

résultat auquel on aurait pu arriver directement.

Si l'on multiplie les deux termes par 37.33.42.151, on obtient

$$\frac{p}{p'} = \frac{42.151.17 - 37.33.76}{42.151.16 - 37.33.75} = \frac{15018}{9897}.$$

Ce rapport est sensiblement égal à $\frac{3}{2}$.

Il faudrait donc que le rapport des populations des deux sexes fût celui de 3 à 2 pour que ce rapport se maintînt.

824. On a vu au n° **796**, qu'en 1856, la population était de 36039364 habitants. Pour obtenir les populations partielles demandées, il faut diviser ce nombre en deux parties proportionnelles aux nombres 3 et 2.

Si l'on divise 36039364 par $3 + 2$ ou 5, on obtient pour quotient 7207872,8; la population masculine serait donc $7207872,8 \times 3$, c'est-à-dire 21623618,4, ou simplement 21623618 habitants; et la population féminine serait $7207872,8 \times 2$, c'est-à-dire 14415745,6, ou 14415746 habitants.

§ 2. Des tables de mortalité.

825. D'après la table de Deparcieux, sur 1286 enfants nés le même jour, 463 atteignent l'âge de 60 ans; on posera donc la proportion

$$1286 : 463 = 965080 : x,$$

d'où $x = 347459$, à une unité près.

826. On posera d'abord la proportion

$$965080 : 400000 = 1286 : x,$$

d'où $x = 533$, à une unité près.

On cherchera ensuite ce nombre de vivants dans la table de Deparcieux; on trouvera qu'il tombe entre les nombres 538 et 526 qui correspondent l'un à 54 ans et l'autre à 55. Les survivants dont il s'agit auraient donc de 54 à 55 ans.

827. D'après la table de Deparcieux, le nombre des vivants de 20 ans est de 814, et celui des vivants de 55 ans est 526; on posera donc la proportion

$$814 : 526 = 630000 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 407101,$$

à une unité près.

828. D'après la table de Deparcieux, le nombre des vivants de 21 ans est 806, et celui des vivants de 45 ans est 622. En appelant x le nombre d'individus cherché, on devra donc avoir

$$x : 441061 = 806 : 622, \quad \text{d'où} \quad x = 571536,$$

à une unité près.

829. D'après la table de Deparcieux, sur 1286 individus nés le même jour, 463 atteignent l'âge de 60 ans; pour savoir combien sur 1000 atteindraient ce même âge, il faut poser la proportion

$$1286 : 463 = 1000 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 360$$

à une unité près. La table dont il s'agit indique donc une mortalité plus prompte que celle de Deparcieux.

830. On peut poser, comme au numéro précédent,

$$1286 : 463 = 10000 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 3600.$$

La mortalité indiquée par la table de la ville de Carlisle est

donc plus lente que celle qui est indiquée par la table de Deparcieux.

831. D'après Duvillard (825), sur 1000000 d'individus nés le même jour, 551122 atteignent l'âge de 10 ans; pour savoir combien, sur 1286 individus, atteindraient ce même âge, il faut poser la proportion

$$1000000 : 551122 : = 1286 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 709,$$

à une unité près. La table de Deparcieux donne 879.

En opérant de la même manière, on trouvera que le nombre des vivants, rapporté à 1286 individus nés le même jour, aura, suivant les deux tables, les valeurs portées dans le tableau suivant :

Ages.	Vivants, d'après Duvillard.	Vivants, d'après Deparcieux.
10	709	879
20	646	814
30	564	734
40	475	657
50	382	581
60	275	463
70	151	310
80	45	118
90	5	11

On voit, par ce tableau, que la table de Duvillard indique une mortalité beaucoup plus rapide que celle de Deparcieux.

832. Les $\frac{3}{4}$ de 1286 sont 964, à une unité près; ce nombre tombe, dans la table de Deparcieux, entre ceux qui correspondent à 3 et 4 ans; c'est donc de 3 à 4 ans que le nombre des survivants serait réduit aux $\frac{3}{4}$.

Les $\frac{2}{3}$ de 1286 sont 857, à une unité près; ce nombre tombe, dans la table de Deparcieux, entre ceux qui répondent à 14 et à 15 ans, mais plus près du premier; c'est donc un peu après 14 ans que le nombre des survivants serait réduit aux $\frac{2}{3}$.

La moitié de 1286 est 643, qui tombe entre 41 et 42 ans.

Le tiers de 1286 est 429, à une unité près; ce nombre tombe entre 62 et 63 ans.

Enfin le quart de 1286 est 322, à une unité près; ce nombre tombe entre 69 et 70 ans.

833. A 20 ans, d'après Deparcieux, le nombre des survivants est de 814, dont la moitié est 407, le tiers, à une unité près, 271,

et le quart, aussi à une unité près, 203. Le premier de ces nombres tombe entre 63 et 64 ans, mais très-près de ce dernier âge; le nombre 271 correspond à 72 ans; le nombre 203 tombe entre 75 et 76 ans. C'est donc vers 64 ans que le nombre des survivants de 20 ans sera réduit à moitié, à 72 ans qu'il sera réduit au tiers, et entre 75 et 76 ans qu'il sera réduit au quart.

834. Au moment de la naissance, le nombre des vivants est supposé de 1286; la moitié de ce nombre est 643, qui correspond à 42 ans; la vie probable d'un enfant nouveau-né est donc 42—0 ou 42 ans.

A 10 ans, le nombre des vivants est 879, dont la moitié 439 tombe très-près de 62 ans; la vie probable pour un enfant de 10 ans est donc à peu près 62 — 10 ou 52 ans.

A 20 ans, on a vu que la vie probable est 44 ans.

A 30 ans, le nombre des vivants est 734, dont la moitié 367 tombe près de 67 ans; la vie probable pour une personne de 30 ans est donc 67 — 30 ou 37 ans.

A 40 ans, le nombre des vivants est 657, dont la moitié 328 tombe près de 69 ans; la vie probable d'une personne de 40 ans est donc 69 — 40 ou 29 ans.

A 50 ans, le nombre des vivants est 581, dont la moitié 290 tombe très-près de 71 ans; la vie probable à 50 ans est donc 71 — 50 ou 21 ans.

A 60 ans, le nombre des vivants est 463, dont la moitié 231 correspond à 74 ans; la vie probable à 60 ans est donc 74 — 60 ou 14 ans.

A 70 ans, le nombre des vivants est 310, dont la moitié 155 tombe très-près de 78 ans; la vie probable à 70 ans est donc 8 ans.

Enfin, à 80 ans, le nombre des vivants est 118, dont la moitié 59 correspond à 84 ans; la vie probable à 80 ans est donc 4 ans.

835*. L'âge demandé est celui pour lequel le nombre d'années qu'on peut espérer vivre encore est égal au nombre de celles que l'on a déjà vécu; en d'autres termes, c'est l'âge pour equel on a $y = x$.

En faisant cette hypothèse dans la formule, on obtient

$$x = 59 - \tfrac{3}{4}x, \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{4}{7}.59 = 33\tfrac{5}{7},$$

ou à très-peu près 34 ans.

En effet, à 34 ans, le nombre des survivants, d'après la table

de Deparcieux est 702, dont la moitié 351 tombe très-près de 347 qui répond à l'âge de 68 ans, ou 34×2.

836*. L'âge demandé est celui pour lequel le nombre d'années qu'on peut espérer vivre encore est la moitié du nombre de celles que l'on a déjà vécu, c'est-à-dire qu'ici on doit avoir $y = \frac{1}{2}x$.

En substituant dans la formule du numéro précédent, on obtient

$$\tfrac{1}{2}x = 59 - \tfrac{3}{4}x, \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{4}{5}.59 = 47\tfrac{1}{5},$$

ou à peu près 47 ans.

En effet, à 47 ans, le nombre des survivants est 607, dont la moitié $303\frac{1}{2}$ tombe entre les nombres 70 et 71. Or, si à 47 on ajoute la moitié de 47 ou $23\frac{1}{2}$, on obtient $70\frac{1}{2}$, qui tombe également entre 70 et 71.

837. A 40 ans, le nombre des vivants est..... 657
A 40 + 10, ou 50 ans..... 581
A 40 + 15, ou 55 ans..... 526
A 40 + 20, ou 60 ans..... 463
A 40 + 25, ou 65 ans..... 395

Les probabilités demandées ont donc pour expression :

$$\frac{581}{657}, \quad \frac{526}{657}, \quad \frac{463}{657}, \quad \frac{395}{657},$$

ou à peu près

$$\frac{7}{8}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{3}{5}.$$

838. A 20 ans, le nombre des vivants est..... 814
A 20 + 20 ou 40 ans..... 657

La première des probabilités demandées est donc

$$\frac{657}{814}, \quad \text{ou à peu près } \frac{4}{5}.$$

A 30 ans, le nombre des vivants est..... 734
A 30 + 20, ou 50 ans..... 581

La seconde probabilité demandée est donc

$$\frac{581}{734}, \quad \text{ou à peu près } \frac{4}{5}.$$

A 40 ans, le nombre des vivants est..... 657
A 40 + 20, ou 60 ans..... 463

La troisième probabilité demandée est donc

$$\frac{463}{657}, \text{ ou à peu près } \tfrac{5}{7}.$$

A 50 ans, le nombre des vivants est..... 581
A 50 + 20, ou 70 ans..... 310

La quatrième probabilité demandée est donc

$$\frac{310}{581}, \text{ ou à peu près } \tfrac{8}{15}.$$

A 60 ans, le nombre des vivants est..... 463
A 60 + 20, ou 80 ans..... 118

La dernière probabilité demandée est donc

$$\frac{118}{463}, \text{ ou à peu près } \tfrac{1}{4}.$$

339. A 31 ans, le nombre des vivants est..... 726
A 31 + 18 ou 49 ans..... 590

La probabilité que le premier associé vivra encore dans 18 ans est donc

$$\frac{599}{726}.$$

A 45 ans, le nombre des vivants est..... 622
A 45 + 18, ou 63 ans..... 423

La probabilité que le second associé vivra encore dans 18 ans, est donc

$$\frac{423}{622}.$$

D'après la règle énoncée, la probabilité que les deux associés seront encore vivants à cette époque, sera donc exprimée par

$$\frac{590}{726} \times \frac{423}{622}, \text{ ou } \frac{249570}{451572}, \text{ ou à peu près } \tfrac{5}{9}.$$

340. A 22 ans, le nombre des vivants est..... 798.
A 60 ans, c'est-à-dire 38 ans après..... 463.

La probabilité que la femme atteindra 60 ans, est donc

$$\frac{463}{798}.$$

A 33 ans, le nombre des vivants est..... 710.
A 33 + 38, ou 71 ans..... 291.

La probabilité que le mari vivra encore à l'époque considérée, est donc

$$\frac{291}{710}.$$

La probabilité que les deux époux seront vivants est donc exprimée par

$$\frac{463}{798} \times \frac{291}{710}, \quad \text{ou} \quad \frac{134733}{566580}, \quad \text{ou, à très-peu près,} \quad \tfrac{5}{21}.$$

841. La probabilité que le premier associé meure avant le terme indiqué, sera

$$1 - \frac{590}{726}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{136}{726}.$$

La probabilité que le second associé meure avant cette même époque, sera

$$1 - \frac{423}{622}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{199}{622}.$$

La probabilité que les deux associés meurent avant le terme de l'entreprise, sera donc exprimée par

$$\frac{136}{726} \times \frac{199}{622}, \quad \text{ou} \quad \frac{27064}{451572}, \quad \text{ou, à peu près,} \quad \tfrac{3}{5}.$$

842. 1° La probabilité que la femme meure avant 60 ans, est

$$1 - \frac{463}{798}, \quad \text{ou} \quad \frac{335}{798}.$$

La probabilité que le mari vive jusqu'à 71 ans, est d'ailleurs exprimée par

$$\frac{291}{710}.$$

La probabilité que ces deux événements coïncident, est donc

$$\frac{335}{793} \times \frac{291}{710}, \quad \text{ou} \quad \frac{97485}{566580}, \quad \text{ou, à peu près,} \quad \tfrac{4}{23}.$$

2° La probabilité que la femme vive jusqu'à 60 ans, est

$$\frac{463}{798}.$$

La probabilité que le mari meure avant 71 ans, sera exprimée par

$$1 - \frac{291}{710}, \quad \text{ou} \quad \frac{419}{710}.$$

La probabilité que ces deux événements coïncident, est donc

$$\frac{463}{798} \times \frac{419}{710}, \quad \text{ou} \quad \frac{193997}{566580}, \quad \text{ou, à peu près,} \quad \tfrac{1}{3}.$$

3° La probabilité que la femme meure avant 60 ans, est

$$\frac{335}{798}.$$

La probabilité que le mari meure avant 71 ans, est

$$\frac{419}{710}.$$

La probabilité que les deux époux meurent avant le terme fixé, est donc

$$\frac{335}{798} \times \frac{419}{710}, \quad \text{ou} \quad \frac{140365}{566580}, \quad \text{ou, à peu près,} \quad \tfrac{1}{4}.$$

843. Puisque les décès, pour les individus de chaque âge, sont rapportés au milieu de l'année, il y aura :

11 — 7, ou 4 individus	ayant vécu	$\frac{1}{2}$ année,	
7 — 4, ou 3	—	—	$1\frac{1}{2}$ —
4 — 2, ou 2	—	—	$2\frac{1}{2}$ années,
2 — 1, ou 1	—	—	$3\frac{1}{2}$ —
1 — 0, ou 1	—	—	$4\frac{1}{2}$ —

On aura donc à faire la somme des produits suivants :

$$(11-7).\tfrac{1}{2}+(7-4).\tfrac{3}{2}+(4-2)\tfrac{5}{2}+(2-1)\tfrac{7}{1}+(1-0)\tfrac{9}{2},$$

ce qu'on peut écrire :

$$11.\tfrac{1}{2}+7\left(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\right)+4\left(\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}\right)+2\left(\tfrac{7}{2}-\tfrac{5}{2}\right)+1\left(\tfrac{9}{2}-\tfrac{7}{2}\right),$$

ou

$$11.\tfrac{1}{2}+7+4+2+1,$$

c'est-à-dire que, pour obtenir la quantité d'existence demandée, il faut faire la somme des nombres de survivants à partir de 91 ans, et y ajouter la moitié des survivants de 90 ans ; ce qui donne $19\frac{1}{2}$.

844. En raisonnant comme au numéro précédent, on verra de même que la quantité demandée s'obtiendra en additionnant les nombres de survivants, à partir de 61 ans, et en ajoutant à la somme la moitié des survivants de 60 ans. On trouvera pour la première somme 6366, et en y ajoutant la moitié de 463 ou $231\frac{1}{2}$, on obtiendra pour la quantité cherchée $6597\frac{1}{2}$.

845. 1° Pour obtenir le premier nombre demandé, on n'aurait qu'à diviser $19\frac{1}{2}$ par 11, ce qui donne 1,77, ou environ 1 an et 9 mois. Mais le nombre $19\frac{1}{2}$ n'est autre chose que la somme

$$11.\tfrac{1}{2}+7+4+2+1.$$

En le divisant par 11, on obtiendra donc

$$\tfrac{1}{2}+\frac{7+4+2+1}{11},$$

ce qui montre que la vie moyenne peut s'obtenir en faisant la somme des survivants à partir de l'âge qui suit immédiatement l'âge donné, en divisant cette somme par le nombre des survivants de l'âge donné, et en ajoutant $\frac{1}{2}$ au quotient.

2° En opérant d'après la règle qui vient d'être donnée, on obtiendra d'abord pour la somme des survivants à partir de 61 ans, 6366; divisant par le nombre des survivants de 60 ans, c'est-à-dire par 463, on obtient pour quotient 13,75; ajoutant $\frac{1}{2}$, ou 0,50, on trouve 14,25, ou 14 ans 3 mois pour la vie moyenne d'une personne de 60 ans.

846. 1° La somme des survivants à partir de 1 an est 50181; divisant par 1286, on obtient 39,02; et en ajoutant $\frac{1}{2}$, ou 0,50, on trouve 39,52, ou 39 ans 6 mois environ.

2° La somme des survivants à partir de 5 ans est 46187; divisant par 947, nombre des vivants de 4 ans, on obtient 48,77; et ajoutant 0,50, on trouve 49,27, ou un peu plus de 49 ans 3 mois.

3° La somme des survivants à partir de 22 ans est 31526; divisant par 806, nombre des vivants de 21 ans, on obtient pour quotient 39,114, et en ajoutant 0,50, on trouve 39,614, ou un peu plus de 39 ans 7 mois.

847*. La formule du n° 835 peut s'écrire

$$y = 59 - 0{,}75\,x.$$

Si l'on égale son second membre à celui de l'équation

$$y = 53{,}30 - 0{,}65\,x,$$

on obtient $\qquad 53{,}30 - 0{,}65\,x = 59 - 0{,}75\,x,$

d'où $\qquad 0{,}10\,x = 5{,}7 \quad \text{et} \quad x = 57.$

C'est donc à 57 ans que la vie moyenne est égale à la vie probable.

Leur valeur commune est $59 - 0{,}75.57$, c'est-à-dire 16,25, ou un peu plus de 16 ans.

848*. 1° On doit avoir

$$59 - 0{,}75\,x = 53{,}30 - 0{,}65\,x + 5,$$

d'où l'on tire $x = 7$.

2° On doit avoir

$$59 - 0.75\,x = 53{,}30 - 0{,}65\,x + 4,$$

d'où l'on tire $x = 17$ ans.

3° On doit avoir

$$59 - 0{,}75\,x = 53{,}30 - 0{,}65\,x + 3,$$

d'où l'on tire $x = 27$ ans.

4° On doit avoir

$$59 - 0{,}75\,x = 53{,}30 - 0{,}65\,x + 2,$$

d'où l'on tire $x = 37$ ans.

5° On doit avoir

$$59 - 0{,}75\,x = 53{,}30 - 0{,}65\,x + 1,$$

d'où l'on tire $x = 47$ ans.

849*. On doit avoir

$$53{,}30 - 0{,}65\,x = \tfrac{11}{12}(59 - 0{,}75\,x),$$

d'où l'on tire

$x = 20{,}88$, ou, à peu près, 20 ans et 10 mois.

850. Si l'on désigne par n le nombre des naissances, et par v_1, v_2, v_3, etc..., v_{94}, v_{95} les nombres de survivants des différents âges, les nombres d'individus de 0 à 1 an, de 1 an à 2 ans, de 2 ans à 3 ans, etc., de 94 ans à 95 ans, seront exprimés par

$$\tfrac{1}{2}(n + v_1),\ \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2),\ \tfrac{1}{2}(v_2 + v_3), \ldots,\ \tfrac{1}{2}(v_{94} + v_{95}),$$

ou par

$$\tfrac{1}{2}n + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{94} + \tfrac{1}{2}v_{95}.$$

Mais v_{95} est nul dans la table ; la population totale a donc pour expression

$$\tfrac{1}{2}n + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{94}.$$

La somme de tous les termes à partir du second est. . 50181
en y ajoutant la moitié de 1286, ou 643
on obtient pour la population demandée. 50824

851. Dans l'hypothèse de la table de Deparcieux, c'est-à-dire dans l'hypothèse d'une population stationnaire et de 1286 naissances annuelles, le nombre des individus de 20 à 21 ans est, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, la moyenne arithmétique entre le nombre des survivants de 20 ans et le nombre des survivants de 21 ans, c'est-à-dire la moyenne arithmétique en 814 et 806, c'est-à-dire 810. La population totale a d'ailleurs été trouvée ci-dessus égale à 50824. En nommant x le nombre des individus de 20 à 21 ans en France en 1851, on aura donc la proportion

$$50824 : 810 = 36039364 : x,$$

d'où l'on tire $x = 574352$.

852. Si de 574352 on retranche 305500, il reste 268850 pour le nombre des personnes du sexe féminin, âgées de 20 à 21 ans. Le rapport demandé est donc

$$\frac{305500}{268850}, \quad \text{ou à peu près } \tfrac{8}{7}.$$

853. Dans l'hypothèse de 1286 naissances annuelles, le nombre des individus âgés de 54 à 55 ans est la moyenne arithmétique entre les nombres des survivants de 54 ans et de 55 ans, c'est-à-dire la moyenne arithmétique entre 538 et 526, ou bien 532. En nommant x le nombre des individus âgés de 54 à 55 ans 1856, on devra donc avoir

$$50824 : 532 = 36039364 : x,$$

d'où l'on tire $x = 377242$, à une unité près.

854. Pour obtenir d'abord le nombre demandé, dans l'hypothèse de 1286 naissances annuelles, il faut de la population totale correspondante à ce nombre de naissances, c'est-à-dire de 50824, retrancher le nombre des individus de 0 à 1 an, celui des individus de 1 an à 2 ans, et ainsi de suite jusqu'au nombre des individus de 20 à 21 ans.

Or, il est facile de voir que la somme de ces nombres se compose de la somme des nombres de survivants de 1 à 20 ans inclusivement, augmentée de la moitié des naissances et de la moitié

des survivants de 21 ans. La somme des nombres de survivants de 1 à 20 ans est. 17849
la moyenne des nombres 1286 et 806 qui répondent à la naissance et à 21 ans, est 1046
Le nombre des individus de 0 à 20 ans est donc. 18895
En retranchant ce nombre de 50824, on obtient. 31929

Si maintenant on désigne par x le nombre des individus âgés de 20 ans et plus en 1856, on devra avoir la proportion

$$50824 : 31929 = 36039364 : x,$$

d'où l'on tire $x = 22640895$.

855. Pour obtenir d'abord la population totale de 20 à 55 ans, correspondante à 1286 naissances annuelles, il faut faire la somme des moyennes successives entre les nombres de survivants de 20 et 21 ans, de 21 et 22 ans, de 22 et 23 ans, et ainsi de suite jusqu'à la moyenne des survivants de 54 à 55 ans. Or, cette somme se compose évidemment de la somme des nombres de survivants de 21 à 54 ans inclusivement, augmentée de la moitié du nombre des survivants de 20 ans et de la moitié du nombre des survivants de 55 ans.

La somme des nombres de survivants de 21 ans à 54 ans est. 22996
la moyenne des nombres 814 et 526, qui expriment le nombre de survivants à 20 ans et à 55 ans, est. 670
Le nombre des individus de 20 à 55 ans est donc. 23666

Si maintenant on désigne par x le nombre correspondant pour la population de 1856, on devra avoir

$$50824 : 23666 = 36039364 : x,$$

d'où l'on tire $x = 16781591$.

Il ne reste plus qu'à prendre la moitié de ce nombre, puisqu'on suppose que les individus des deux sexes sont en même nombre; on obtient ainsi : 8390795.

856. On a vu au n° **854** que, sur une population totale de 50824 habitants, la population majeure était de 31929 individus.

Si l'on désigne par x le nombre qui exprime la population majeure de la ville de Paris en 1856, on devra donc avoir

$$50824 : 31929 = 1130488 : x,$$

d'où l'on tire $x = 710203$, à une unité près.

857. On a vu au n° **855** que, sur une population totale de 50824 habitants, il y avait 23666 habitants de 20 à 55 ans; et, si l'on suppose que les deux sexes soient en nombre égal, il y a 11833 hommes en état de porter les armes. Si donc on désigne par x le nombre demandé, on devra avoir

$$50824 : 11833 = 255960 : x,$$

d'où l'on tire $$x = 59593.$$

858. On a vu au n° **852**, que sur une population totale de 36039364 habitants, il y avait en 305500 jeunes gens inscrits sur les listes du recrutement; en nommant x la population demandée, on doit donc avoir

$$305500 : 36039364 = 247 : x,$$

d'où l'on tire $x = 29138$ habitants.

§ 3. Des rentes viagères.

859. On a ici $a = 1200^f$, $r = 0{,}045$; et, d'après la table de Deparcieux :

$$v_{90} = 11,\ v_{91} = 7,\ v_{92} = 4,\ v_{93} = 2,\ v_{94} = 1,\ v_{95} = 0.$$

La quantité désignée par S_n aura donc ici pour valeur

$$S_{90} = \frac{7}{1{,}045} + \frac{4}{(1{,}045)^2} + \frac{2}{(1{,}045)^3} + \frac{1}{(1{,}045)^4},$$

ou, en effectuant par logarithmes le calcul de chaque terme,

$$S_{90} = 6{,}69856 + 3{,}66292 + 1{,}75259 + 0{,}83856,$$

ou $$S_{90} = 12{,}95263.$$

On aura par conséquent

$$C = \frac{1200^f}{11} \times 12{,}95263 = 1413^f{,}01.$$

860. Pour faire ces calculs commodément, il faut d'abord remarquer que S_{n-1} peut se déduire de S_n. On a en effet

$$S_n = \frac{v_{n+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3}}{(1+r)^3} \cdots + \frac{v_{n+k}}{(1+r)^k}$$

et $$S_{n-1} = \frac{v_n}{(1+r)} + \frac{v_{n+1}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^3} \cdots + \frac{v_{n+k}}{(1+r)^{k+1}}.$$

Si l'on divise par $1 + r$ les deux membres de la première égalité, et qu'on la retranche membre à membre de la seconde, on obtiendra

$$S_{n-1} - \frac{S_n}{(1+r)} = \frac{v_n}{(1+r)}, \quad \text{d'où} \quad S_{n-1} = \frac{S_n + v_n}{(1+r)},$$

c'est-à-dire que, connaissant la somme S_n relative à un certain âge n, on aura la somme S_{n-1} relative à un âge inférieur d'une année, en ajoutant à la première somme le nombre des vivants pour cet âge n, et divisant la somme par 1 plus l'intérêt annuel d'un franc.

Or, on a trouvé au numéro précédent

$$S_{90} = 12{,}95263\,;$$

avec cette valeur, on obtiendra, en remarquant que le nombre des vivants de 89 ans est 11,

$$S_{89} = \frac{12{,}95263 + 11}{1{,}045} = 22{,}92118,$$

et, en remontant ainsi de proche en proche, on pourra former le tableau suivant :

Ages.	Valeurs de S.	Ages.	Valeurs de S.	Ages.	Valeurs de S.
90.....	12,95263	66.....	2831,403	42.....	8904,784
89.....	22,92118	65.....	3073,113	41.....	9136,638
88.....	37,24514	64.....	3318,768	40.....	9365,204
87.....	56,69391	63.....	3567,242	39.....	9590,624
86.....	82,00376	62.....	3818,415	38.....	9813,035
85.....	114,8361	61.....	4072,167	37.....	10032,57
84.....	155,8240	60.....	4327,434	36.....	10249,35
83.....	205,5732	59.....	4584,147	35.....	10464,45
82.....	264,6634	58.....	4842,246	34.....	10677,95
81.....	334,6062	57.....	5101,671	33.....	10889,90
80.....	416,8481	56.....	5362,365	32.....	11100,38
79.....	511,8165	55.....	5623,315	31.....	11309,45
78.....	619.9201	54.....	5884,513	30.....	11517,17
77.....	740,5935	53.....	6145,946	29.....	11723,60
76.....	874,2520	52.....	6406,647	28.....	11928,80
75.....	1020,337	51.....	6666,648	27.....	12132,82
74.....	1178,313	50.....	6925,980	26.....	12335,71
73.....	1348,625	49.....	7183,712	25.....	12537,52
72.....	1530,742	48.....	7438,960	24.....	12738,30
71.....	1724,155	47.....	7691,829	23.....	12938,09
70.....	1928,378	46.....	7941,464	22.....	13136,93
69.....	2141,989	45.....	8188,006	21.....	13334,85
68.....	2364,583	44.....	8430,628		
67.....	2594,816	43.....	8669,500		

Puis, en divisant ces valeurs de S_n par les valeurs correspondantes de v_n fournies par la table de Deparcieux, on obtiendra les nombres demandés, contenus dans le tableau suivant :

Ages.	Valeurs de A_n.	Ages.	Valeurs de A_n.	Ages.	Valeurs de A_n.
21	16,544	45	13,164	69	6,511
22	16,462	46	12,913	70	6,221
23	16,377	47	12,672	71	5,925
24	16,289	48	12,419	72	5,648
25	16,198	49	12,176	73	5,373
26	16,104	50	11,921	74	5,101
27	16,006	51	11,675	75	4,836
28	15,905	52	11,440	76	4,553
29	15,800	53	11,195	77	4,281
30	15,691	54	10,938	78	4,025
31	15,578	55	10,691	79	3,763
32	15,460	56	10,433	80	3,533
33	15,338	57	10,163	81	3,313
34	15,211	58	9.902	82	3,114
35	15,078	59	9,631	83	2,895
36	14,941	60	9,346	84	2,641
37	14,797	61	9,049	85	2,392
38	14,624	62	8,738	86	2,158
39	14 444	63	8,433	87	1,955
40	14,254	64	8,114	88	1,693
41	14,056	65	7,780	89	1,433
42	13,849	66	7,451	90	1,178
43	13,631	67	7,129		
44	13,403	68	6,814		

861. La table du numéro précédent donne

$$A_{30} = 15,691.$$

Le capital cherché a donc pour valeur

$6000^f \times 15,691$ ou	$94146^f,00$
et, en y ajoutant 5 pour 100, soit	4707 ,30
on obtient pour la somme demandée. .	$98853^f,30$

862. Afin de tenir compte du droit de 5 pour 100 à payer pour frais de gestion, il faut considérer les 35000 fr. comme un capital augmenté des 5 pour 100, ou du vingtième ; on aura donc le capital représentatif de la rente en prenant les $\frac{20}{21}$ de 35000 fr., ce qui donne $33333^f,33$.

Or, la table du n° **860** donne

$$A_{47} = 12,672.$$

En appelant a la rente demandée, on doit donc avoir

$$33333^f,33 = a \times 12,672,$$

d'où l'on tire $$a = \frac{33333^f,33}{12,672} = 2630^f,47.$$

863. Les intérêts étant à $4\frac{1}{2}$ pour 100 dans le placement ordinaire, il faut qu'ils soient à 9 pour 100 dans le placement en viager; c'est-à-dire qu'en appelant C le capital et a la rente, on doit avoir

$$a : C = 9 : 100, \quad \text{ou} \quad a = 0,09.C.$$

Par suite l'équation

$$C = \frac{a}{v_n} S_n,$$

établie au n° **859**, devient

$$C = \frac{0,09.C}{v_n}.S_n, \quad \text{d'où} \quad \frac{S_n}{v_n} \quad \text{ou} \quad A_n = \frac{1}{0,09} = 11,111....$$

Pour trouver l'âge demandé, il faut donc chercher, dans la table du n° **860**, l'âge n pour lequel la quantité A_n est égale à 11,111....

On trouve que le nombre 11,111 tombe entre les nombres 11,195 et 10,938 qui correspondent à 53 ans et à 54 ans. C'est donc entre ces deux âges que l'on peut doubler son revenu en plaçant son capital en viager.

864. Il faut d'abord, du cours de la rente 3 pour 100, soit. 66f,30
retrancher $\frac{1}{8}$ pour 100 de courtage, soit 0,125
le reste exprime le prix net de 3 fr. de rentes; on trouve 66f,175

Or, 3 fr. sont contenus 950 fois dans 2850 fr.; le prix des rentes considérées sera donc 950 fois 66f,175, c'est-à-dire 62966f,25.

Pour tenir compte du droit de 5 pour 100 à payer en plaçant ce capital en rentes viagères, il faut, comme on l'a vu au n° **862**, prendre les $\frac{20}{21}$ de ce capital, ce qui donne 59967f,85.

Or, la table du n° **860** donne

$$A_{40} = 14,254.$$

En appelant a la rente viagère cherchée, on doit donc avoir

$$59967^f,85 = a \times 14,254, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{59967^f,85}{14,254},$$

ou $$a = 4207^f,07.$$

865. La table du n° 860 donne

$$A_{50} = 9,651.$$

En nommant donc C le capital représentatif de la rente viagère, on aura $C = 2400^f \times 9,631$ . . . . . $= 23114^f,40$

En y ajoutant 5 pour 100, ou . . . . . 1155 ,72

on obtient un total de. . . . . $24270^f,12$

qu'il s'agit d'obtenir en vendant une certaine quantité de rentes 3 pour 100.

Le cours étant à 65,40, il faut d'abord en retrancher $\frac{1}{8}$ pour 100 ou 0,125 pour le courtage, ce qui donne 65,275. Autant de fois ce nombre sera contenu dans $24270^f,12$, autant il faudra vendre de fois 3 fr. de rentes. En faisant la division, et prenant le quotient à une unité près, par excès, on trouve 372. Il faudra donc vendre 372 fois 3 fr., ou 1116 fr. de rentes 3 pour 100.

866. D'après la formule

$$C = \frac{a}{v_n}.S_n \quad \text{ou} \quad C = a.\frac{S_n}{v_n},$$

il n'y a qu'à multiplier par 100 fr. les valeurs du quotient $\frac{S_n}{v_n}$ pour les âges considérés. Ces quotients désignés par A_n sont immédiatement donnés dans la table jointe à l'énoncé et dans celle du n° 860. Les résultats de ces calculs sont réunis dans le tableau ci-dessous :

Ages.	Valeurs de C, d'après Hubbard.	Valeurs de C, d'après Deparcieux.
30 ans	$1619^f,60$	$1569^f,10$
40 —	1460 ,80	1425 ,40
50 —	1238 ,20	1192 ,10
60 —	939 ,30	934 ,60
70 —	618 ,70	622 ,10
80 —	353 ,30	353 ,30
90 —	117 ,80	117 ,80.

On voit que les résultats s'accordent au delà de 60 ans ; mais que pour un âge moins avancé, le prix d'une rente viagère de 100 fr. est plus cher d'après la table de Hubbard que d'après la table de Deparcieux.

867. La formule $C = a.\frac{S_n}{v_n}$ ou $C = a.A_n$

donne $$a = \frac{C}{A_n},$$

et, dans le cas actuel,

$$a = \frac{100^f}{A_n}.$$

En se servant des valeurs de A_n fournies par les deux tables (**860**, **866**), on formera aisément le tableau qui suit :

Ages.	Valeurs de a, d'après Hubbard.	Valeurs de a, d'après Deparcieux.
30 ans	$6^f,17$	$6^f,37$
40 —	6 ,84	7 ,01
50 —	8 ,07	8 ,38
60 —	10 ,64	10 ,69
70 —	16 ,16	16 ,07
80 —	28 ,30	28 ,30
90 —	84 ,88	84 ,88

Les résultats s'accordent sensiblement au delà de 70 ans; mais pour un âge moins avancé, la rente calculée d'après la table de Deparcieux est plus élevée que celle qui est calculée d'après la table de Hubbard.

868. Les placements ont lieu pendant 30 ans; le capital définitif produit par une annuité de 120 fr. pendant cet espace de temps, au taux de $4\frac{1}{2}$ pour 100, est exprimé par

$$\frac{120^f[(1,045)^{30} - 1]}{0,045}, \quad \text{ou} \quad 7320^f,85.$$

A 55 ans, le quotient de S_n par v_n est, suivant la table de Hubbard, 11,075. En divisant le capital ci-dessus obtenu par 11,075, on obtiendra la rente cherchée; on trouve ainsi $661^f,02$,

869. La table du n° **860** donne

$$A_{60} = 9,346.$$

Le capital représentant à cet âge une rente viagère de 3000 fr. est donc

$$C = 3000^f \times 9,346 = 28038 \text{ fr.}$$

Pour produire ce capital en 20 années, au taux de $4\frac{1}{2}$ pour 100, il faut payer une annuité exprimée par

$$\frac{28038^f \times 0,045}{(1,045)^{20} - 1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 893^f,74.$$

870. Le capital dont l'employé pourra disposer à 60 ans sera la somme de 4 capitaux partiels, savoir :

Le premier, résultant d'une annuité de 200 fr. pendant 35 ans;

le second, d'une annuité de 100 fr. pendant 28 ans; le troisième, d'une annuité de 150 fr. pendant 21 ans, et le quatrième, d'une annuité de 190 fr. pendant 13 ans. Or, leurs valeurs sont respectivement :

Pour le premier :

$$\frac{200^f.[(1,045)^{35}-1]}{0,045}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16299^f,33$$

Pour le deuxième :

$$\frac{100^f.[(1,045)^{28}-1]}{0,045}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5399^f,34$$

Pour le troisième :

$$\frac{150^f[(1,045)^{21}-1]}{0,045}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5067^f,47$$

Pour le quatrième :

$$\frac{190^f[(1,045)^{13}-1]}{0,045}, \text{ ou} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3260^f,38$$

Total. . . $30026^f,52$

Pour tenir compte du droit de 5 pour 100, il faut prendre les $\frac{20}{21}$ de cette somme, ce qui donne . . . . . $28596^f,68$.

Or, à 60 ans, la table de Hubbard donne $A_n = 9,393$; en appelant a la rente cherchée, on a donc

$$a = \frac{28596^f,68}{9,393}, \quad \text{ou} \quad a = 3044^f,46.$$

871. On a, dans l'exemple actuel, $a = 1800^f$, $r = 0,045$, $t = 15$; le tableau du n° **860** donne $S_{60} = 4327,434$; et la table de Deparcieux donne v_{n-t} ou $v_{45} = 622$. On aura donc

$$C = \frac{1800^f}{(1,045)_{15}} \cdot \frac{4327,434}{622}.$$

En opérant par logarithmes, on trouvera

$$C = 6470^f,95.$$

872. On remarquera d'abord que la formule du n° **871** peut s'écrire

$$C = \frac{a}{(1+r)^t} \cdot \frac{S_n}{v_n} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} = \frac{a}{(1+r)^t} \cdot A_n \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}}.$$

On tire de là

$$a = C \cdot \frac{(1+r)^t}{A_n} \cdot \frac{v_{n-t}}{v_n}.$$

Dans l'exemple donné, on a $C = 50000^f$, $r = 0,045$, $t = 18$; et la table de Hubbard donne $A_n = 11,075$, v_{n-t} ou $v_{37} \times 8731$, et v_n ou $v_{55} = 6991$. On aura donc

$$a = 50000^f \cdot \frac{(1,045)^{18}}{11,075} \cdot \frac{8731}{6991}.$$

En opérant par logarithmes, on trouve $a = 12452^f,15$.

873. D'après la remarque qui termine l'énoncé, il faut chercher d'abord le capital qui représente une rente viagère immédiate de 2400 fr. pour une personne de 28 ans, et en retrancher le capital qui représente une rente viagère de 2400 fr., différée jusqu'à 50 ans.

D'après la table de Deparcieux, le nombre des vivants de 28 ans est 750, et le nombre des vivants de 50 ans est 581. D'après le tableau du n° **860**, on a

$$S_{28} = 11928,80 \quad \text{et} \quad S_{50} = 6925,980.$$

Le capital qui représente une rente viagère immédiate de 2400 fr., est donc (**859**)

$$C = 2400^f \cdot \frac{11928,80}{750} = 38172^f,16.$$

Le capital qui représente la même rente différée jusqu'à 50 ans est (**871**)

$$A' = \frac{2400^f}{(1,045)^{22}} \cdot \frac{6925,980}{750} = 8415^f,50.$$

Le capital demandé est la différence de ces deux résultats, c'est-à-dire

$$29756^f,66.$$

874. Le capital nécessaire pour constituer une rente viagère immédiate a serait (**859**)

$$a \cdot \frac{S_{39}}{v_{39}}.$$

Le capital nécessaire pour constituer une rente viagère a, différée jusqu'à 55 ans, c'est-à-dire pendant 16 ans, serait (**871**)

$$\frac{a}{(1,045)^{16}} \cdot \frac{S_{55}}{v_{39}}.$$

Le capital dont il faut disposer pour constituer la rente temporaire est donc (873)

$$a \cdot \frac{S_{39}}{v_{39}} - \frac{a}{(1,045)^{16}} \cdot \frac{S_{55}}{v_{39}},$$

ou
$$a\left[\frac{S_{39}}{v_{39}} - \frac{1}{(1,045)^{16}} \cdot \frac{S_{55}}{v_{39}}\right],$$

ou bien
$$a\left[\frac{S_{39}}{v_{39}} - \frac{1}{(1,045)^{16}} \cdot \frac{S_{55}}{v_{55}} \cdot \frac{v_{55}}{v_{39}}\right].$$

Or, d'après la table de Hubbard, on a

$$\frac{S_{39}}{v_{39}} \text{ ou } A_{39} = 14,830; \quad \frac{S_{55}}{v_{55}} \text{ ou } A_{55} = 11,075; \quad \frac{v_{55}}{v_{39}} = \frac{6991}{8591}.$$

Le capital dont il s'agit a donc pour expression

$$a\left[14,830 - \frac{1}{(1,045)^{16}} \cdot 11,075 \cdot \frac{6991}{8591}\right],$$

ou, en effectuant les calculs,

$$a \times 10,374.$$

Or, ce capital doit être égal à 25000 fr.; on doit donc avoir

$$a \times 10,374 = 25000^{f}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{25000^{f}}{10,374},$$

ou
$$a = 2409^{f},87.$$

875. Cherchons d'abord le capital qui représente, pour une personne de 34 ans, une rente de 3600 fr. différée jusqu'à 60 ans.

D'après ce qui a été dit au n° **871**, ce capital aura pour expression

$$C = \frac{3600^{f}}{(1,045)^{26}} \cdot \frac{S_{60}}{v_{34}} = \frac{3600^{f}}{(1,045)^{26}} \cdot \frac{4327,434}{702},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$C = 7065^{f},97.$$

Cherchons maintenant le capital qui représenterait une rente temporaire a, payée depuis 34 ans jusqu'à 60. D'après ce qui a été dit au n° **874**, ce capital sera exprimé par

$$a\left[\frac{S_{34}}{v_{34}} - \frac{1}{(1,045)^{26}} \cdot \frac{S_{60}}{v_{34}}\right],$$

ou bien $$a\left[\frac{10677,95}{702}-\frac{1}{(1,045)^{26}}\cdot\frac{4327,434}{702}\right],$$

ou, en effectuant les calculs indiqués,

$$a\times 13,2479.$$

Comme la première annuité doit être payée au commencement de la première année, tandis que la rente temporaire ne le serait qu'à la fin, le second capital que nous venons d'obtenir, savoir $a\times 13,2479$, est inférieur au premier, ou $7065^f,97$, précisément de la valeur d'une annuité a; on doit donc avoir

$$a\times 13,2479+a=7065^f,97,$$

d'où

$$a=\frac{7065^f,97}{14,2479}=495^f,93.$$

876. Le capital nécessaire pour constituer une rente viagère a, différée de 25 à 55 ans, a pour expression (**871**)

$$C=\frac{a}{(1,045)^{30}}\cdot\frac{S_{55}}{v_{25}}=\frac{a}{(1,045)^{30}}\cdot\frac{S_{55}}{v_{55}}\cdot\frac{v_{55}}{v_{25}},$$

ou, d'après la table de Hubbard,

$$C=\frac{a}{(1,045)^{30}}\cdot 11,075\cdot\frac{6991}{9672},$$

ou, en effectuant les calculs indiqués,

$$C=a\times 2,13736.$$

Le capital qui représente une rente temporaire de 120 fr., payée depuis 25 ans jusqu'à 55, a pour expression (**874**)

$$120^f\cdot\left[\frac{S_{25}}{v_{25}}-\frac{1}{(1,045)^{30}}\cdot\frac{S_{55}}{v_{55}}\cdot\frac{v_{55}}{v_{25}}\right),$$

ou, d'après la table de Hubbard,

$$120^f\cdot\left(16,767-\frac{1}{(1,045)^{30}}\cdot 11,075\cdot\frac{6991}{9672}\right),$$

ou

$$120^f\cdot(16,767-2,13736),$$

ou enfin

$$1755^f,55680.$$

Ce second capital est inférieur au premier précisément de 120 fr. (voy. le numéro précédent); on doit donc avoir

$$1755^{f},5568 + 120^{f} = a \times 2,13736,$$

d'où
$$a = \frac{1875^{f},5568}{2,13736} = 877^{f},51.$$

Cette rente est notablement plus élevée que celle qui a été obtenue au n° **868**.

877. Désignons par $S_{n,m}$ la quantité entre parenthèses dans la formule [1] de l'énoncé. On démontrera d'abord, comme au numéro **860**, que $S_{n-1,m-1}$ se déduit de $S_{n,m}$, et qu'on a

$$S_{n-1,m-1} = \frac{S_{n,m} + v_n u_m}{1 + r}.$$

Cela posé, pour former le tableau des valeurs de $A_{n,m}$ relatif à des valeurs de n et de m différant de 5 unités, on supposera d'abord $m = 94$ et $n = 89$, ce qui suppose $u_{94} = 1$ et $v_{89} = 16$. On multipliera ces nombres l'un par l'autre, et l'on divisera le produit par 1,045. Au quotient on ajoutera le produit $u_{93}.v_{88}$, ou 2×22, et l'on divisera de nouveau par 1,045. A ce nouveau produit on ajoutera $u_{92}.v_{87}$, ou 4×29, et l'on divisera par 1,045. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait employé le produit $u_{25}.v_{20}$, ou 774×814, et divisé une dernière fois par 1,045. On aura formé ainsi les valeurs successives de $S_{n,m}$; et, en les divisant respectivement par les valeurs correspondantes du produit $u_m.v_n$, on obtiendra les valeurs de $A_{n,m}$.

On opérera de la même manière pour le tableau des valeurs de $A_{n,m}$ dans le cas où m et n diffèrent de 10 ou de 30 unités; et l'on formera le tableau suivant :

Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.	Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.	Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.
20 — 25	13,784	20 — 30	13,496	20 — 50	10,739
21 — 26	13,699	21 — 31	13,400	21 — 51	10,532
22 — 27	13,612	22 — 32	13,301	22 — 52	10,335
23 — 28	13,522	23 — 33	13,199	23 — 53	10,128
24 — 29	13,429	24 — 34	13,092	24 — 54	9,911
25 — 30	13,333	25 — 35	12,982	25 — 55	9,702
26 — 31	13,233	26 — 36	12,868	26 — 56	9,484
27 — 32	13,131	27 — 37	12,749	27 — 57	9,255
28 — 33	13,024	28 — 38	12,606	28 — 58	9,034
29 — 34	12,914	29 — 39	12,455	29 — 59	8,803
30 — 35	12,799	30 — 40	12,298	30 — 60	8,561
31 — 36	12,680	31 — 41	12,133	31 — 61	8,306

Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.	Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.	Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.
32 — 37	12,556	32 — 42	11,960	32 — 62	8,038
33 — 38	12,408	33 — 43	11,778	33 — 63	7,775
34 — 39	12,252	34 — 44	11,587	34 — 64	7,499
35 — 40	12,089	35 — 45	11,385	35 — 65	7,207
36 — 41	11,918	36 — 46	11,174	36 — 66	6,920
37 — 42	11,739	37 — 47	10,970	37 — 67	6,639
38 — 43	11,531	38 — 48	10,738	38 — 68	6,353
39 — 44	11,313	39 — 49	10,512	39 — 69	6,076
40 — 45	11,082	40 — 50	10,274	40 — 70	5,811
41 — 46	10,839	41 — 51	10,042	41 — 71	5,538
42 — 47	10,601	42 — 52	9,817	42 — 72	5,282
43 — 48	10,349	43 — 53	9,579	43 — 73	5,025
44 — 49	10,102	44 — 54	9,329	44 — 74	4,770
45 — 50	9,841	45 — 55	9,083	45 — 75	4,518
46 — 51	9,583	46 — 56	8,824	46 — 76	4,248
47 — 52	9,345	47 — 57	8,566	47 — 77	3,991
48 — 53	9,095	48 — 58	8,312	48 — 78	3,748
49 — 54	8,846	49 — 59	8,060	49 — 79	3,503
50 — 55	8,602	50 — 60	7,793	50 — 80	3,284
51 — 56	8,360	51 — 61	7,526	51 — 81	3,080
52 — 57	8,120	52 — 62	7,257	52 — 82	2,899
53 — 58	7,886	53 — 63	6,992	53 — 83	2,700
54 — 59	7,639	54 — 64	6,711	54 — 84	2,464
55 — 60	7,394	55 — 65	6,428	55 — 85	3,238
56 — 61	7,136	56 — 66	6,145	56 — 86	2,023
57 — 62	6,862	57 — 67	5,864	57 — 87	1,836
58 — 63	6,605	58 — 68	5,598	58 — 88	1,596
59 — 64	6,333	59 — 69	5,339	59 — 89	1,356
60 — 65	6,045	60 — 70	5,088	60 — 90	1,119
61 — 66	5,757	61 — 71	4,828	61 — 91	0,891
62 — 67	5,467	62 — 72	4,578	62 — 92	0,677
63 — 68	5,191	63 — 73	4,337	63 — 93	0,463
64 — 69	4,917	64 — 74	4,093	64 — 94	0,000
65 — 70	4,647	65 — 75	3,848		
66 — 71	4,377	66 — 76	3,594		
67 — 72	4,128	67 — 77	3,351		
68 — 73	3,885	68 — 78	3,126		
69 — 74	3,653	69 — 79	2,902		
70 — 75	3,436	70 — 80	2,709		
71 — 76	3,203	71 — 81	2,524		
72 — 77	2,989	72 — 82	2,365		
73 — 78	2,788	73 — 83	2,195		
74 — 79	2,585	74 — 84	1,999		
75 — 80	2,409	75 — 85	1,811		
76 — 81	2,232	76 — 86	1,627		
77 — 82	2,076	77 — 87	1,473		
78 — 83	1,917	78 — 88	1,279		
79 — 84	1,730	79 — 89	1,082		

Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.	Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.	Ages.	Valeurs de $A_{n,m}$.
80 — 85.....	1,562	80 — 90.....	0,895		
81 — 86.....	1,408	81 — 91.....	0,717		
82 — 87.....	1,292	82 — 92.....	0,559		
83 — 88.....	1,130	83 — 93.....	0,398		
84 — 89.....	0,954	84 — 94.....	0,000		
85 — 90.....	0,782				
86 — 91.....	0,621				
87 — 92.....	0,489				
88 — 93.....	0,348				
89 — 94.....	0,000				

878. D'après le tableau du numéro précédent, la valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur deux têtes, âgées l'une de 50 ans, et l'autre de 60, est $7^f,793$. La valeur d'une rente de 4800 fr., dans les mêmes circonstances, est donc

$$7^f,793 \times 4800, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 37406^f,40.$$

879. D'après le tableau du n° **877**, la valeur d'une rente de 1 fr. sur deux têtes âgées, l'une de 45 ans et l'autre de 50, est $9^f,841$. Autant de fois ce nombre sera contenu dans 40000 fr., autant la rente cherchée contiendra de francs. En faisant la division, on trouve $4064^f,62$.

880. La valeur d'une rente de 6000 fr. étant 67878 fr., la valeur d'une rente de 1 fr. serait 6000 fois moindre, ou 11,313....

Si l'on cherche ce nombre au tableau du n° **877**, dans la colonne où les âges diffèrent de 30 ans, on trouve qu'il répond à 22 ans et 52 ans; tels sont donc les âges du fils et du père.

881. D'après le tableau du n° **877**, une rente viagère de 1 fr. constituée sur deux têtes âgées de 57 ans et de 62 ans, vaut $7^f,291$; une rente viagère de 5000 fr. vaut donc dans les mêmes circonstances 5000 fois $7^f,291$ ou 36455 fr., dont la moitié est $18227^f,50$.

D'après la table du n° **860**, la valeur d'une rente de 1 fr. sur une tête de 57 ans est $10^f,163$; un capital de $18227^f,50$ représente donc à cet âge une rente exprimée par

$$\frac{18227^f,50}{10,163} \quad \text{ou} \quad 1793^f,51.$$

La valeur d'une rente de 1 fr. sur une tête de 62 ans est $8^f,738$; un capital de $18227^f,50$ représente donc une rente exprimée par

$$\frac{18227^f,50}{8,738} \quad \text{ou} \quad 2086^f,00.$$

Les deux vieillards ne retireraient donc de ce mode de place-

ment que $1793^f,51 + 2086,00$ ou $3879^f,51$, au lieu de 5000 fr.; cette combinaison leur serait donc désavantageuse.

882. Le tableau du n° **860** donne

$$A_{53} = 11,195 \quad \text{et} \quad A_{58} = 9,902;$$

le tableau du n° **877** donne

$$A_{53,58} = 7,886.$$

Le capital demandé sera donc exprimé par

$$C = 4500^f (11,195 + 9,902 - 7,886)$$

ou

$$C = 4500^f \times 13,211 = 59449^f,50.$$

883. Le tableau du n° **860** donne

$$A_{25} = 16,198 \quad \text{et} \quad A_{55} = 10,691;$$

le tableau du n° **877** donne

$$A_{25,55} = 9,702;$$

En nommant a la rente cherchée, on doit donc avoir

$$60000^f = a (16,198 + 10,691 - 9,702)$$

ou

$$60000^f = a \times 17,187,$$

d'où

$$a = \frac{60000^f}{17,187} = 3491^f,01.$$

884. Le tableau du n° **860** donne

$$A_{49} = 12,176 \quad \text{et} \quad A_{59} = 9,631;$$

le tableau du n° **877** donne

$$A_{49,59} = 8,060.$$

D'après cela, le capital équivalent à la rente de 1800 fr. sera

$$1800^f \times 9,631 \quad \text{ou} \quad 17335^f,80.$$

Le capital équivalent à la rente de 1200 fr. sera

$$1200^f \times 12,176 \quad \text{ou} \quad 14611^f,20.$$

La somme de ces deux capitaux est $31947^f,00$.

En nommant a la rente cherchée, on devra donc avoir

$$31947^f = a.(12,176 + 9,631 - 8,060)$$

ou

$$31947^f = a \times 13,747,$$

d'où

$$a = \frac{31947^f}{13,747} = 2323^f,92.$$

Ils perdraient donc, dans le présent, à cette combinaison; mais ils y gagneraient d'assurer d'une manière plus convenable le sort du dernier vivant.

885. En nommant a cette rente viagère, on doit avoir d'après le tableau donné dans l'énoncé,

$$50000^f = a \times 5,423;$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{50000^f}{5,423} = 9219^f,98.$$

886. D'après ce qui a été dit au n° **882**, on devrait avoir

$$50000^f = a.(A_{65} + A_{65} - A_{65,65})$$

ou

$$50000^f = a(2A_{65} - A_{65,65})$$

ou d'après les tableaux des n^{os} **860** et **885**,

$$50000^f = a(2 \times 7,780 - 5,423) = a \times 10,137;$$

d'où

$$a = \frac{50000^f}{10,137} = 4932^f,42.$$

887. En faisant la somme des espérances mathématiques de Paul pour une valeur déterminée de k, on obtient

$$\frac{a}{(1+r)^k}\left[\frac{v_{n+k}}{v_n} - \tfrac{1}{2}.\frac{v_{n+k}}{v_n}.\frac{u_{m+k}}{u_m}\right].$$

Et si l'on fait la somme de toutes les espérances analogues, depuis $k = 1$ jusqu'à la valeur de k qui correspond à la limite de la table de mortalité, c'est-à-dire jusqu'à $k = 95 - m$, si m est plus grand que n, on obtiendra

$$a.[A_n - \tfrac{1}{2} A_{n,m}].$$

On trouverait de même, pour la somme des espérances mathématiques de Jacques

$$a.[A_m - \tfrac{1}{2} A_{n,m}].$$

Le capital à fournir devra être partagé dans le rapport des

deux quantités que l'on vient d'obtenir, ou plutôt ces deux quantités seront elles-mêmes les parts de Paul et de Jacques; car leur somme est

$$a[A_n + A_m - A_{n,m}],$$

c'est-à-dire précisément le capital équivalent à la rente dont il s'agit (882).

La table du n° 860 donne $A_{53} = 11,195$ et $A_{58} = 9,902$; celle du n° 877 donne $A_{53,58} = 7,886$. On aura donc pour la part de Paul

$$3000^f.[11,195 - \tfrac{1}{2}.7,886],$$

c'est-à-dire $3000^f \times 7,252$ ou 21756 fr.;

et pour la part de Jacques

$$3000^f.[9,902 - \tfrac{1}{2}.7,886],$$

c'est-à-dire $3000^f \times 5,959$ ou 17877^f.

888. D'après le tableau du n° 860, on a

$$A_{61} = 9,049 \quad \text{et} \quad A_{66} = 7,451,$$

et d'après la table du n° 877, on a

$$A_{61,66} = 5,757.$$

Le capital équivalent à une rente viagère de 1 fr. constituée sur deux têtes de 61 ans et de 66 ans jusqu'au dernier décès, est donc

$$9,049 + 7,451 - 5,757 \quad \text{ou} \quad 10,743.$$

Par conséquent, le capital équivalent à une rente viagère de 4500 fr. dans les mêmes conditions est $4500^f \times 10,743$ ou $48343^f,50$.

La part du moins âgé sera, d'après ce qui a été dit au numéro précédent,

$$4500^f.(9,049 - \tfrac{1}{2}.5,757) \quad \text{ou} \quad 27767^f,25,$$

et cette part, placée en viager, produira une rente exprimée par

$$\frac{27767^f,25}{9,049} \quad \text{ou} \quad 3068^f,54.$$

La part du plus âgé sera

$$4500^f.(7,451 - \tfrac{1}{2}.5,757) \quad \text{ou} \quad 20576^f,25,$$

et cette part, placée en viager, produira une rente exprimée par

$$\frac{20576^f,25}{7,451} \quad \text{ou} \quad 2761^f,54.$$

889. Calculons ce que coûterait cette rente d'après Deparcieux.

La table du n° 860 donne

$$A_{35} = 15,078 \quad \text{et} \quad A_{45} = 13,164,$$

et le tableau du n° 877 donne

$$A_{35,45} = 11,385.$$

Le capital équivalent à une rente de 1 fr. constituée, jusqu'au dernier décès, sur deux têtes âgées de 35 et de 45 ans est donc (882)

$$15^f,078 + 13^f,164 - 11^f,385 \quad \text{ou} \quad 16^f,857.$$

Ainsi une rente de 3600 fr., dans les mêmes conditions, coûterait

$$3600^f \times 16,857 \quad \text{ou} \quad 60685^f,20.$$

La Compagnie prend $9764^f,90$ de plus. Son bénéfice total est donc de $9764^f,90$ sur $60685^f,20$; et son bénéfice pour 100 sera exprimé par

$$\frac{100 \times 9764,90}{60685,20}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 16,09,$$

ou un peu plus de 16 pour 100.

890. 1° Soit n et m les âges actuels des deux têtes considérées; leurs âges dans t années seront $n + t$ et $m + t$. Or, d'après ce qu'on a vu au n° 882, une rente viagère de 1 fr. sur deux têtes de ces âges, jusqu'au dernier décès, aura pour valeur dans t années

$$A_{n+t} + A_{m+t} - A_{n+t,m+t}.$$

La valeur actuelle de cette rente est donc

$$\frac{A_{n+t} + A_{m+t} - A_{n+t,m+t}}{(1+r)^t}.$$

La probabilité que la tête de l'âge n subsistera encore dans t années est $\frac{v_{n+t}}{v_n}$; la probabilité que la tête de l'âge m subsistera à la même époque est de même $\frac{u_{m+t}}{u_m}$. La probabilité que ces deux

têtes subsisteront ensemble dans t années, est le produit de deux probabilités simples, c'est-à-dire $\frac{v_{n+t}.u_{m+t}}{v_n.u_m}$.

L'espérance mathématique correspondante à la rente différée, ou, ce qui revient au même, sa valeur actuelle, est donc, en appelant a la rente

$$a.\frac{(A_{n+t}+A_{m+t}-A_{n+t,m+t}).v_{n+t}.u_{m+t}}{(1+r)^t.v_n.u_m}.$$

2° Dans l'exemple proposé on a $a = 1200^f$, $n = 38$, $m = 48$, $t = 12$, et $r = 0,045$. La table du n° **860** donne

$$A_{50} = 11,921 \quad \text{et} \quad A_{60} = 9,346.$$

La table du n° **877** donne $A_{50,60} = 7,793$.

D'ailleurs la table de Deparcieux donne

$$v_{38} = 671, \quad u_{48} = 599, \quad v_{50} = 581, \quad u_{60} = 463.$$

La valeur demandée a donc pour expression

$$1200^f.\frac{(11,921+9,346-7,793).581.463}{(1,045)^{12}.671.599},$$

ou, en effectuant les calculs, $6381^f,01$.

§ 4. Des assurances sur la vie.

891. Si l'on fait d'abord la somme des premiers termes des espérances mathématiques successives, on trouve

$$\frac{S}{1+r}.\frac{v_n}{v_n}+\frac{S}{(1+r)}.\left[\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)}+\frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2}+\frac{v_{n+3}}{v_n(1+r)^3}+\ldots\right],$$

ou, d'après les notations adoptées dans le paragraphe précédent,

$$\frac{S}{1+r}+\frac{S}{1+r}.A_n, \quad \text{ou} \quad \frac{S}{1+r}(1+A_n).$$

Si l'on fait ensuite la somme des seconds termes, on obtient

$$-S\left[\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)}+\frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2}+\frac{v_{n+3}}{v_n(1+r)^3}+\ldots\right],$$

ou

$$S.A_n.$$

On doit donc avoir

$$P=\frac{S}{1+r}(1+A_n)-S.A_n,$$

ou bien $$P = S.\frac{1 - rA_n}{1 + r}. \qquad [1]$$

Dans l'exemple proposé, on a $S = 25000$ fr., $r = 0{,}045$, et la table du n° **860** donne $A_n = 9{,}346$. Il vient donc

$$P = 25000^f.\frac{1 - 0{,}045 \times 9{,}346}{1{,}045} = 25000^f \times 0{,}55447,$$

ou $$P = 13861^f{,}75.$$

892. Il faut employer la formule [1] du numéro précédent. On a ici $A_{37} = 14{,}797$. Par conséquent

$$P = 60000^f.\frac{1 - 0{,}045 \times 14{,}797}{1{,}045} = 19184^f{,}76.$$

893. La formule [1] du n° **891** résoudra ce problème. On a ici $P = 30000^f$ et $A_{47} = 12{,}672$. Par suite

$$30000^f = S.\frac{1 - 0{,}045 \times 12{,}672}{1{,}045} = S \times 0{,}41125,$$

d'où $$S = \frac{30000^f}{0{,}41125} = 72948^f{,}32.$$

894. On a ici

$$2861^f{,}15 = 10000.\frac{1 - 0{,}045.A_n}{1{,}045},$$

ou $$0^f{,}286115 \times 1{,}045 = 1 - 0{,}045.A_n,$$

d'où $$A_n = \frac{1 - 0^f{,}286115 \times 1{,}045}{0{,}045} = 15{,}57799\ldots,$$

ou sensiblement $$A_n = 15{,}578.$$

En parcourant la table du n° **860**, on voit que ce nombre correspond à l'âge de 31 ans.

895. Le capital équivalent à une rente viagère p sur la tête d'une personne âgée de n années est $p.A_n$. D'après la remarque faite dans l'énoncé, on doit donc avoir

$$p.A_n + p = P, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{P}{1 + A_n},$$

ou, en mettant pour P sa valeur donnée par la formule [1] du n° **891**,

$$[2] \qquad p = \frac{S(1 - rA_n)}{(1 + r)(1 + A_n)}.$$

Dans l'exemple proposé, on a $S = 12000$ fr., $r = 0,045$; et la table du n° **860** donne $A_{50} = 11,921$. On aura donc

$$p = \frac{12000^f(1 - 0,045.11,921)}{1,045 \times 12,921} = \frac{12000^f \times 0,463555}{1,045 \times 12,921}.$$

En achevant le calcul par logarithmes, on trouvera

$$p = 411^f,97.$$

896. Dans la formule [2] du numéro précédent, on doit faire $p = 650$ fr., $r = 0,045$; et, d'après le tableau du n° **860**, $A_{48} = 12,419$. On a donc

$$650^f = \frac{S(1 - 0,045.12,419)}{1,045 \times 13,419} = S \times 0,031455,$$

d'où
$$S = \frac{650^f}{0,031455} = 20664^f,44.$$

897. Il faut, pour résoudre cette question, faire dans la formule [2] du n° **895**, $S = 50.p$, $r = 0,045$. On obtient ainsi, en supprimant le facteur p devenu commun aux deux membres,

$$1 = \frac{50(1 - 0,045 A_n}{1,045(1 + A_n)},$$

d'où l'on tire

$$A_n = \frac{50 - 1,045}{1,045 + 50 \times 0,045} = 15,160.$$

En consultant la table du n° **860**, on voit que cette valeur de A_n tombe entre 34 et 35 ans.

898. Si l'on fait d'abord la somme des premiers termes des espérances mathématiques, on trouve

$$\frac{S}{1+r} \cdot \frac{v_n . u_m}{v_n . u_m} + \frac{S}{(1+r) v_n . u_m} \left(\frac{v_{n+1} . u_{m+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2} . u_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3} . u_{m+3}}{(1+r)^3} + \cdots \right),$$

ou, d'après la notation adoptée au n° **877**,

$$\frac{S}{1+r}(1 + A_{n,m}).$$

Si l'on fait ensuite la somme des seconds termes, on obtient

$$-\frac{S}{v_n . u_m} \left[\frac{v_{n+1} . u_{m+1}}{(1+r)} + \frac{v_{n+2} . u_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{v_{n+3} . u_{m+3}}{(1+r)^3} + \cdots \right],$$

ou
$$- S . A_{n,m}.$$

On a donc $$P = \frac{S}{1+r}(1 + A_{n,m}) - S.A_{n,m},$$

ou bien $$P = S.\frac{1 - rA_{n,m}}{1+r}. \qquad [3]$$

Dans l'exemple proposé, on a $S = 10000$ fr., $r = 0,045$, et le tableau du n° **877** donne $A_{51,61} = 7,526$.

On aura donc

$$P = \frac{100000^f(1 - 0,045.7,526)}{1,045} = 6328^f,51.$$

899. En raisonnant comme au n° **895**, on verra que la prime fixe P équivaut au capital d'une rente viagère p, constituée sur deux têtes, dont les âges sont n et m, jusqu'au premier décès de l'une d'elles (**877**), plus une fois cette rente. On aura donc

$$[4] \qquad p.A_{n,m} + p = P, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{P}{1 + A_{n,m}}.$$

Dans l'exemple actuel on aura donc

$$p = \frac{6328^f,51}{8,526} = 742^f,26.$$

900. D'après la formule [3] du n° **898**, et le tableau du n° **877**, on doit avoir

$$16087^f,80 = \frac{S(1 - 0,45 \times 9,769)}{1,045} = S \times 0,53626...,$$

d'où $$S = \frac{16087^f,89}{0,53626} = 30000 \text{ fr.}$$

901. En combinant la formule [3] du n° **898** avec la formule [4] du n° **899**, on obtient

$$[5] \qquad p = \frac{S(1 - r.A_{n,m})}{(1+r)(1 + A_{n,m})}.$$

On en tire

$$[6] \qquad A_{n,m} = \frac{S - p(1+r)}{p(1+r) + rS}.$$

Dans l'exemple actuel, on a $S = 40000$ fr., $r = 0,045$, $p = 2340$; par conséquent

$$A_{n,m} = \frac{40000^f - 2340^f.1,045}{1,045 + 40000 \times 0,045} = 8,846.$$

En consultant le tableau du n° **877**, et la colonne qui correspond à une différence d'âge de 5 ans, on trouve que cette valeur de $A_{n,m}$ répond exactement à 49 et à 54 ans.

902. La table du n° **860** donne

$$A_{33} = 15,338 \quad \text{et} \quad A_{63} = 8,433,$$

et le tableau du n° **877** donne

$$A_{33,63} = 7,775.$$

Par conséquent, la valeur d'une rente viagère de 1 fr., payable jusqu'au dernier décès de deux têtes âgées de 33 et de 63 ans, est (**882**)

$$A = 15,338 + 8,433 - 7,775 = 15,996.$$

Si l'on remplace A_n par cette valeur dans la formule du n° **891**, après y avoir fait $S = 24000$ fr. et $r = 0,045$, on obtiendra

$$P = \frac{24000^f(1 - 0,045 \times 15,996)}{1,045} = 6434^f,75.$$

903. La table du n° **860** donne

$$A_{37} = 14,797 \quad \text{et} \quad A_{47} = 12,672,$$

et le tableau du n° **877** donne

$$A_{37,47} = 10,970.$$

Par conséquent, la valeur d'une rente viagère de 1 fr., payable jusqu'au dernier décès de deux têtes âgées de 37 et 47 ans, est

$$14,797 + 12,672 - 10,970 \quad \text{ou} \quad 16,499.$$

Remplaçant A_n par cette valeur dans la formule [2] du n° **895**, après y avoir fait $S = 30000$ fr. et $r = 0,045$, on obtient

$$p = \frac{30000^f(1 - 0,045 \times 16,499)}{1,045 \times 17,499} = \frac{30000^f \times 0,257545}{1,045 \times 17,499},$$

et, en achevant le calcul par logarithmes, $p = 422^f,52$.

904. La table du n° **860** donne

$$A_{36} = 14,941 \quad \text{et} \quad A_{41} = 14,056,$$

et le tableau du n° **877** donne

$$A_{36,41} = 11,918.$$

Par conséquent, la valeur d'une rente viagère de 1 fr., payable jusqu'au dernier décès de deux têtes âgées de 36 et 41 ans, est

$$14{,}941 + 14{,}056 - 11{,}918 \quad \text{ou} \quad 17{,}079.$$

Si l'on remplace A_n par cette valeur dans la formule [2] du n° **895**, et qu'on y fasse $p = 150^f \times 2$ et $r = 0{,}045$, elle deviendra

$$300^f = \frac{S(1 - 0{,}045 \times 17{,}079)}{1{,}045 \times 18{,}079} = \frac{S \times 0{,}231445}{1{,}045 \times 18{,}079},$$

d'où l'on tire

$$S = \frac{300^f \times 1{,}045 \times 18{,}079}{0{,}231445} = 24488^f{,}60.$$

905. En faisant la somme des termes positifs, on obtient d'abord

$$\frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} + \frac{S}{(1+r)^{t+2}} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_{n-t}} + \frac{S}{(1+r)^{t+3}} \cdot \frac{v_{n+2}}{v_{n-t}} + \text{etc...},$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} + \frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \left[\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} (1 + A_n).$$

Si l'on fait de même la somme des termes négatifs, on peut l'écrire

$$-\frac{S}{(1+r)^t} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \left[\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} + \ldots\right],$$

ou

$$-\frac{S}{(1+r)^t} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n.$$

On doit donc avoir

$$P = \frac{S}{(1+r)^{t+1}} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} (1 + A_n) - \frac{S}{(1+r)^t} \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot A_n,$$

ou

$$P = S \cdot \frac{v_n}{v_{n-t}} \cdot \frac{1 - rA_n}{(1+r)^{t+1}}. \qquad [5]$$

Dans l'exemple proposé, on a $S = 15000$ fr., $r = 0{,}045$; la table de Deparcieux donne

$$v_n \text{ ou } v_{62} = 437 \quad \text{et} \quad v_{n-t} \text{ ou } v_{52} = 560;$$

et la table du n° 860 donne A_n ou $A_{62} = 8,738$. On aura donc

$$P = 15000^f . \frac{437}{560} . \frac{1 - 0,045 \times 8,738}{(1,045)^{11}},$$

ou

$$P = 15000^f . \frac{437}{560} . \frac{0,606790}{(1,045)^{11}} = 4376^f,67.$$

906. Dans le cas actuel, on a $P = 10000$ fr., $r = 0,045$, $v_{45} = 622$, $v_{60} = 463$, $A_{60} = 9,346$. La formule du numéro précédent deviendra donc

$$10000^f = S . \frac{463}{622} . \frac{1 - 0,045 \times 9,346}{(1,045)^{16}},$$

ou

$$10000^f = S . \frac{463}{622} . \frac{0,579430}{(1,045)^{16}},$$

d'où

$$S = \frac{10000^f \times 622 \times (1,045)^{16}}{463 \times 0,579430} = 46888^f,81.$$

907. La somme des termes positifs est

$$\frac{a}{u_m}\left[\frac{u_{m+1}}{(1+r)} + \frac{u_{m+2}}{(1+r)^2} + \frac{u_{m+3}}{(1+r)^3} + \ldots\right], \text{ ou } a.A_m.$$

La somme des termes négatifs est

$$-\frac{a}{u_m . v_n}\left[\frac{u_{m+1} . v_{n+1}}{(1+r)} + \frac{u_{m+2} . v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{u_{m+3} . v_{n+3}}{(1+r^3)} + \ldots\right], \text{ ou } -aA_{n,m}.$$

On aura donc, en désignant par P la prime fixe,

[6] $$P = a(A_m - A_{n,m}).$$

Dans l'exemple proposé, on a $a = 600$ fr., et les tables des n°s 860 et 877 donnent

$$A_m \text{ ou } A_{49} = 12,176 \quad \text{et} \quad A_{49,54} = 8,846.$$

On aura donc

$$P = 600^f (12,176 - 8,846) = 600^f \times 3,330 = 1998^f.$$

908. On a ici $a = 1800^f$; et l'on trouvera

$$A_m \text{ ou } A_{57} = 10,163 \quad \text{et} \quad A_{27,57} = 9,255.$$

On aura donc

$$P = 1800^f.(10,163 - 9,255) = 1800^f \times 0,908 = 1634^f,40.$$

909. On a ici $P = 12000^f$; et l'on trouvera

$$A_m \text{ ou } A_{48} = 9,756 \quad \text{et} \quad A_{48,58} = 8,312.$$

On aura donc

$$12000^f = a(9,756 - 8,312) = a \times 1,444;$$

d'où
$$a = \frac{12000^f}{1,444} = 8310^f,25.$$

910. La valeur d'une rente viagère p sur une tête de l'âge n est $p.A_n$; et comme la prime annuelle se paye un an plus tôt que la rente viagère à laquelle on la compare, le capital équivalant doit être $p + p.A_n$ ou $p.(1 + A_n)$. Or ce capital doit être équivalent à la prime fixe; on doit donc avoir

$$p(1 + A_n) = P, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{P}{1 + A_n}.$$

Dans l'exemple du n° **907**, on a trouvé $P = 1998^f$; et la table du n° **860** donne A_n ou $A_{54} = 10,938$; on aura donc

$$p = \frac{1998^f}{11,938} = 167^f,36.$$

Dans l'exemple du n° **908**, on a trouvé $P = 1634^f,40$; et la table du n° **860** donne A_n ou $A_{27} = 16,006$; on aura donc

$$p = \frac{1634^f,40}{17,006} = 96^f,11.$$

Dans l'exemple du n° **909**, on a $P = 12000^f$; et la table du n° **860** donne A_n ou $A_{58} = 9,902$; on a donc

$$p = \frac{12000^f}{10,902} = 1100^f,71.$$

911. La somme des termes positifs est

$$a\left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \ldots\right];$$

la progression décroissante renfermée entre parenthèses devant être prolongée jusqu'à l'infini, la somme de ses termes est égale au premier divisé par l'unité moins la raison, c'est-à-dire à

$$\frac{\frac{1}{1+r}}{1 - \frac{1}{1+r}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1+r-1}, \quad \text{ou enfin} \quad \frac{1}{r}.$$

La somme des termes positifs considérés est donc $\frac{a}{r}$.

La somme des termes négatifs est

$$-\frac{a}{v_n}\left[\frac{v_{n+1}}{(1+r)}+\frac{v_{n+2}}{(1+r)^2}+\frac{v_{n+3}}{(1+r)^3}+\cdots\right].$$

Il suffit de prolonger la somme entre parenthèses jusqu'à la limite de la table de mortalité, car au delà on n'obtiendrait que des termes nuls. Cette somme de termes négatifs est donc $-a.A_n$; et en nommant P la prime fixe demandée, on devra avoir

$$P=\frac{a}{r}-aA_n, \quad \text{ou} \quad P=a\left(\frac{1}{r}-A_n\right).$$

Dans l'exemple proposé, on a $a=1200$ fr., $r=0{,}045$, et la table du n° **860** donne $A_{56}=10{,}433$. On aura donc

$$P=1200^f.\left(\frac{1}{0{,}045}-10{,}433\right)=14146^f{,}80.$$

912. Dans la formule du numéro précédent, il faut faire $P=10000$ fr., et $r=0{,}045$; la table du n° **860** donne d'ailleurs $A_{49}=12{,}176$; on aura donc

$$10000^f=a.\left(\frac{1}{0{,}045}-12{,}176\right)=a\times 10{,}046;$$

d'où
$$a=\frac{10000^f}{10{,}046}=995^f{,}42.$$

913. En appelant p la prime fixe, on devra avoir

$$p+pA_n=P;$$

d'où
$$p=\frac{P}{1+A_n}.$$

Dans l'exemple du n° **911**, on a trouvé $P=14146^f{,}80$ et $A_n=10{,}433$; on aura donc

$$p=\frac{14146^f{,}80}{11{,}433}=1237^f{,}36.$$

Dans l'exemple du n° **911**, on a $P=10000^f$ et $A_n=12{,}176$; par conséquent

$$p=\frac{10000^f}{13{,}176}=758^f{,}95.$$

914. La prime fixe équivalente à un capital S assuré sur une tête de l'âge n est (**891**)

$$P = \frac{S(1 - rA_n)}{1 + r},$$

et la prime fixe équivalente à une rente perpétuelle a sur la même tête est

$$P' = a\left(\frac{1}{r} - A_n\right) = \frac{a(1 - rA_n)}{r}.$$

Si l'on suppose $P = P'$, il en résulte

$$\frac{S}{1+r} = \frac{a}{r}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{Sr}{1+r},$$

formule indépendante de n.

On voit que cette rente est plus petite que l'intérêt annuel rS du capital S; cela tient à ce que la rente a se paye au moment même du décès, et ensuite d'année en année, tandis que le capital S doit être supposé placé au moment du décès, pour ne produire d'intérêts qu'au bout d'un an.

Dans l'exemple proposé, on a $S = 20000$ fr. et $r = 0{,}045$, par conséquent,

$$a = \frac{20000^f \times 0{,}045}{1{,}045} = 861^f{,}24$$

(au lieu de 900 fr. qu'on aurait obtenu en prenant simplement l'intérêt annuel de 20000 fr. à $4\frac{1}{2}$ pour 100).

915. Si dans les deux formules

$$P = \frac{S(1 - rA_n)}{1 + r} \quad \text{et} \quad P' = \frac{a(1 - rA_n)}{r}$$

on suppose a égal à l'intérêt annuel de S, c'est-à-dire à rS, en divisant membre à membre la seconde égalité par la première, on obtiendra

$$\frac{P'}{P} = 1 + r, \quad \text{d'où} \quad P' = P(1 + r).$$

Dans l'exemple proposé on aura donc

$$P' = 15800^f \times 1{,}045 = 16511 \text{ fr.}$$

916. Soit S le capital de la rente perpétuelle, et a cette rente elle-même ; on aura (**913**)

$$500^f = \frac{a.(1 - rA_n)}{(1 + A_n).r}.$$

Soit p la prime annuelle cherchée, on aura (**895**)

$$p = \frac{S(1 - rA_n)}{(1 + r)(1 + A_n)}.$$

Mais on a $a = rS$ d'après l'énoncé; en divisant donc les deux relations ci-dessus membre à membre, on aura

$$\frac{p}{500^f} = \frac{1}{1 + r}, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{500^f}{1 + r}$$

ou $$p = \frac{500^f}{1,045} = 478^f,468... \quad \text{ou} \quad 478^f,47.$$

917. 1° Les deux tiers de 40000 fr. sont $26666^f,67$. La prime fixe à payer pour assurer ce capital est (**891**)

$$P_1 = \frac{26666^f,67\,(1 - 0,045 \times 10,938)}{1,045},$$

attendu que $A_{34} = 10,938$.

En effectuant les calculs, on trouve..... $12957^f,96$

Une prime fixe propre à assurer le troisième tiers de 40000 fr. serait la moitié de celle-ci, c'est-à-dire. $6478^f,98$

Par conséquent la prime annuelle correspondante à la même assurance sera (**895**)

$$p_1 = \frac{6478^f,98}{1 + 10,938} = 542^f,72.$$

2° Les deux tiers de 1200 fr. valent 800 fr. La prime fixe équivalente à une rente perpétuelle de cette somme est (**911**)

$$P_2 = 800^f \left(\frac{1}{0,045} - 10,938\right)$$

ou $$P_2 = 800^f \times 11,284, \quad \text{c'est-à-dire....} \quad 9027^f,20$$

La prime fixe équivalente au troisième tiers de la rente perpétuelle de 1200 fr. aurait donc pour valeur la moitié de cette somme ou..... $4513^f,60$

Et par conséquent la prime annuelle équivalente est

$$p_2 = \frac{4513^f,60}{1 + 10,938}, \quad \text{c'est-à-dire.....} \quad 378^f,08$$

3° La table du n° **860** donne $A_{59} = 9,631$; et celle du n° **877** donne $A_{54,59} = 7,639$.

Il en résulte que la prime fixe équivalente à une rente viagère des deux tiers de 600 fr., c'est-à-dire de 400 fr., payable au décès de la personne âgée de 54 ans, et au profit de celle de 59, est exprimée par (**907**)

$$P_3 = 400^f.(9,631 - 7,639) \text{ ou} \ldots\ldots\ldots \quad 796^f,80$$

La prime fixe équivalente au troisième tiers de la rente viagère de 600 fr. aurait la moitié de cette valeur, c'est-à-dire..... $398^f,40$

Par conséquent la prime annuelle équivalente sera (**910**)

$$p_3 = \frac{398^f,40}{1 + 10,938}, \quad \text{c'est-à-dire} \ldots\ldots \quad 33^f,37$$

La prime fixe totale sera la somme des trois quantités P_1, P_2, et P_3, ou $12957^f,96 + 9027^f,20 + 796^f,80$ ou $22781^f,96$.

La prime annuelle totale sera de même la somme des trois quantités p_1, p_2 et p_3, ou $542^f,72 + 378^f,08 + 33^f,37$, c'est-à-dire $954^f,17$.

Pour tenir compte des frais de gestion et des bénéfices de la compagnie, il faut ajouter 15 pour 100 à ces résultats.

La prime fixe se composera donc, d'abord des. . .	$22781^f,96$
puis du dixième de ce nombre, c'est-à-dire.	2278 ,20
plus encore la moitié de ce dixième, ou.	1139 ,10
En tout. . .	$26199^f,26$

La prime annnelle comprendra, d'abord les.	$954^f,17$
puis le dixième de ce nombre, c'est-à-dire	95 ,42
plus encore la moitié de ce dixième, ou.	47 ,71
En tout . . .	$1097^f,30$

§ 5. Des tontines, des caisses dotales et des sociétés de secours mutuels.

918. Le capital social est de 650 fois 1000 fr., c'est-à-dire 650000 fr.; ce capital primitif, placé à $4\frac{1}{2}$ pour 100 et à intérêts composés, produira au bout de 20 ans un capital définitif exprimé par

$$650000^f.(1,045)^{20} \quad \text{ou} \quad 1567614^f,70.$$

Or, d'après la table de Deparcieux, sur 650 personnes de

41 ans, 450 seulement ont la chance de parvenir à l'âge de 61 ans; la part probable de chaque survivant est donc la 450e partie du capital qu'on vient d'obtenir, c'est-à-dire $3483^f,58$.

919. Elle eût été exactement la même. En effet, le capital social, et par suite le capital définitif eût été multiplié par le rapport de 10000 à 650; mais le nombre des survivants probables eût été multiplié par le même rapport; le quotient du capital définitif par le nombre des survivants serait donc demeuré le même, c'est-à-dire $3483^f,58$.

920. Le nombre des personnes considérées, et le nombre de celles d'entre elles qui atteindront l'âge de 60 ans, sont entre eux comme les nombres qui, dans la table de mortalité, expriment les vivants de 45 ans et de 60 ans, c'est-à-dire, d'après la table de Deparcieux, comme les nombres 622 et 463. Si donc on désigne par P la part contributive de chaque sociétaire dans le capital primitif, on doit avoir

$$\frac{P.622.(1,045)^{15}}{463} = 12000^f;$$

d'où

$$P = \frac{12000^f \times 463}{622.(1,045)^{15}}$$

ou, en effectuant les calculs, $P = 4945^f,70$.

921. Le nombre des vivants de 40 ans est 657, et celui des vivants de 50 ans est 581; en appelant r l'intérêt annuel de 1 fr., on doit donc avoir

$$\frac{657.1800^f.(1+r)^{10}}{581} = 3012^f,97;$$

d'où $\log(1+r) = \dfrac{\log 3012^f,97 + \log 581 - \log 1800 - \log 657}{10}$

ou

$$\log(1+r) = 0,0170333;$$

d'où

$$1 + r = 1,04 \quad \text{et} \quad r = 0,04.$$

Le taux de l'intérêt est donc 4 pour 100.

922. Le nombre des vivants de 48 ans est 599; soit v_{48+x} le

nombre des survivants au moment de la liquidation, x étant la durée de l'association exprimée en années; on devra avoir

$$\frac{2500^{f}.599.(1,045)^{x}}{v_{48+x}} = 5485^{f},06;$$

d'où

$$\frac{(1,045)^{x}}{v_{48+x}} = \frac{5485^{f},06}{2500^{f} \times 599}$$

et, en appliquant les logarithmes,

$$x \log(1,045) - \log v_{48+x} = \log 5485^{f},06 - \log 2500 - \log 599$$
$$= \bar{3},5638145.$$

Or, x devant être un nombre entier, si l'on fait successivement $x=1$, $x=2$, $x=3$, etc., dans le premier membre, on obtient les valeurs suivantes :

Valeurs de x.	Valeurs du premier membre.	
1	log (1,045) — log 590	ou $\bar{3}$,2482643
2	2 log (1,045) — log 581	$\bar{3}$,2740565
3	3 log (1,045) — log 571	$\bar{3}$,3007128
4	4 log (1,045) — log 560	$\bar{3}$,3282772
5	5 log (1,045) — log 549	$\bar{3}$,3560092
6	6 log (1,045) — log 538	$\bar{3}$,3839155
7	7 log (1,045) — log 526	$\bar{3}$,4128284
8	8 log (1,045) — log 514	$\bar{3}$,4419673
9	9 log (1,045) — log 502	$\bar{3}$,4713430
10	10 log (1,045) — log 489	$\bar{3}$,5018541
11	11 log (1,045) — log 476	$\bar{3}$,5326724
12	12 log (1,045) — log 463	$\bar{3}$,5638146

Ce dernier résultat étant égal au second membre de l'égalité, à une unité près du dernier ordre décimal, ce qui tient aux décimales négligées, on peut en conclure que x est égal à 12; c'est-à-dire que la durée de l'association est de 12 ans.

923. Le nombre des vivants de 35 ans étant 694, et celui des vivants de 35 + 15 ou 50 ans étant 581, chaque mise de 1 fr. donnera droit à une part exprimée par

$$\frac{694.(1,045)^{15}}{581}, \quad \text{ou} \quad 2^{f},31168.$$

Une mise de 1200 fr. donnera droit à une part 1200 fois plus grande, c'est-à-dire $2774^{f},02$.

924. Le nombre des vivants de 65 ans est 395, et celui des vivants de 65 — 20 ou 45 ans est 622. Chaque mise de 1 fr. a donc donné droit à une part exprimée par

$$\frac{622.(1,04)^{20}}{395}, \text{ ou } 3^{f},450326.$$

Autant de fois cette part sera contenue dans 3600 fr., autant la mise demandée contiendra de francs. En faisant la division, on trouve $1043^{f},38$.

925. La mise réelle s'obtiendra en remarquant qu'elle doit produire une part de 2400 fr. au bout de 7 ans. Or on a $v_{40}=657$ et $v_{47}=607$; en nommant P la part cherchée, on aura donc

$$\frac{P.657.(1,045)^{7}}{607}=2400^{f}, \quad \text{d'où} \quad P=\frac{2400^{f}\times 607}{657.(1,045)^{7}},$$

ou, en effectuant les calculs, $P=1629^{f},37$.

La part définitive s'obtiendra en supposant que la mise est 2400 fr. et la durée de l'association 20 — 7, ou 13 ans. On a $v_{60}=463$; la part cherchée sera donc exprimée par

$$\frac{2400^{f}.607.(1,045)^{13}}{463}, \quad \text{ou} \quad 5576^{f},10.$$

926. A son entrée dans l'association ce sociétaire avait 41 ans, et il en aura 61 au moment de la liquidation. Or on a $v_{41}=650$ et $v_{61}=450$; ainsi, en nommant x la part demandée, on aura, comme s'il s'agissait d'une tontine formée pour 20 ans par des personnes de 41 ans,

$$x=\frac{2000^{f}.650.(1,045)^{20}}{450}=6967^{f},18.$$

927. 1° Soit n l'âge des sociétaires au moment de la formation de la société, t le nombre d'années qui exprime la durée de l'association, p la mise annuelle, P la mise unique, et r l'intérêt annuel d'un franc.

La somme payée au début de la société, par un nombre de sociétaires égal à v_n, sera $p.v_n$; et à l'époque de la liquidation elle sera devenue..... $pv_n(1+r)^t$.

La somme payée au bout d'un an sera $p.v_{n+1}$; et, à l'époque de la liquidation, elle sera devenue..... $pv_{n+1}(1+r)^{t-1}$.

La somme payée au bout de deux ans sera $p.v_{n+2}$; et, à l'époque de la liquidation, elle sera devenue... $p.v_{n+2}(1+r)^{t-2}$.

Et ainsi de suite.

Enfin, la somme payée la $(t-1)^{ième}$ année sera $p.v_{n+t-1}$; et, à l'époque de la liquidation, elle sera devenue... $p.v_{n+t-1}(1+r)$.

En appelant C la somme de ces capitaux, on pourra écrire:

$$C = pv_n(1+r)^t.\left[1+\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)}+\frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2}\cdots+\frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}}\right].$$

La série qui suit l'unité dans la grande parenthèse, serait égale à $\frac{S_n}{v_n}$, ou à A_n (voy. les notations des n^{os} **859** et **860**), si elle était prolongée jusqu'à la limite de la table de mortalité. Or les termes qui manquent, c'est-à-dire

$$\frac{v_{n+t}}{v_n(1+r)^t}+\frac{v_{n+t+1}}{v_n(1+r)^{t+1}}+\frac{v_{n+t+2}}{v_n(1+r)^{t+2}}+\cdots,$$

peuvent s'écrire

$$\frac{1}{v_n(1+r)^{t-1}}.\left[\frac{v_{n+t}}{1+r}+\frac{v_{n+t+1}}{(1+r)^2}+\frac{v_{n+t+2}}{(1+r)^3}+\cdots\right],$$

ou

$$\frac{S_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}}.$$

Si l'on compare cette expression avec celle du n° **871**, on voit qu'elle représente la valeur d'une rente viagère de 1 fr. pour quelqu'un âgé de n années, cette rente étant différée de $t-1$ années. D'ailleurs A_n indique la valeur d'une rente viagère de 1 fr. pour une personne de n années; par conséquent, la série de termes qui suit l'unité dans la grande parenthèse faisant partie de la valeur de C, exprime la valeur d'une rente *temporaire* de 1 fr. pour une personne de n années, cette rente devant être servie pendant $t-1$ années.

En désignant par A_n^{n+t-1} cette valeur, on aura donc

[1] $$C = pv_n(1+r)^t(1+A_n^{n+t-1}).$$

D'ailleurs, d'après ce qu'on a vu au n° **917**, le capital C a aussi pour valeur

[2] $$C = P.v_n(1+r)^t.$$

En comparant ces formules, on peut écrire

$$pv_n(1+r)^t(1+A_n^{n+t-1}) = P.v_n(1+r)^t;$$

d'où

$$p = \frac{P}{1+A_n^{n+t-1}}, \qquad [3]$$

formule analogue à celle des n^{os} **895** et **899**.

2° Dans l'exemple dont il s'agit, on a $n = 41$, $t = 20$, $v_{41} = 650$.

Le tableau du n° **860** donne $A_{41} = 14{,}056$. Le même tableau donne S_{n+t-1} ou $S_{60} = 4327{,}434$.

Par conséquent la valeur d'une rente viagère de 1 fr. différée de 19 ans, pour une personne actuellement âgée de 41 ans, sera exprimée par

$$\frac{4327{,}434}{(1{,}045)^{19}.650} \quad \text{ou} \quad 2{,}8847\ldots \quad \text{ou} \quad 2{,}885.$$

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr. pendant 19 ans pour une personne de 41 ans est donc

$$14{,}056 - 2{,}885 \quad \text{ou} \quad 11{,}171.$$

On aura donc, puisque P = 1000 fr.,

$$p = \frac{1000^f}{1 + 11{,}171} = \frac{1000^f}{12{,}171} = 82^f{,}16.$$

928. 1° la formule [3] du numéro précédent donne

$$P = p.(1 + A_n^{n+t-1}).$$

Il s'agit donc d'abord de calculer A_n^{n+t-1}. Dans l'exemple actuel, on a

$$t = 15, \quad n = 62 - 15 = 47, \quad v_{47} = 607.$$

Le tableau du n° **860** donne $A_{47} = 12{,}672$.

Le même tableau donne $S_{47+15-1}$ ou $S_{61} = 4072{,}167$.

La valeur d'une rente viagère de 1 fr. différée de 14 ans, pour une personne âgée de 47 ans, est donc exprimée par

$$\frac{4072{,}167}{(1{,}045)^{14}.607}, \quad \text{ou} \quad 3{,}62244\ldots \quad \text{ou simplement} \quad 3{,}622.$$

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr., pendant 14 ans, pour une personne âgée de 47 ans est donc

$$12{,}672 - 3{,}622 \quad \text{ou} \quad 9{,}050.$$

Comme l'on a ici $p = 500$ fr., il viendra

$$P = 500^f.(1 + 9{,}050) = 500^f \times 10{,}050$$

ou

$$P = 5025^f.$$

2° La part demandée se déduira de la formule [2] du numéro

précédent, en divisant C par v_{62} ou par 437. En nommant x cette part, on aura donc

$$x = \frac{5025^{f}.(1,045)^{15}.607}{437} = 13507^{f},90.$$

929. On résoudra ce problème au moyen de la formule [3] du n° **927**, dans laquelle il faudra faire $p = 300$ fr., $n = 52$, $t = 15 - 7 = 8$.

Le tableau du n° **860** donne $A_{52} = 11,440$. Le même tableau donne S_{52+8-1} ou $S_{59} = 4584,147$. On a d'ailleurs $v_{52} = 560$. La valeur d'une rente viagère de 1 fr., différée de 8 — 1 ou 7 ans, pour une personne de 52 ans, est donc exprimée par

$$\frac{4584,147}{(1,045)^{7}.560}. \quad \text{ou} \quad 6,01529, \quad \text{ou plus simplement} \quad 6,015.$$

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr., pendant 7 ans, pour une personne de 52 ans est donc

$$11,440 - 6,015 \quad \text{ou} \quad 5,425.$$

La formule [3] du n° **927** donnera donc enfin

$$P = 300^{f}.(1 + 5,425) = 1927^{f},50.$$

930. On a $v_{45} = 622$ et $v_{49} = 590$. Le capital produit au bout de 15 ans par une mise annuelle de 600 fr. sera donc exprimé par

$$600^{f}.622.(1,045)^{15}.(1 + A_{45}^{59}),$$

en désignant par A_{45}^{59} la valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr. pendant 14 ans, sur la tête d'une personne de 45 ans (**927**).

Le capital produit au bout de 11 ans par une mise annuelle x sera exprimé à son tour par

$$x.590.(1,045)^{11}(1 + A_{49}^{59}),$$

en désignant de même par A_{49}^{59} la valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr. sur la tête d'une personne de 49 ans.

En égalant ces deux capitaux, on obtiendra l'expression de x

$$x = 600^{f}.\frac{622}{590}.(1,045)^{4}.\frac{1 + A_{45}^{59}}{1 + A_{49}^{59}}. \qquad [1]$$

Le tableau du n° **860** donne $A_{45} = 13,164$. Le même tableau donne $S_{59} = 4584,147$. La valeur d'une rente viagère de 1 fr.,

différée de 14 ans, pour une personne de 45 ans, sera donc exprimée par

$$\frac{4584,147}{(1,045)^{14}.622}, \quad \text{c'est-à-dire } 3,9796, \quad \text{ou simplement } 3,980.$$

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr., pendant 14 ans, sur une tête de 45 ans, est donc

$$13,164 - 3,980 \quad \text{ou} \quad 9,184.$$

On a donc $1 + A_{45}^{59} = 10,184$.

Le tableau du n° 860 donne $A_{49} = 12,419$. La valeur d'une rente viagère de 1 fr. différée de 10 ans, et sur la tête d'une personne de 49 ans, aura pour expression

$$\frac{4584,147}{(1,045)^{10}.590}, \quad \text{c'est-à-dire } 5,00315, \quad \text{ou simplement } 5,003.$$

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr., pendant 10 ans, sur une tête de 49 ans, est donc

$$12,419 - 5,003 \quad \text{ou} \quad 7,416.$$

On a donc $$1 + A_{49}^{59} = 8,416.$$

Par suite, la valeur de la mise annuelle cherchée peut s'écrire

$$x = 600^{f}.\frac{622}{590}.(1,045)^{4}.\frac{10,184}{8,416}$$

et, en effectuant les calculs, on obtient $x = 912^{f},78$.

951. 1° On doit d'abord traiter la question d'une manière générale.

Soit P la mise de chacun des associés, supposés âgés de n années; soit t la durée de l'association, et r l'intérêt annuel d'un franc.

Supposons, pour plus de simplicité, que le nombre primitif des associés soit v_n.

Au bout de la première année, le nombre des morts, d'après la table de mortalité sera $v_n - v_{n+1}$; et la somme qu'ils laisseront à la société, c'est-à-dire $P(v_n - v_{n+1})$, produira au bout de $t - 1$ années, avec les intérêts composés, un capital représenté par

$$P(v - v_{n+1}).(1 + r)^{t-1}.$$

Au bout de la deuxième année, le nombre des morts se sera

accru de $v_{n+1} - v_{n+2}$; et la somme laissée, savoir $P(v_{n+1} - v_{n+2})$, produira au bout de $t - 2$ années un capital exprimé par

$$P(v_{n+1} - v_{+2}).(1 + r)^{t-2}.$$

Au bout de la troisième année, le nombre des morts se sera accru de $v_{n+2} - v_{n+3}$, et la somme laissée, savoir $P(v_{n+2} - v_{n+3})$, produira au bout de $t - 3$ années, un capital représenté par

$$P(v_{n+2} - v_{n+3})(1 + r)^{t-3}.$$

Et ainsi de suite.

Au bout de la $(t - 1)^{ième}$ année, le nombre des morts se sera accru de $v_{n+t-2} - v_{n+t-1}$, et la somme laissée produira, au bout d'un an, le capital . . . . . $P(v_{n+t-2} - v_{n+t-1})(1 + r)$.

Enfin, au bout de la $t^{ième}$ année, le nombre des morts se sera encore accru de $v_{n+t-1} - v_{n+t-1}$, et la somme laissée $P(v_{n+t-1} - v_{n+t})$ ne produisant point d'intérêts, puisqu'on est arrivé à l'époque de la liquidation, conservera sa valeur.

Si, à la somme de tous ces capitaux, on ajoute les mises des v_{n+t} survivants, c'est-à-dire $P.v_{n+t}$, on obtiendra un capital total C, qui, divisé par v_{n+t} donnera la part de chacun de ces survivants.

Or le terme $+ P.v_{n+t}$ fait disparaître un terme égal, mais de signe contraire; et en réunissant les termes positifs entre eux et les termes négatifs entre eux, la valeur de C peut s'écrire

$$C = Pv_n(1+r)^{t-1}.\left[1 + \frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} \cdots + \frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}}\right]$$

$$- Pv_n(1+r)^t.\left[\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} \cdots + \frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}}\right].$$

La somme des termes qui suivent l'unité dans la première grande parenthèse est la valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr. pendant $t - 1$ années, sur une tête de n années (859,873). En désignant cette valeur par A_n^{n+t-1}, on pourra écrire

$$C = Pv_n(1+r)^{t-1}.(1 + A_n^{n+t-1}) - Pv_n(1+r)^t.A_n^{n+t-1}$$

ou $$C = Pv_n(1+r)^{t-1}(1 - rA_n^{n+t-1}). \qquad [1]$$

Et la part x de chacun des v_{n+t} survivants à l'époque de la liquidation sera

$$x = \frac{C}{v_{n+t}} = P.\frac{v_n}{v_{n+t}}.(1+r)^{t-1}.(1 - rA_n^{n+t-1}). \qquad [2]$$

2° Dans l'exemple proposé, on a $P = 1000$ fr., $v_{40} = 657$,

$$v_{60} = 463,\ r = 0{,}045,\ t = 20.$$

Le tableau du n° **860** donne $A_{40} = 14{,}254$. Le même tableau donne $S_{40+20-1}$ ou $S_{59} = 4584{,}147$. La valeur d'une rente viagère de 1 fr., différée de 19 ans, et sur la tête d'une personne de 40 ans, sera exprimée par $\frac{4584{,}147}{(1{,}045)^{19}.657}$, c'est-à-dire 3,0233... ou simplement 3,023.

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr. pendant 19 ans, sur une tête de 40 ans, est donc

$$14{,}254 - 3{,}023 \quad \text{ou} \quad 11{,}231.$$

Par conséquent on aura pour l'expression de x,

$$x = 1000^{f}.\frac{657}{463}.(1{,}045)^{19}.(1 - 0{,}045.11{,}231).$$

En effectuant les calculs indiqués, on trouve $x = 1619^{f},77$.

932. I. Le capital d'une rente viagère de 1 fr., sur une tête de 60 ans est, d'après le tableau du n° **860**, de $9^{f},346$; le capital d'une rente viagère de 1200 fr. dans les mêmes conditions, sera 1200 fois plus grand, c'est-à-dire $11215^{f},20$. Telle aurait dû être la part du sociétaire à l'époque de la liquidation. Les autres données étant les mêmes qu'au numéro précédent, on devra avoir, en désignant par P la mise demandée,

$$11215^{f},20 = P.\frac{657}{463}.(1{,}045)^{19}.(1 - 0{,}045.11{,}231)$$

ou $$11215^{f},20 = P \times 1{,}61977;$$

d'où l'on tire $$P = \frac{11215^{f},20}{1{,}61977} = 6923^{f},94.$$

II. On aurait pu obtenir cette valeur par une simple proportion; car les conditions étant les mêmes qu'au numéro précédent, on doit avoir

$$P : 1000^{f} = 1619^{f},77 : 11215^{f},20;$$

d'où l'on tire la même valeur pour P que ci-dessus.

933. 1° Conservons les notations du n° **931**; et supposons que le nombre primitif des associés soit v_n.

L'ensemble des mises primitives sera $P.v_n$. Au bout de la pre-

mière année, ce capital sera devenu $Pv_n(1+r)$; mais il devra être diminué des mises des sociétaires décédés pendant l'année, c'est-à-dire de $P(v_n - v_{n+1})$, ce qui donne

$$Pv_n(1+r) - P(v_n - v_{n+1}).$$

Au bout de la seconde année, ce capital sera multiplié par $1+r$, ce qui donne $Pv_n(1+r)^2 - P(v_n - v_{n+1})(1+r)$; mais il devra être diminué des mises des sociétaires décédés pendant l'année, c'est-à-dire de $P(v_{n+1} - v_{n+2})$, ce qui donne

$$Pv_n(1+r)^2 - P(v_n - v_{n+1})(1+r) - P(v_{n+1} - v_{n+2}).$$

Au bout de la troisième année, ce capital sera multiplié par $(1+r)$; mais il devra être diminué des mises des sociétaires décédés dans l'année, c'est-à-dire de $P(v_{n+2} - v_{n+3})$, ce qui donnera

$$Pv_n(1+r)^3 - P(v_n - v_{n+1})(1+r)^2 - P(v_{n+1} - v_{n+2})(1+r)$$
$$- P(v_{n+2} - v_{n+3}).$$

En continuant ainsi, on verra qu'au bout de la $t^{ième}$ année, c'est-à-dire à l'époque de la liquidation, le capital social C aura pour valeur

$$Pv_n(1+r)^t - P(v_n - v_{n+1})(1+r)^{t-1} - P(v_{n+1} - v_{n+2})(1+r)^{t-2} \ldots$$
$$\ldots - P(v_{n+t-2} - v_{n+t-1})(1+r) - P(v_{n+t-1} - v_{n+t}).$$

Cette valeur de C peut s'écrire

$$C = P(1+r)[v_n(1+r)^{t-1} + v_{n+1}(1+r)^{t-2} + \ldots + v_{n+t-1}] + Pv_{n+t}$$
$$- P[v_n(1+r)^{t-1} + v_{n+1}(1+r)^{t-2} + \ldots + v_{n+t-1}],$$

ou bien

$$C = Pr[v_n(1+r)^{t-1} + v_{n+1}(1+r)^{t-2} + \ldots + v_{n+t-1}] + Pv_{n+t},$$

ou encore

$$C = Prv_n(1+r)^{t-1}.\left[1 + \frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{v_{n+t-1}}{v_n(1+r)^{t-1}}\right] + Pv_{n+t}.$$

Or, la quantité qui suit l'unité dans la grande parenthèse est la valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr., pendant $t-1$

années, sur une tête de l'âge n; en la désignant, comme ci-dessus, par A_n^{n+t-1}, on aura donc

$$[1] \qquad C = Prv_n(1+r)^{t-1}.[1 + A_n^{n+t-1}] + Pv_{n+t}.$$

La part de chaque sociétaire, à l'époque de la liquidation, sera le quotient de C par v_{n+t}; en l'appelant x, on aura par conséquent

$$[2] \qquad x = Pr.\frac{v_n}{v_{n+t}}.(1+r)^{t-1}.(1 + A_n^{n+t-1}) + P.$$

Le premier terme de cette expression représente la quantité dont le capital primitif P s'est accru.

2° Dans l'exemple proposé, on a $P = 1000$ fr., $v_{40} = 657$, $v_{60} = 463$, $r = 0,045$, $t = 20$. On a d'ailleurs trouvé au n° **931**, $A_{40}^{59} = 11,231$; on aura donc

$$x = 1000^f.0,045.\frac{657}{463}.(1,045)^{19}(1 + 11,231) + 1000^f.$$

En effectuant les calculs, on trouvera $x = 2802^f,47$.

934. On a trouvé au n° **930**

$$1 + A_{45}^{59} = 10,184.$$

L'équation [1] du numéro précédent deviendra donc, en nommant P la mise demandée, et en remarquant qu'on a $v_{45} = 622$,

$$2802^f,47 = P.0,045.\frac{622}{463}.(1,045)^{14}.10,184 + P$$

ou, en effectuant les calculs indiqués dans le second membre,

$$2802^f,47 = P \times 2,140167;$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{2802^f,47}{2,140167} = 1309^f,46.$$

935. Soit p la mise annuelle de chaque sociétaire; et supposons toujours que leur nombre soit v_n.

Au début de l'association, la mise totale sera pv_n.

Au bout de la première année, la mise sera devenue $pv_n(1+r)$. A ce capital s'ajouteront les mises des survivants, c'est-à-dire pv_{n+1}; mais il faudra en retrancher les mises des

sociétaires morts dans l'année, c'est-à-dire $p(v_n - v_{n+1})$, ce qui donne

$$pv_n(1+r) + pv_{n+1} - p(v_n - v_{n+1}),$$

ou

$$pv_n.r + 2pv_{n+1}.$$

Au bout de la deuxième année, ce capital sera devenu

$$pv_n.r(1+r) + 2pv_{n+1}(1+r).$$

A ce capital s'ajouteront les mises des survivants ou pv_{n+2}; mais il en faudra retrancher le capital des mises fournies jusqu'alors par les sociétaires morts dans l'année, c'est-à-dire $2p(v_{n+1} - v_{n+2})$, ce qui donnera

$$pv_nr(1+r) + 2pv_{n+1}(1+r) + pv_{n+2} - 2p(v_{n+1} - v_{n+2}),$$

ou

$$pv_nr(1+r) + 2pv_{n+1}.r + 3pv_{n+2}.$$

Au bout de la troisième année, ce capital sera devenu

$$pv_nr(1+r)^2 + 2pv_{n+1}r(1+r) + 3pv_{n+2}(1+r).$$

A ce capital s'ajouteront les mises des survivants ou pv_{n+3}; mais il en faudra retrancher les mises fournies jusqu'alors par les sociétaires morts dans l'année, c'est-à-dire $3p(v_{n+2} - v_{n+3})$; ce qui donnera

$$pv_nr(1+r)^2 + 2pv_{n+1}r(1+r) + 3pv_{n+2}(1+r) + pv_{n+3} - 3p(v_{n+2} - v_{n+3}),$$

ou

$$pv_nr(1+r)^2 + 2pv_{n+1}r(1+r) + 3pv_{n+2}r + 4pv_{n+3}.$$

En continuant ainsi, on verra qu'au bout de la $t^{ième}$ année, le capital social aura pour valeur

$$pv_nr(1+r)^{t-1} + 2pv_{n+1}r(1+r)^{t-2} + 3pv_{n+2}r(1+r)^{t-3} + \ldots$$
$$+ tpv_{n+t-1}.r + (t+1)pv_{n+t}.$$

Si donc on désigne par x la part de chacun des v_{n+t} survivants à cette époque, qui est celle de la liquidation, on aura, en divisant par v_{n+t},

$$x = \frac{pr}{v_{n+t}}[v_n(1+r)^{t-1} + 2v_{n+1}(1+r)^{t-2} + 3v_{n+2}(1+r)^{t-3} \ldots$$
$$+ tv_{n+t-1}.] + (t+1)p.$$

Dans l'exemple proposé, on aura

$$x = \frac{p.0,045}{v_{60}} [v_{40}(1,045)^{19} + 2v_{41}(1,045)^{18} + 3v_{42}(1,045)^{17} \ldots + 20v_{59}]$$
$$+ 21.p.$$

Pour calculer la quantité entre parenthèses, on multipliera v_{40} ou 657 par 1,045 ; on ajoutera au produit 2 fois v_{41} ou 2 fois 650, et l'on multipliera la somme par 1,045 ; on ajoutera au produit $3v_{42}$ ou 3 fois 643, et l'on multipliera la somme par 1,045 ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait ajouté $20v_{59}$ ou 20 fois 476.

Le calcul, quoique long, n'est pas excessivement pénible ; et on l'abrégera en remarquant que pour multiplier un nombre par 1,045, il suffit d'y ajouter la moitié de son dixième et de retrancher le dixième de ce qu'on a ajouté. On trouvera ainsi

$$x = p.\frac{0,045 \times 158701,827}{463} + 21p$$

ou
$$x = p \times 36,42458.$$

Or, la valeur de x est supposée égale à 1000 fr. (933) ; on aura donc

$$p = \frac{1000^f}{36,42458} \quad \text{ou} \quad p = 27^f,45.$$

936. D'après la table de Deparcieux, sur 1286 enfants nés dans la même année, 814 seulement atteignent l'âge de 20 ans.

Soit x la mise unique demandée ; si chacun des 1286 enfants dont il s'agit verse la même mise, la mise totale sera $1286.x$. Au bout de 20 ans, les intérêts étant calculés à 4 pour 100, ce capital sera devenu

$$1286.x\,(1,04)^{20};$$

et ce capital définitif, divisé par 814, devra donner 24000 fr.

On aura donc

$$\frac{1286.x.(1,04)^{20}}{814} = 24000^f, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{24000^f \times 814}{1286.(1,04)^{20}}.$$

En effectuant les calculs, on trouve $x = 6933^f,10$.

937. La mise demandée s'obtiendra en remarquant qu'elle

doit produire une part de 24000 fr. au bout de 20 — 7 ou 13 ans. Or, le nombre des vivants de 7 ans est 906; on devra donc avoir

$$\frac{906.x(1,04)^{13}}{814} = 24000^{f}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{24000^{f} \times 814}{906.(1,04)^{13}}.$$

En effectuant ces calculs, on obtient $x = 12950^{f},12$.

938. Pour résoudre ce problème, il faudra faire usage de la formule [1] du n° **927**, dans laquelle on fera $C = 24000^{f} \times v_{20}$, ou $C = 24000^{f} \times 814$. On fera en outre v_n ou $v_0 = 1286$, $r = 0,04$, $t = 20$. Il restera à calculer A_n^{n+t-1} ou A_0^{19}.

Or la valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur la tête d'un enfant nouveau né est, d'après le tableau, 14,759. La valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur une tête de 19 ans est, d'après le même tableau, 18,054; il en résulte que la valeur d'une rente de 1 fr., sur la même tête, mais différée de 19 ans, est

$$\frac{S_{19}}{(1,04)^{19}.v_0} \quad \text{ou} \quad \frac{A_{19}.v_{19}}{(1,04)^{19}.v_0}, \quad \text{ou} \quad \frac{18,054 \times 821}{(1,04)^{19}.1286},$$

c'est-à-dire, en effectuant les calculs

$$5,47069, \quad \text{ou simplement} \quad 5,471.$$

Par conséquent, la valeur d'une rente viagère de 1 fr., pendant 19 ans, sur la tête d'un nouveau né, est

$$14,759 - 5,471 \quad \text{ou} \quad 9,288.$$

La formule citée donnera donc

$$24000^{f} \times 814 = p.1286.(1,04)^{20}.(1 + 9,288)$$

ou $$24000^{f} \times 814 = p.1286.(1,04)^{20}.10,288;$$

d'où l'on tire $$p = \frac{24000^{f} \times 814}{1286.(1,04)^{20}.10,288}$$

et, en effectuant les calculs, $p = 673^{f},90$.

939. On résoudra ce problème comme le précédent; mais il faudra, dans la formule [1] du n° **927**, remplacer v_n par v_7, et t par 13; et par conséquent A_n^{n+t-1} par A_7^{19}.

Le tableau du numéro précédent donne $A_7 = 19,131$; et $A_{19} = 18,054$. Il en résulte que la valeur d'une rente viagère de

1 fr. sur une tête de 7 ans, mais différée de 12 ans, a pour expression

$$\frac{S_{19}}{(1,04)^{12}.v_7}, \quad \text{ou} \quad \frac{A_{19}.v_{19}}{(1,04)^{12}.v_7}, \quad \text{ou} \quad \frac{18,054 \times 821}{(1,04)^{12}.906},$$

c'est-à-dire, en effectuant les calculs, 10,21852... ou simplement 10,219.

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr. pendant 12 ans, sur une tête de 7 ans, sera donc

$$19,131 - 10,219 \quad \text{ou} \quad 8,912.$$

On aura donc, d'après la formule citée,

$$24000^f \times 814 = p.906.(1,04)^{12}(1 + 8,912);$$

d'où $$p = \frac{24000^f \times 814}{906.(1,04)^{12}.9,912} = 1358^f,77.$$

940. Dans la formule [1] du n° **927**, il faut faire

$$p = 1000, \quad v_n = v_3 = 970, \quad r = 0,04, \quad t = 17.$$

Le tableau du n° **938** donne $A_3 = 18,738$ et $A_{19} = 18,054$.

La valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur une tête de 3 ans, mais différée de 19 — 3 ou 16 ans, a donc pour valeur

$$\frac{S_{19}}{(1,04)^{16}.v_3}, \quad \text{ou} \quad \frac{A_{19}.v_{19}}{(1,04)^{16}.v_3}, \quad \text{ou} \quad \frac{18,054.821}{(1,04)^{16}.970},$$

c'est-à-dire, en effectuant les calculs, 8,15852... ou simplement 8,159.

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr., pendant 16 ans, sur une tête de 3 ans est donc

$$18,738 - 8,159 \quad \text{ou} \quad 10,579.$$

La formule citée donnera donc

$$C = 1000^f.970.(1,04)^{16}(1 + 10,579)$$

ou, en effectuant les calculs $\log C = 7,3229762$.

Pour obtenir le montant de la dot, il faut diviser C par 814, nombre des survivants de 20 ans, ou, ce qui revient au même, il faut du logarithme de C retrancher celui de 814, qui est 2,9106244. On obtient ainsi 4,4123518 pour le logarithme de la dot, qui s'élève par conséquent à $25843^f,53$.

A l'âge de 30 ans, ce capital, placé d'abord à 66,50, puis racheté à 69,80, aura été augmenté dans le rapport du second nombre au premier, et sera devenu par conséquent

$$\frac{25843^{f},53 \times 69,80}{66,50}, \quad \text{ou} \quad 27126^{f}, \quad \text{à 1 centime près.}$$

La table du n° **860** donne $A_{55} = 10,691$. Par conséquent la valeur d'une rente viagère de 1 fr., sur une tête de 30 ans, mais différée de 15 ans, aura pour valeur (**871**)

$$\frac{S_{55}}{(1,045)^{15}.v_{30}}, \quad \text{ou} \quad \frac{A_{55}.v_{55}}{(1,045)^{15}.v_{30}}, \quad \text{ou} \quad \frac{10,691.526}{(1,045)^{15}.734},$$

c'est-à-dire, en effectuant les calculs, 3,9588.

En divisant le capital 27126 fr. par cette valeur d'une rente de 1 fr., on aura pour quotient le montant de la rente cherchée. On trouve ainsi $6852^{f},07$.

941. Pour une personne de 30 ans, on a $v_x = 734$. La formule devient donc

$$y = \frac{3670.1.}{734} = 5.$$

Pour une personne de 40 ans, on a $v_x = 657$. La formule devient donc

$$y = \frac{3670.(1,01)^{10}}{657}, \quad \text{ou} \quad y = 6,02.$$

Pour une personne de 50 ans, on a

$$y = \frac{3670.(1,01)^{20}}{581}, \quad \text{ou} \quad y = 7,70.$$

Pour une personne de 60 ans, on a

$$y = \frac{3670.(1,01)^{30}}{463}, \quad \text{ou} \quad y = 10,68.$$

Enfin, pour une personne de 70 ans, on a

$$y = \frac{3670.(1,01)^{40}}{310}, \quad \text{ou} \quad y = 17,62.$$

942. 1° Si l'on met pour y_t sa valeur donnée par la formule du numéro précédent, c'est-à-dire

$$a.\frac{3670.(1.01)^t}{v_{n+t}},$$

on obtient

$$a.\frac{3670}{v_n}.\frac{(1,01)^t}{(1+r)^t} \quad \text{on} \quad a.\frac{3670}{v_n}\left(\frac{1,01}{1+r}\right)^t.$$

En donnant à t toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $m-1$, on aura tous les termes qui composent la valeur cherchée. Or, ces termes pourront s'écrire

$$a.\frac{3670}{v_n}\left[1+\left(\frac{1,01}{1+r}\right)^1+\left(\frac{1,01}{1+r}\right)^2+\left(\frac{1,01}{1+r}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1,01}{1+r}\right)^{m-1}\right].$$

La quantité entre parenthèses est la somme des termes d'une progression par quotient dont le premier terme est 1, la raison $\left(\frac{1,01}{1+r}\right)$, et qui a m termes; la valeur de cette expression est donc, en la désignant par P,

$$[1] \qquad P = a.\frac{3670}{v_n}.\frac{1-\left(\frac{1,01}{1+r}\right)^m}{1-\left(\frac{1,01}{1+r}\right)}.$$

2° Dans l'exemple proposé, on a $n = 30$, $m = 40$, $r = 0,045$, $a = 3^f$ et v_n ou $v_{30} = 734$. D'ailleurs, on trouvera

$$\frac{1,01}{1,045} = 0,966507,$$

on aura donc

$$P = 3^f.\frac{3670}{734}.\frac{1-(0,966507)^{40}}{1-0,966507}.$$

En effectuant les calculs, on trouvera

$$P = 15^f \times 22,21423\ldots = 333^f,21.$$

943. Dans la formule [1] du numéro précédent, on fera

$$P = 280^f, \quad n = 38, \quad \text{d'où} \quad v_n = 671, \quad m = 27, \quad r = 0,04.$$

On trouvera $\qquad \frac{1,01}{1,04} = 0,971154.$

Il viendra donc

$$280^f = a.\frac{3670}{671}.\frac{1-(0,971154)^{27}}{1-0,971154}$$

ou, en effectuant les calculs du second membre,

$$280^f = a \times 103{,}58128\ldots,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{280}{103{,}58128\ldots} = 2^f{,}703\ldots$$

ou à peu près $2^f{,}70$.

944. Il faut d'abord calculer la valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr., pendant 40 ans, sur une tête de 30 ans, les intérêts étant à $4\frac{1}{2}$ pour 100.

La table du n° **860** donne $A_{30} = 15{,}691$ et $A_{70} = 6{,}221$.

Il en résulte que la valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur une tête de 30 ans, mais différée jusqu'à 70, est (**871**)

$$\frac{S_{70}}{(1{,}045)^{40}.v_{30}}, \quad \text{ou} \quad \frac{A_{70}.v_{70}}{(1{,}045)^{40}.v_{30}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{6{,}221.310}{(1{,}045)^{40}.734},$$

ou, en effectuant les calculs, 0,451725, ou simplement 0,452.

La valeur d'une rente viagère temporaire de 1 fr. pendant 40 ans sur une tête de 30 ans est donc

$$15{,}691 - 0{,}452, \quad \text{ou} \quad 15{,}239.$$

En appelant p la prime annuelle demandée, on devra donc avoir

$$p + p \times 15{,}239 = 333^f{,}21\,;$$

d'où

$$p = \frac{333^f{,}21}{16{,}239} = 20^f{,}52.$$

945. On calculera d'abord la prime à payer pour obtenir le traitement en cas de maladie. Pour cela, dans la formule [1] du n° **942**, on fera $a = 2^f{,}50$, v_n ou $v_{37} = 678$, $r = 0{,}045$, et $m = 20$. On trouvera d'ailleurs

$$\frac{1{,}01}{1{,}045} = 0{,}966507.$$

Il viendra donc

$$P = 2^f{,}50.\frac{3670}{678}.\frac{1 - (0{,}966507)^{20}}{1 - 0{,}966507}$$

et, en effectuant les calculs, $P = 199^f{,}62$.

Ajoutant $\frac{1}{2}$ pour 100, ou $0^f{,}99$, on obtient $200^f{,}61$.

Retranchant cette somme de 1800 fr., on obtient pour reste $1599^f{,}39$, qui représente la valeur de la rente viagère, augmentée des 3 pour 100, ou multipliée par $\frac{103}{100}$; on obtiendra donc la

valeur même de cette rente viagère en divisant $599^f,39$ par $\frac{103}{100}$, ou en en prenant les $\frac{100}{103}$, ce qui donne $1552^f,80$.

Or, la valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur une tête de 57 ans est, d'après le tableau du n° **860**, de $10^f,163$. La valeur d'une pareille rente sur une tête de 37 ans, mais différée de 20 ans, est donc (**871**)

$$\frac{S_{57}}{(1,045)^{20}.v_{37}} = \frac{A_{57}.v_{57}}{(1,045)^{20}.v_{37}} = \frac{10^f,163.502}{(1,045)^{20}.678}$$

ou, en effectuant les calculs, $3^f,12011$.

La rente cherchée sera donc le quotient de $1552^f,80$ par 3,12011, c'est-à-dire $497^f,67$.

946. Il faut d'abord, dans la formule [1] du n° **942**, faire $a = 3^f$, $n = 44$, d'où $v_{44} = 629$, $r = 0,045$, et $m = 16$.

On a vu que $\frac{1,01}{1,045} = 0,966507$; on aura donc d'abord, pour la prime concernant le traitement de maladie du mari,

$$P = 3^f.\frac{3670}{629}.\frac{1-(0,966507)^{16}}{1-(0,966507)}$$

ou

$$P = \frac{138128^f,80}{629} = 219^f,60.$$

Pour le traitement de maladie de la femme, on n'a qu'à remplacer v_{44} par v_{39}, c'est-à-dire 629 par 664, ce qui donne

$$P' = \frac{138128^f,80}{664} = 208^f,02.$$

D'après le tableau du n° **877**, la valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur deux têtes de $44+16$ et $39+16$, ou 60 et 55 ans, est 7,394. D'ailleurs, d'après le tableau du n° **860**, on a

$$A_{55} = 10,691 \quad \text{et} \quad A_{60} = 9,346.$$

La valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur deux têtes âgées de 55 ans et de 60 ans, jusqu'au dernier décès, est donc (**882**)

$$10,691 + 9,346 - 7,394, \quad \text{ou} \quad 12,643.$$

Par conséquent une rente viagère de 1 fr. sur deux têtes âgées de 39 et 44 ans, jusqu'au dernier décès, mais *différée* de 16 ans, a pour valeur (**890**)

$$\frac{12,643.v_{55}.u_{60}}{(1,045)^{16}.v_{39}.u_{44}} \quad \text{ou} \quad \frac{12,643.526.463}{(1,045)^{16}.664.629} = 3,64533.$$

Une rente viagère de 600 fr. dans les mêmes conditions aura donc pour valeur $3^f,64533 \times 600$ ou $2187^f,20$.

La somme totale à verser sera la somme des trois quantités

$$219^f,60, \quad 208^f,02, \quad \text{et} \quad 2187^f,20,$$

c'est-à-dire $2614^f,82$.

§ 6. De la caisse d'épargne et de la caisse des retraites pour la vieillesse.

947. Il faut d'abord retrancher une semaine, puisque les intérêts ne commencent à courir que du dimanche qui suit le dépôt. On aura donc à chercher l'intérêt de 75 fr., à $3\frac{1}{2}$ pour 100, pendant 37 semaines, ou 37 fois 7 jours. La formule qui donne cet intérêt est

$$x = \frac{75^f \times 0,035 \times 37 \times 7}{52 \times 7} = \frac{75^f \times 0,035 \times 37}{52},$$

c'est-à-dire qu'il faut *multiplier la somme déposée par l'intérêt annuel d'un franc et par le nombre de semaines, et diviser le produit par* 52. En effectuant le calcul, on trouve $x = 1^f,86$.

948. Il reste jusqu'à la fin de l'année $52 - 11$ ou 41 semaines; il faut en retrancher une pour ne faire courir les intérêts que du dimanche qui suit le dépôt; restent donc 40 semaines. En appliquant la règle obtenue au numéro précédent, aura

$$x = \frac{235^f \times 0,035 \times 40}{52} = 6^f,32.$$

949. Il reste jusqu'à la fin de l'année $52 - 44$ ou 8 semaines; d'après la règle du n° **947** on aura donc

$$x = \frac{235^f \times 0,035 \times 8}{52} = 1^f,26.$$

950. I. Pour obtenir les intérêts à ajouter au capital retiré, il suffit de retrancher les intérêts rétrogrades des intérêts anticipés, ce qui donne $6^f,32 - 1^f,26$, ou $5^f,06$. La somme à payer au déposant sera donc $241^f,06$.

II. La règle que nous venons de suivre est celle qui est adoptée par la Caisse d'épargne. On peut en vérifier le résultat directement.

Puisqu'au moment du dépôt il y avait 11 semaines d'écoulées sur l'année, les intérêts ont commencé à courir après 12 semaines. D'ailleurs ils ont cessé après 44 semaines. Ils ont donc couru pendant 44 — 12 ou 32 semaines; par conséquent ils s'élèvent à une somme représentée par

$$\frac{235^f \times 0{,}035 \times 32}{52}, \quad \text{ou} \quad 5^f{,}06$$

comme ci-dessus.

951. On déterminera d'abord les intérêts anticipés, on en retranchera les intérêts rétrogrades, et à la différence on ajoutera celle des capitaux versés et retirés. Le calcul est indiqué dans le tableau ci-dessous :

Sommes versées.	Sommes retirées.	Nombre de semaines d'intérêt.	Intérêts anticipés.	Intérêts rétrogrades.
120f	»	40	3f,23	»
130	»	35	3 ,06	»
150	»	31	3 ,12	»
100	»	28	1 ,83	»
»	75f	25	»	1f,26
180	»	19	2 ,30	»
250	»	15	2 ,52	»
»	65	13	»	0 ,56
115	»	7	0 ,54	»
90	»	5	0 ,30	»
1135f	140f		16f,95	1f,82
140			1 ,82	
995f différence des capitaux.			15f,13 différ. des intérêts.	
15 ,13				
1010f,13 somme à payer.				

La somme à inscrire au compte du déposant sera donc 1010f,13.

952. Il faut d'abord ajouter au compte du déposant les intérêts de 1010 fr. pendant 3 mois ou 13 semaines, c'est-à-dire 8f,84, ce qui donne 1018f,97.

Les 10 fr. de rentes 4 ½ pour 100 au cours de 90, ont une valeur exprimée par

$$\frac{90^f \times 10}{4{,}5}, \quad \text{ou} \quad 200^f.$$

Il restera donc au compte du déposant 818f,97.

953. Comme il y a 52 dimanches, le capital déposé s'élevait d'abord à $6^f \times 52$ ou 312 fr.

Soient n, n', n'', etc., les nombres de semaines écoulées depuis le dimanche qui suit chaque dépôt jusqu'à la fin de l'année; les intérêts produits par ces dépôts successifs seront exprimés par

$$\frac{6^f \times 0{,}035.n}{52}, \quad \frac{6^f \times 0{,}035.n'}{52}, \quad \frac{6^f \times 0{,}035.n''}{52}, \quad \text{etc.},$$

et la somme de ces intérêts pourra s'écrire

$$\frac{6^f \times 0{,}035}{52}.(n + n' + n'' + \text{etc.}).$$

Or, la quantité entre parenthèses n'est autre chose que la suite naturelle des nombres, décroissants depuis 51 jusqu'à 1; la somme de ces nombres est

$$\frac{(51+1).51}{2} \quad \text{ou} \quad 26 \times 51;$$

la somme des intérêts que l'on veut obtenir est donc

$$\frac{6^f \times 0{,}035 \times 26 \times 51}{52} \quad \text{ou} \quad \frac{6^f \times 0{,}035 \times 51}{2}.$$

En effectuant le calcul, on trouve $5^f{,}36$. L'avoir du déposant s'élevait donc à $317^f{,}36$.

954. Les versements de la seconde année produiront, comme ci-dessus, $317^f{,}36$. Quant à ceux de la première année, il faut d'abord en réduire le produit à 317 fr., puisque les centimes qui suivent ne rapportent point d'intérêt; puis il faut chercher l'intérêt de ces 317 fr. au bout de 52 semaines. On trouve $11^f{,}09$. L'avoir du déposant se composera donc de $317^f{,}36$, plus encore 317,36, plus $11^f{,}09$; en tout $645^f{,}81$.

955. Il pourra continuer pendant plus d'une année; à la fin de la 3e, son avoir se composera de $317^f{,}36$, produits pendant cette année, plus $645^f{,}81$, produits pendant les 2 années précédentes, plus les intérêts de 645 fr. pendant un an, c'est-à-dire $22^f{,}57$, en tout $985^f{,}74$.

Cette somme diffère de 1000 fr. de $14^f{,}26$; le déposant ne pourra donc continuer à placer 6 fr. par dimanche que pendant 2 semaines encore; en tout 14 semaines à partir de la fin de la seconde année.

956. Au bout de 14 semaines, le compte du déposant s'élèvera à $985^f{,}74 + 12^f$, c'est-à-dire $997^f{,}74$.

Or, 20 fr. de rentes $4\frac{1}{2}$ pour 100 au cours de $91^f,50$ valent une somme marquée par

$$\frac{91^f,50 \times 20}{4,50}, \quad \text{ou} \quad 406^f,67.$$

Le compte se trouvera donc réduit par cet achat à

$$997^f,74 - 406^f,67 \quad \text{ou} \quad 591^f,07.$$

Le compte du déposant à la fin de la 4e année comprendra :

1° Les 317,36 résultant des versements de l'année;

2° Les intérêts de 985 fr. pendant 2 semaines, ou $1^f,33$;

3° La somme de $591^f,07$ restée inscrite sur le compte;

4° Enfin les intérêts de 591 fr. pendant 50 semaines, c'est-à-dire $19^f,89$; en tout, $929^f,65$.

957. On a vu (953) qu'en plaçant 6 fr. tous les dimanches à la caisse d'épargne, l'ouvrier peut disposer à la fin de l'année d'un capital de $317^f,36$.

Cette somme, placée chaque année à $4\frac{1}{2}$ pour 100 et à intérêts composés, produira au bout de 30 ans un capital définitif exprimé par

$$\frac{317^f,36.[(1,045)^{30} - 1]}{0,045}, \quad \text{ou} \quad 19361^f,22.$$

D'après la table du n° 860, la valeur d'une rente viagère de 1 fr. sur une tête de 55 ans est 10,691; la rente viagère demandée sera donc le quotient de $19361^f,22$ par 10,691, c'est-à-dire $1810^f,98$.

958. Il disposerait à 55 ans d'une somme égale au sixième de $19361^f,22$, c'est-à-dire de $3226^f,87$; et il pourrait jouir, à partir de cet âge, d'une rente annuelle égale au sixième de $1810^f,98$, c'est-à-dire d'une rente de $301^f,83$.

959. Leur versement hebdomadaire étant de 3 fr., ils disposeraient au bout de 30 ans d'un capital égal à la moitié de $19361^f,22$, c'est-à-dire de $9680^f,61$.

D'après la table du n° 860, on a

$$A_{50} = 11,921 \quad \text{et} \quad A_{55} = 10,691,$$

et la table du n° 877 donne $A_{50.55} = 8,602$; la valeur d'une rente viagère de 1 fr. constituée sur deux têtes de 50 et de 55 ans jusqu'au dernier décès est donc (882)

$$11^f,921 + 10^f,691 - 8^f,602 \quad \text{ou} \quad 14^f,010.$$

La rente viagère demandée serait donc le quotient de $9680^f,61$ par 14,01, c'est-à-dire $690^f,98$.

960. Si l'on appelle r l'intérêt trimestriel d'un franc, et a la somme placée, quelle qu'elle soit, on devra avoir au bout d'un semestre

$$a(1+r)^2 = a.1,0225;$$

d'où $$\log(1+r) = \tfrac{1}{2}.\log 1,0225.$$

Pour obtenir le nombre de décimales demandé, il faut faire usage de la table I qui suit, dans Callet, la table des logarithmes des nombres de 1 à 108000, et qui donne avec 20 décimales ceux des nombres de 1 à 1200. On remarque que le nombre 10225 est le produit de 409 par 25. Or la table I donne, en ne prenant que les 11 premières décimales,

$$\log 409 = 2,61172330800...$$

et $$\log 25 = 1,39794000867...$$

d'où $$\log 10225 = 4,00966331667$$

et $$\log 1,0225 = 0,00966331667$$

puis $$\tfrac{1}{2}\log 1,0225 = 0,00483165833....$$

En ne prenant que les 10 premières décimales, on peut donc écrire

$$\log(1+r) = 0,0048316583.$$

Pour obtenir $1+r$, on extraira simplement la racine carrée de 1,0225, ce qui donne

$$1+r = 1,01118742;$$

d'où $$r = 0,01118742.$$

La table ordinaire donnera ensuite

$$\log r = \bar{2},0487300.$$

961. D'après la table de Deparcieux, le nombre des vivants de 40 ans est 657, et celui des vivants de 41 ans est 650. Il en résulte que le nombre des morts de l'année est 657 — 650 ou 7.

Si ces morts sont distribués uniformément par trimestre, il y en aura $\frac{7}{4}$ ou 1,75 pour chacun. Les nombres demandés seront donc :

A 40 ans		657,00
A 40 ans 3 mois	657 — 1,75 ou	655,25

A 40 ans 6 mois	655,25 — 1,75 ou	653,50
A 40 ans 9 mois	653,50 — 1,75 ou	651,75
A 41 ans....	651,75 — 1,75 ou	650,00

962. Le nombre des vivants de 73 ans est 251; et le nombre des vivants de 74 ans est 231; le nombre des morts de l'année est donc 20, dont le quart est 5; on aura donc :

A 73 ans.		251 survivants.
A 73 ans 3 mois	251 — 5 ou	246 —
A 73 ans 6 mois	246 — 5 ou	241 —
A 73 ans 9 mois	241 — 5 ou	236 —
A 74 ans	236 — 5 ou	231 —

963. Pour calculer cette série, on commencera par déterminer d'après la table de Deparcieux, et en se conformant à l'hypothèse indiquée au n° **961**, les valeurs de v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, etc., jusqu'à v_{379}; et l'on cherchera les logarithmes de ces valeurs.

Ayant le logarithme de $1 + r$ (**960**), on le multipliera par 12 pour avoir le logarithme de $(1 + r)^{12}$; puis on ajoutera successivement $\log(1 + r)$, puis encore $\log(1 + r)$, et ainsi de suite; et l'on formera les logarithmes de $(1 + r)^{13}$, de $(1 + r)^{14}$, de $(1 + r)^{15}$; et ainsi de suite jusqu'au logarithme de $(1 + r)^{379}$. On pourra alors, par une simple soustraction, obtenir le logarithme d'un terme quelconque de la série, et trouver le nombre correspondant.

Mais il faudra commencer par le dernier $\frac{v_{379}}{(1 + r)^{379}}$, puis l'avant-dernier $\frac{v_{378}}{(1 + r)^{378}}$, puis le précédent $\frac{v_{377}}{(1 + r)^{377}}$; et ainsi de suite, en rétrogradant toujours, jusqu'au premier terme $\frac{v_{12}}{(1 + r)^{12}}$.

Le dernier terme sera lui-même la valeur de Z_{379}; en y ajoutant le terme précédent, on aura la valeur de Z_{378}; en ajoutant à la somme le terme précédent, on aura la valeur de Z_{377}; puis en ajoutant à cette nouvelle somme le terme précédent, on aura la valeur de Z_{376}; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait ajouté le premier terme $\frac{v_{12}}{(1 + r)^{12}}$; à cet instant la somme obtenue sera la valeur de Z_{12}.

On pourra ensuite ranger les valeurs de Z_m dans l'ordre croissant des indices m; et l'on formera le tableau suivant, où les valeurs de Z_m relatives aux quatre trimestres d'une même année, sont placées dans une même ligne horizontale.

Tableau des valeurs de Z_m correspondantes à chaque trimestre.

Trim.	Z.	Trim.	Z.	Trim.	Z.	Trim.	Z.
12	60337,219	13	59462,195	14	58603,341	15	57760,409
16	56933,149	17	56121,319	18	55323,022	19	54538,060
20	53766,235	21	53007,351	22	52260,426	23	51525,287
24	50801,766	25	50089,695	26	49388,342	27	48697,557
28	48017,191	29	47347,098	30	46686,773	31	46036,082
32	45394,891	33	44763,071	34	44140,320	35	43526,513
36	42921,530	37	42325,250	38	41737,223	39	41157,340
40	40585,493	41	40021,574	42	39465,163	43	38916,160
44	38374,471	45	37840,001	46	37312,353	47	36791,442
48	36277,183	49	35769,494	50	35268,291	51	34773,493
52	34285,020	53	33802,792	54	33326,731	55	32856,760
56	32392,802	57	31934,781	58	31482,623	59	31036,255
60	30595,603	61	30160,596	62	29731,163	63	29307,233
64	28888,738	65	28475,608	66	28067,899	67	27665,540
68	27268,463	69	26876,600	70	26489,886	71	26108,252
72	25731,636	73	25359,971	74	24993,196	75	24631,246
76	24274,061	77	23921,579	78	23573,739	79	23230,483
80	22891,751	81	22557,486	82	22227,730	83	21902,427
84	21581,516	85	21264,942	86	20592,647	87	20644,575
88	20340,672	89	20040,882	90	19745,152	91	19353,428
92	19165,659	93	18881,793	94	18601,777	95	18325,562
96	18053,099	97	17784,337	98	17519,228	99	17257,725
100	16999,780	101	16745,346	102	16494,377	103	16246,828
104	16002,653	105	15761,809	106	15524,251	107	15289,936
108	15058,822	109	14830,867	110	14606,028	111	14384,265
112	14165,537	113	13949,805	114	13737,028	115	13527,168
116	13320,186	117	13116,045	118	12914,706	119	12716,133
120	12520,289	121	12327,138	122	12136,644	123	11948,772
124	11763,488	125	11580,758	126	11400,547	127	11222,822
128	11047,550	129	10874,699	130	10704,236	131	10536,131
132	10370,350	133	10206,865	134	10045,643	135	9886,6552
136	9729,8723	137	9575,2644	138	9422,8027	139	9272,4585
140	9124,2037	141	8978,0105	142	8833,8513	143	8691,6991
144	8551,5271	145	8413,3088	146	8277,0183	147	8142,6297
148	8010,1177	149	7879,4572	150	7750,5758	151	7623,4501
152	7498,0571	153	7374,3740	154	7252,3782	155	7132,0476
156	7013,3603	157	6896,2947	158	6780,8294	159	6666,9433
160	6554,6156	161	6443,8258	162	6334,5535	163	6226,7788
164	6120,4819	165	6015,6432	166	5912,2435	167	5810,2639
168	5709,6856	169	5610,4900	170	5512,6588	171	5416,1741
172	5321,0180	173	5227,1728	174	5134,6213	175	5043,3463
176	4953,3308	177	4864,5583	178	4777,0121	179	4690,6761
180	4605,5341	181	4521,5703	182	4438,7691	183	4357,1150
184	4276,5928	185	4197,1874	186	4118,9159	187	4041,7629
188	3965,7133	189	3890,7520	190	3816,8643	191	3744,0357
192	3672,2516	193	3601,4981	194	3531,7901	195	3463,1133
196	3395,4534	197	3328,7962	198	3263,1279	199	3198,4347
200	3134,7031	201	3071,9197	202	3010,0982	203	2949,2248
204	2889,2862	205	2830,2691	206	2772,1860	207	2715,0235
208	2658,7684	209	2603,4075	210	2548,9279	211	2495,3170
212	2442,5622	213	2390,6510	214	2339,5713	215	2289,3111
216	2239,8584	217	2191,2015	218	2143,3513	219	2096,2958
220	2050,0235	221	2004,5224	222	1959,7814	223	1915,7893
224	1872,5348	225	1830,0072	226	1788,1955	227	1747,0891
228	1706,6776	229	1666,9506	230	1627,9175	231	1589,5678
232	1551,8911	233	1514,8773	234	1478,5162	235	1442,7981
236	1407,7130	237	1373,2514	238	1339,4037	239	1306,1607
240	1273,5130	241	1241,4516	242	1209,9674	243	1179,0517
244	1148,6957	245	1118,8908	246	1089,6285	247	1060,0004

Trim.	Z.	Trim.	Z.	Trim.	Z.	Trim.	Z.
248	1032,6985	249	1005,0144	250	977,85585	251	951,21464
252	925,08263	253	899,45181	254	874,31429	255	849,66229
256	825,48815	257	801,78430	258	778,54330	259	755,75781
260	733,42060	261	711,52454	262	690,07630	263	669,06866
264	648,49449	265	628,34678	266	608,63171	267	589,34217
268	570,47117	269	552,01180	270	533,96980	271	516,33820
272	499,11012	273	482,27879	274	465,84953	275	449,81551
276	434,17000	277	418,90636	278	404,02953	279	389,53281
280	375,40962	281	361,65346	282	348,25793	283	335,21675
284	322,52372	285	310,17272	286	298,16824	287	286,50412
288	275,17429	289	264,17279	290	253,49375	291	243,13137
292	233,07995	293	223,33388	294	213,88763	295	204,73577
296	195,87293	297	187,29385	298	178,99332	299	170,96623
300	163,20754	301	155,71231	302	148,46687	303	141,46661
304	134,70699	305	128,18355	306	121,89187	307	115,82765
308	109,98660	309	104,36454	310	98,957340	311	93,760926
312	88,771299	313	83,984521	314	79,389029	315	74,981174
316	70,757368	317	66,714078	318	62,847826	319	59,155191
320	55,277350	321	52,277350	322	49,078536	323	46,033306
324	43,138653	325	40,391619	326	37,782567	327	35,308780
328	32,967586	329	30,756350	330	28,659622	331	26,675139
332	24,800674	333	23,034035	334	21,360762	335	19,779006
336	18,286946	337	16,882792	338	15,558897	339	14,313656
340	13,145492	341	12,052851	342	11,028578	343	10,071293
344	9,1796394	345	8,3522820	346	7,5825245	347	6,8691937
348	6,2111351	349	5,6072129	350	5,0460129	351	4,5266633
352	4,0483071	353	3,6101004	354	3,2062891	355	2,8361658
356	2,4990343	357	2,1942100	358	1,9163090	359	1,6647731
360	1,4390527	361	1,2386075	362	1,0584007	363	0,8980089
364	0,7570157	365	0,6350116	366	0,5272846	367	0,4335337
368	0,3534627	369	0,2867806	370	0,2290792	371	0,1801681
372	0,1398597	373	0,1079698	374	0,0803749	375	0,0569848
376	0,0377078	377	0,0224569	378	0,0111453	379	0,0036876

964. Puisqu'il est né le 12 mars 1834, son âge doit être calculé comme s'il était né le 1er avril de la même année. Au 1er avril 1857 il a donc eu 1857 — 1834 ou 23 ans.

Son versement ne portant intérêt qu'à dater du 1er janvier 1858, est censé fait ce jour-là. Le déposant est donc considéré comme ayant, au moment du versement, 23 ans et 9 mois.

Il sera considéré comme ayant 55 ans le 1er avril de l'année 1834 + 55 ou 1889; et c'est à cette date que commencera à courir la rente viagère. Le temps écoulé depuis le versement sera 55 ans moins 23 ans 9 mois, c'est-à-dire 31 ans 3 mois ou un nombre de trimestres marqué par $31 \times 4 + 1$ ou 125 trimestres.

Le titulaire aura droit à toucher le premier quartier de la rente le 1er juillet 1889.

965. Soit a la rente viagère trimestrielle; soit m le rang, à partir de la naissance, du trimestre où cette rente doit commencer à courir; et soit n le rang, à partir de la naissance, du trimestre qui suit immédiatement celui où le versement s'opère.

Désignons en général par v_n le nombre des survivants au commencement du trimestre de rang n.

Sans la circonstance particulière indiquée dans l'énoncé, la rente dont il s'agit serait une rente viagère différée ordinaire; et, d'après ce qui a été dit au n° **871**, sa valeur serait exprimée par

$$\frac{a}{v_n.(1+r)^{m-n}}\left[\frac{v_{m+1}}{1+r}+\frac{v_{m+2}}{(1+r)^2}+\frac{v_{m+3}}{(1+r)^3}+\ldots\right].$$

Cette formule peut s'écrire

$$[1]\quad \frac{a(1+r)^n}{v_n}\left[\frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}}+\frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}}+\frac{v_{m+3}}{(1+r)^{m+3}}+\ldots\right].$$

Maintenant, pour tenir compte de la circonstance dont il s'agit, on raisonnera de la manière suivante. Le nombre des morts du trimestre $m+1$ est $v_m - v_{m+1}$; la probabilité que ce nombre de décès aura lieu sur v_n vivants à l'époque du versement est

$$\frac{v_m - v_{m+1}}{v_n}.$$

La somme à payer par le Trésor à la famille de chaque décédé est $\frac{1}{2}a$, somme qui, ramenée à la valeur qu'elle aurait à l'époque du versement, devient

$$\frac{\frac{1}{2}a}{(1+r)^{m-n+1}}.$$

L'espérance mathématique correspondante pour la famille de chacun des décédés est donc

$$\frac{\frac{1}{2}a(v_m - v_{m+1})}{v_n(1+r)^{m-n+1}}.$$

On verrait de même que pour les trimestres $m+2$, $m+3$, etc., l'espérance mathématique, pour la famille de chacun des décédés de ces trimestres, de toucher la somme $\frac{1}{2}a$, est respectivement

$$\frac{\frac{1}{2}a(v_{m+1} - v_{m+2})}{v_n(1+r)^{m-n+2}},\quad \frac{\frac{1}{2}a(v_{m+2} - v_{m+3})}{v_n(1+r)^{m-n+3}},\ \text{etc.}$$

Il faut donc, pour obtenir la valeur de la rente viagère à l'époque du versement, ajouter à la formule [1] la somme de ces espérances mathématiques.

Or, cette somme peut s'écrire

$$[2]\quad \frac{\frac{1}{2}a(1+r)^n}{v_n}\left[\frac{v_m - v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+1} - v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \frac{v_{m+2} - v_{m+3}}{(1+r)^{m+3}} + \ldots\right];$$

et il reste à faire la somme des formules [1] et [2].

Si l'on met à part le facteur $\frac{a(1+r)^n}{v_n}$ commun aux deux formules, et qu'on fasse la somme de tous les termes positifs de la seconde, on obtient d'abord, en ayant égard au facteur $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{v_m}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+2}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+3}} + \ldots\right]$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+r)}\left[\frac{v_m}{(1+r)^m} + \frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \ldots\right],$$

ou, d'après la notation adoptée au n° **963**,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+r)}\cdot Z_{m-1}.$$

Si maintenant on réduit les termes de la formule [1] avec les termes négatifs de la formule [2], on trouve

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \frac{v_{m+3}}{(1+r)^{m+3}} + \ldots\right]$$

ou bien $$+\frac{1}{2}\cdot Z_m.$$

En réunissant ces deux résultats, il vient donc

$$\frac{1}{2}\cdot\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right].$$

Rétablissant enfin le facteur commun $\frac{a(1+r)^n}{v_n}$, qui avait été mis à part, et désignant la valeur cherchée par P, on obtient

$$P = \frac{a(1+r)^n}{2v_n}\cdot\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]. \qquad [3]$$

Mais $\frac{v_n}{(1+r)^n}$ n'est autre chose que $Z_{n-1} - Z_n$; on peut donc écrire

$$P = a\,\frac{\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]}{[Z_{n-1} - Z_n]}; \qquad [4]$$

c'est l'expression demandée.

966. On a ici $a = \frac{750^f}{4} = 187^f,50$. D'ailleurs 55 ans font 220 trimestres; l'époque de l'entrée en jouissance correspond donc au 221e trimestre, et l'on a $m = 221$. L'âge du déposant, au moment du versement, est, comme on l'a vu, 23 ans 9 mois, ou 95 trimestres; ainsi $n = 96$.

La table du n° **963** donne $Z_{221} = 2004,5224$ et $Z_{220} = 2050,0234$. On en déduit, avec le secours des logarithmes,

$$\frac{Z_{220}}{1+r} = 2027,3424,$$

d'où
$$\tfrac{1}{2} \cdot \left[Z_{221} + \frac{Z_{220}}{1+r} \right] = 2015,9324.$$

La même table donne $Z_{96} = 18053,771$ et $Z_{95} = 18325,562$, d'où $Z_{95} - Z_{96} = 272,4639$.

Par conséquent $P = 187^f,50 \times \frac{2015,9324}{272,4639}$,

c'est-à-dire

$$P = 187^f,50 \times 7,39889 \quad \text{ou} \quad P = 1387^f,54.$$

967. Dans ce cas, l'entrée en jouissance aurait lieu dans le trimestre qui suit celui où le déposant atteint ses 65 ans, et dont le rang, à partir de la naissance, est $65 \times 4 + 1$ ou 261; ainsi $m = 261$. L'âge du déposant, au moment du versement, étant de 3 ans, ou 12 trimestres, on a $n = 13$.

La table du n° **963** donne

$$Z_{261} = 711,52454 \quad \text{et} \quad Z_{260} = 733,42060,$$

d'où l'on déduit

$$\tfrac{1}{2} \left[Z_{261} + \frac{Z_{260}}{1+r} \right] = 718,41541.$$

La même table donne

$$Z_{12} - Z_{13} = 60337,219 - 59462,195 = 875,024;$$

on aura par conséquent

$$P = 187^f,50 . \frac{718,41541}{875,024} = 187,50 \times 0,821023$$

ou
$$P = 153^f,94.$$

968. On a ici $m = 60 \times 4 + 1 = 241$ et $n = 40 \times 4 + 1 = 161$. D'ailleurs $a = \frac{5^f}{4} = 1^f,25$.

La table du n° **963** donne

$$Z_{241} = 1241,4516 \quad \text{et} \quad Z_{240} = 1273,5130,$$

d'où l'on déduit

$$\tfrac{1}{2}\left(Z_{241} + \frac{Z_{240}}{1+r}\right) = 1250,4374.$$

La même table donne

$$Z_{160} - Z_{161} = 6554,6156 - 6443,8258 = 110,7898\,;$$

on aura donc

$$P = 1^f,25 \times \frac{1250,4374}{110,7898} = 1^f,25 \times 11,2865$$

ou

$$P = 14^f,11.$$

969. Le déposant doit être considéré comme né le 1er mars 1803, et le versement sera censé avoir lieu le 1er octobre 1857 ; l'âge au moment du versement sera donc 54 ans 6 mois, ce qui fait 218 trimestres. Comme il s'agit ici d'une rente viagère immédiate, on a

$$m = n = 219.$$

La table du n° **963** donne

$$Z_{219} = 2096,2958 \quad \text{et} \quad Z_{218} = 2143,3513\,;$$

on en déduit d'abord

$$\tfrac{1}{2}.\left[Z_{219} + \frac{Z_{218}}{1+r}\right] = 2107,9669\,,$$

puis

$$[Z_{218} - Z_{219}] = 47,0555.$$

D'ailleurs on a

$$a = \frac{120^f}{4} = 30^f\,;$$

il vient par conséquent

$$P = 30^f \times \frac{2107,9669}{47,0555} = 30^f \times 44,7974$$

ou

$$P = 1343^f,92.$$

970. De la formule [4] du n° 965 on tire

$$a = \mathrm{P}.\frac{(\mathrm{Z}_{n-1} - \mathrm{Z}_n)}{\frac{1}{2}\left(\mathrm{Z}_m + \frac{\mathrm{Z}_{m-1}}{1+r}\right)}. \qquad [5]$$

Dans le cas actuel, on a $\mathrm{P} = 1500^{\mathrm{f}}$. L'enfant étant âgé de 9 ans et 3 mois, ou 37 trimestres, on a $n = 38$. L'entrée en jouissance étant fixée à 61 ans, ou 244 trimestres, on a

$$m = 245.$$

La table du n° **963** donne

$$\mathrm{Z}_{245} = 1118{,}8908 \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_{244} = 1148{,}6957,$$

d'où
$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Z}_{245} + \frac{\mathrm{Z}_{244}}{1+r}\right) = 1127{,}4388.$$

La même table donne

$$\mathrm{Z}_{38} = 41737{,}223 \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_{37} = 42325{,}250,$$

d'où
$$\mathrm{Z}_{37} - \mathrm{Z}_{38} = 588{,}027;$$

on aura donc

$$a = 1500^{\mathrm{f}}.\frac{588{,}027}{1127{,}4388} = 1500^{\mathrm{f}} \times 0{,}521560$$

ou
$$a = 782^{\mathrm{f}},34.$$

Telle est la valeur de la rente trimestrielle; la rente annuelle sera quatre fois plus grande, et s'élèvera par conséquent à $3129^{\mathrm{f}},36$.

971. Dans la formule [5] du numéro précédent, il faut faire

$$\mathrm{P} = 5^{\mathrm{f}}, \quad m = 50 \times 4 + 1 = 201, \quad \text{et} \quad n = 5 \times 4 + 1 = 21.$$

La table du n° **963** donne

$$\mathrm{Z}_{201} = 3071{,}9197, \quad \mathrm{Z}_{200} = 3134{,}7031, \quad \mathrm{Z}_{21} = 53007{,}351$$

et
$$\mathrm{Z}_{20} = 53766{,}235;$$

on en tire
$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{Z}_{201} + \frac{\mathrm{Z}_{200}}{1+r}\right] = 3085{,}9708$$

et
$$[\mathrm{Z}_{20} - \mathrm{Z}_{21}] = 758{,}884.$$

Par suite, on aura

$$a = 5^f \times \frac{758,884}{3085,9708} = 1^f,2295.... \quad \text{ou} \quad 1^f,23.$$

La rente annuelle sera 4 fois plus grande, ou $4^f,92$.

972. On aura ici

$$P = 2000^f, \quad m = 64 \times 4 + 1 = 257, \quad \text{et} \quad n = 44 \times 4 + 1 = 177.$$

On trouvera (**963**)

$$Z_{257} = 801,78430, \quad Z_{256} = 825,48815,$$

et

$$Z_{177} = 4864,5583, \quad Z_{176} = 4953,3308,$$

d'où l'on tirera

$$\frac{1}{2}\left[Z_{257} + \frac{Z_{256}}{1+r}\right] = 809,0698 \quad \text{et} \quad (Z_{176} - Z_{177}) = 88,7725.$$

Par suite

$$a = 2000^f \times \frac{88,7725}{809,0698} = 219^f,44.$$

La rente annuelle sera 4 fois plus grande, c'est-à-dire $877^f,76$.

973. En opérant comme aux trois numéros précédents, on trouvera :

1° Que le premier versement, fait à l'âge de 32 ans et 6 mois, produira à 55 ans une rente annuelle de.....	$533^f,69$
2° Que le second versement, fait à l'âge de 35 ans et 3 mois, produira à la même époque une rente annuelle de.....	$543^f,48$
3° Que le troisième versement, fait à l'âge de 38 ans, produira de même.....	122 ,70
4° Que le quatrième versement, fait à l'âge de 39 ans et 9 mois, produira.....	334 ,32
La rente annuelle totale sera donc.....	$1534^f,19$

974. 1° Soit P le capital équivalent à la rente viagère a, au moment du premier versement, et soit p la somme à verser par trimestre pour constituer la même rente. Cette somme trimestrielle p peut être considérée elle-même comme une rente viagère temporaire, que le déposant aura à payer depuis l'époque de son premier versement jusqu'à celle de l'entrée en jouissance de

la rente a. Seulement le premier payement aura lieu 3 mois plus tôt que s'il s'agissait d'une véritable rente (875); et le dernier payement aura lieu au commencement du trimestre m. On devra donc avoir

$$P = p + p.A_n^m = p(1 + A_n^m),$$

en désignant par A_n^m la valeur d'une rente temporaire de 1 fr. payée depuis le trimestre n jusqu'au trimestre m. Il s'agit de trouver la valeur de A_n^m au moyen des valeurs de Z_m données au n° 963.

Or, la rente viagère temporaire A_n^m se compose de la rente immédiate A_n, diminuée de la rente différée jusqu'au trimestre m. La première rente a pour valeur (859)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n(1+r)} + \frac{v_{n+2}}{v_n(1+r)^2} + \frac{v_{n+3}}{v_n(1+r)^3} + \ldots,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(1+r)^n}{v_n}\left[\frac{v_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{v_{n+2}}{(1+r)^{n+2}} + \frac{v_{n+3}}{(1+r)^{n+3}} + \ldots\right]$$

ou bien $$\frac{(1+r)^n}{v_n}.Z_n.$$

La seconde a pour valeur (875)

$$\frac{v_{m+1}}{v_n(1+r)^{m-n+1}} + \frac{v_{m+2}}{v_n(1+r)^{m-n+2}} + \frac{v_{m+3}}{v_n(1+r)^{m-n+3}} + \ldots,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(1+r)^n}{v_n}\left[\frac{v_{m+1}}{(1+r)^{m+1}} + \frac{v_{m+2}}{(1+r)^{m+2}} + \frac{v_{m+3}}{(1+r)^{m+3}} + \ldots\right]$$

ou bien $$\frac{(1+r)^n}{v_n}.Z_m.$$

La valeur de A_n^m est donc

$$\frac{(1+r)^n}{v_n}(Z_n - Z_m).$$

Mais on a vu au n° 965 que

$$\frac{v_n}{(1+r)^n} \text{ est égal à } Z_{n-1} - Z_n,$$

on peut donc écrire

$$A_n^m = \frac{Z_n - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n}$$

et
$$1 + A_n^m = 1 + \frac{Z_n - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n} = \frac{Z_{n-1} - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n}.$$

Par conséquent

$$p = P \cdot \frac{Z_{n-1} - Z_n}{Z_{n-1} - Z_m}$$

ou, en mettant pour P sa valeur donnée par la formule [4] du n° **965**,

$$p = a \cdot \frac{\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]}{Z_{n-1} - Z_m}. \qquad [6]$$

2° Dans l'exemple proposé, on a

$m = 60 \times 4 + 1 = 241$, $n = 40 \times 4 + 1 = 161$, et $a = \frac{600^f}{4} = 150^f$.

La table du n° **963** donne

$Z_{241} = 1241,4516$, $Z_{240} = 1273,5130$, et $Z_{160} = 6554,6156$,

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2} \cdot \left[Z_m + \frac{Z_{m+1}}{1+r}\right] = 1250,4374,$$

et $\quad Z_{n-1} - Z_m = 6554,6156 - 1241,4516 = 5313,1640.$

Par conséquent

$$p = 150^f \cdot \frac{1250,4374}{5313,1640} = 150^f \times 0,235347$$

ou
$$p = 35^f,30.$$

975. On a ici

$a = \frac{750^f}{4} = 187^f,50$, $m = 65 \times 4 + 1 = 261$, et $n = 25 \times 4 + 1 = 101$.

La table du n° **963** donne

$Z_{261} = 711,52454$, $Z_{360} = 733,42060$, et $Z_{100} = 16999,780$;

on en déduit

$$\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m+1}}{1+r}\right] = 718,41541$$

et
$$Z_{n-1} - Z_m = 16279,2554.$$

Par conséquent

$$p = 187^{f},50 . \frac{718,41541}{16279,2554} = 187^{f},50 \times 0,04413$$

ou

$$p = 8^{f},27.$$

976. La formule [6] du n° **974**, résolue par rapport à la rente viagère a, donne

$$a = p . \frac{Z_{n-1} - Z_m}{\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]}. \qquad [7]$$

Dans l'exemple actuel, on a

$$p = 50, \quad m = 50 \times 4 + 1 = 201 \quad \text{et} \quad n = 30 \times 4 + 1 = 121.$$

La table du n° **963** donne

$$Z_{201} = 3071,9197, \quad Z_{200} = 3134,7031, \quad \text{et} \quad Z_{120} = 12520,289 ;$$

on en tire

$$\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right] = 3085,9708$$

et

$$Z_{n-1} - Z_m = 9448,3699.$$

Par conséquent

$$a = 50^{f} . \frac{9448,3699}{3085,9708} = 50^{f} \times 3,06171,$$

ou

$$a = 153^{f},085\ldots \quad \text{ou} \quad 153^{f},08.$$

La rente annuelle serait 4 fois plus grande, c'est-à-dire de $612^{f},34$.

977. En opérant comme au numéro précédent, on trouvera qu'un versement de 1 fr. à 28 ans 9 mois, produit à 50 ans une rente de $0^{f},268288$. Par conséquent un capital de 1800 fr. produira une rente 1000 fois plus grande, ou $268^{f},29$.

On trouvera de même que le versement de 1 fr. produirait à 60 ans une rente de $0^{f},662110$. Pour obtenir la rente demandée, on pourra multiplier ce nombre par 1000; ou, si la rente $268^{f},29$ était immédiatement donnée, la multiplier par 0,662110 et diviser le produit par 0,268288. L'une et l'autre méthode donneront $662^{f},11$.

978. Pour obtenir l'expression demandée, il faut tenir compte

des capitaux restitués aux héritiers des titulaires de rentes successivement décédés.

Le versement P ayant lieu dans le $n^{ième}$ trimestre, il y aura à rembourser P à la famille de chacun des décédés de ce trimestre; et ce remboursement devra avoir lieu au commencement du trimestre suivant. Le nombre de ces décès est $v_n - v_{n+1}$, et la probabilité qu'ils aient lieu est

$$\frac{v_n - v_{n+1}}{v_n}.$$

La somme P à payer à chacun d'eux, ramenée à la valeur qu'elle aurait au commencement du trimestre n, est

$$\frac{P}{1+r}.$$

L'espérance mathématique, pour la famille de chacun de ces décédés, de toucher la somme P dans le $(n+1)^{ième}$ trimestre est donc

$$\frac{P}{1+r}\cdot\frac{v_n - v_{n+1}}{v_n} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{v_n}\cdot\frac{(v_n - v_{n+1})}{1+r}.$$

On verrait de même que l'espérance mathématique, pour la famille de chacun des décédés des trimestres $n+1$, $n+2$, etc., de toucher la somme P au commencement du trimestre qui suit, est respectivement

$$\frac{P}{v_n}\cdot\frac{(v_{m+1} - v_{m+2})}{(1+r)^2}, \quad \frac{P}{v_n}\cdot\frac{(v_{m+2} - v_{m+2})}{(1+r)^3}, \quad \text{etc.}$$

La somme de ces espérances mathématiques est

$$\frac{P}{v_n}\cdot\frac{(v_n - v_{n+1})}{1+r} + \frac{P}{v_n}\cdot\frac{(v_{n+1} - v_{n+2})}{(1+r)^2} + \frac{P}{v_n}\cdot\frac{(v_{n+2} - v_{n+3})}{(1+r)^3} + \ldots,$$

et cette somme devra être ajoutée au second membre de l'équation [4] du n° **965**, ou, ce qui revient au même, retranchée du premier.

Si l'on fait cette soustraction, on trouvera d'abord une série de termes positifs :

$$P + \frac{P}{v_n}\cdot\frac{v_{n+1}}{1+r} + \frac{P}{v_n}\cdot\frac{v_{n+2}}{(1+r)^2} + \frac{P}{v_n}\cdot\frac{v_{n+3}}{(1+r)^3} + \ldots;$$

puis une série de termes soustractifs :

$$-\frac{P}{1+r} - \frac{P}{v_n}\cdot\frac{v_{n+1}}{(1+r)^2} - \frac{P}{v_n}\cdot\frac{v_{n+2}}{(1+r)^3} - \ldots.$$

Ces termes se réduisent deux à deux avec les précédents, et donnent

$$\frac{rP}{1+r}+\frac{rP}{v_n}\cdot\frac{v_{n+1}}{(1+r)^2}+\frac{rP}{v_n}\cdot\frac{v_{n+2}}{(1+r)^3}+\ldots,$$

somme que l'on peut écrire

$$\frac{rP.(1+r)^n}{v_n.(1+r)}\cdot\left[\frac{v_n}{(1+r)^n}+\frac{v_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}+\frac{v_{n+2}}{(1+r)^{n+2}}+\ldots\right]$$

ou

$$\frac{rP}{1+r}\cdot\frac{(1+r)^n}{v_n}.Z_{n-1}.$$

Or, on a vu au n° **965** que

$$\frac{v_n}{(1+r)^n}=Z_{n-1}-Z_n,$$

le premier membre de l'équation pourra donc s'écrire

$$\frac{rP}{1+r}\cdot\frac{Z_{n-1}}{Z_{n-1}-Z_n}.$$

L'équation [4] du n° **965** deviendra donc

$$\frac{rP}{1+r}\cdot\frac{Z_{n-1}}{Z_{n-1}-Z_n}=\frac{a.\frac{1}{2}\left[Z_m+\frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]}{[Z_{n-1}-Z_n]},$$

d'où

$$P=\frac{a.(1+r).\frac{1}{2}\left[Z_m+\frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]}{r.Z_{n-1}}; \qquad [7]$$

c'est l'expression demandée.

979. On a ici

$$a=\frac{360^f}{4}=90^f,\ m=51\times4+1=205,\ \text{et}\ n=31\times4+1+1=126.$$

La table du n° **965** donne

$$Z_{205}=2830{,}2691 \quad \text{et} \quad Z_{204}=2889{,}2862,$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}\left(Z_m+\frac{Z_{m-1}}{1+r}\right)=2843{,}7946.$$

La même table donne

$$Z_{n-1} \quad \text{ou} \quad Z_{25}=11580{,}758.$$

D'ailleurs on a trouvé au n° **960**,

$$1+r=1{,}01118742\,,\quad r=0{,}01118742\,,$$

d'où $\log(1+r)=0{,}004831658$ et $\log r=\bar{2}{,}0487300$;

on aura donc

$$P=\frac{90^f\times 1{,}01118742.2843{,}7946}{0{,}01118742.11580{,}758}.$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouve

$$P=1997^f{,}86.$$

980. On tire de la formule [7] du numéro précédent,

$$a=P.\frac{rZ_{n-1}}{(1+r).\frac{1}{2}\left[Z_m+\frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]}. \qquad [8]$$

On a ici

$P=500^f$, $m=65\times 4+1=261$, et $n=24\times 4+3+1=100$.

La table du n° **963** donne

$$Z_{261}=711{,}52454 \quad\text{et}\quad Z_{260}=733{,}42060,$$

d'où $$\frac{1}{2}\left[Z_m+\frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]=718{,}41541.$$

La même table donne

$$Z_{n-1} \quad\text{ou}\quad Z_{99}=17257{,}725.$$

On a d'ailleurs, comme ci-dessus,

$$\log(1+r)=0{,}004831658 \quad\text{et}\quad \log.r=\bar{2}{,}0487300;$$

on aura donc

$$a=500^f.\frac{r.17257{,}725}{(1+r).718{,}41541},$$

d'où l'on tire par logarithmes

$$a=132^f{,}891\ldots.$$

La rente annuelle sera 4 fois plus grande, c'est-à-dire $531^f{,}56$.

981. Pour obtenir le versement trimestriel demandé, il faut, comme on l'a vu au n° **974**, multiplier le versement unique par la quantité

$$\frac{Z_{n-1}-Z_n}{Z_{n-1}-Z_m}.$$

Dans l'exemple du n° **979**, on a

$$Z_{n-1} = 11580{,}758\,,\quad Z_n = 11400{,}547\,,\quad Z_m = 2830{,}2691\,,$$

d'où $$Z_{n-1} - Z_n = 180{,}211$$

et $$Z_{n-1} - Z_m = 8750{,}489.$$

Par conséquent

$$\frac{Z_{n-1} - Z_n}{Z_{n-1} - Z_m} = \frac{180{,}211}{8750{,}489} = 0{,}0205944\,,$$

et, par suite,

$$p = 1997^{f}{,}60 \times 0{,}0205944 = 41^{f}{,}14.$$

982. Il faut chercher d'abord le versement unique qui produirait la même rente; on l'obtiendra en multipliant 25 fr. par la quantité

$$\frac{Z_{n-1} - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n}.$$

Or, ici l'on a

$$m = 60 \times 4 + 1 = 240\,,\quad \text{et}\quad n = 29 \times 4 + 2 + 1 \quad \text{ou}\quad n = 119.$$

La table du n° **963** donne

$$Z_{241} = 1241{,}4516\,,\quad Z_{119} = 12716{,}133\,,\quad \text{et}\quad Z_{118} = 12914{,}706\,,$$

d'où $$\frac{Z_{n-1} - Z_m}{Z_{n-1} - Z_n} = \frac{12914{,}706 - 1241{,}4516}{12914{,}706 - 12716{,}133} = 58{,}7857\,;$$

on aura donc

$$P = 25^{f} \times 58{,}7857 = 1469^{f}{,}64.$$

La rente a sera alors donnée par la formule [8] du n° **980**.

La table du n° **963** donne

$$Z_{240} = 1273{,}5130\,,$$

par conséquent

$$\tfrac{1}{2}\left[Z_{241} + \frac{Z_{240}}{1+r}\right] = 1250{,}4374\,;$$

il viendra donc

$$a = 1469^{f}{,}64 \cdot \frac{r \,.\, 12914{,}706}{(1+r) \,.\, 1250{,}4374}.$$

On a d'ailleurs toujours

$$\log(1+r) = 0{,}004831658 \quad \text{et} \quad \log . r = \bar{2}{,}0487300.$$

En effectuant les calculs indiqués, on trouvera

$$a = 167^{f},545....$$

La rente annuelle sera 4 fois plus grande, ou $670^{f},18$.

983. Il faut se servir de la formule [5] du n° **970**,

$$a = P.\frac{Z_{n-1} - Z_n}{\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]}.$$

Si l'on y fait $P = 300^{f}$, $m = 50 \times 4 + 1$, et que l'on donne à n les valeurs successives $35 \times 4 + 1$, $36 \times 4 + 1$, $37 \times 4 + 1$, et ainsi de suite jusqu'à $49 \times 4 + 1$, on obtiendra les rentes produites par chaque versement; et, en faisant la somme, on aura la rente totale demandée.

Mais le calcul peut se simplifier en remarquant que le facteur P et le dénominateur $\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]$ sont communs à toutes les expressions à ajouter; on peut par conséquent faire la somme des facteurs $Z_{n-1} - Z_n$ qui figurent aux numérateurs, multiplier cette somme par P ou 300 fr., et diviser le produit par le dénominateur commun, que l'on trouvera égal à 3085,9708.

On trouvera ainsi :

$Z_{140} - Z_{141} = 146,1932$	$Z_{172} - Z_{173} = 93,8452$
$Z_{144} - Z_{145} = 138,2183$	$Z_{176} - Z_{177} = 88,7725$
$Z_{148} - Z_{149} = 130,6605$	$Z_{180} - Z_{181} = 83,9638$
$Z_{152} - Z_{153} = 123,6831$	$Z_{184} - Z_{185} = 79,4054$
$Z_{156} - Z_{157} = 117,7898$	$Z_{188} - Z_{189} = 74,9613$
$Z_{160} - Z_{161} = 110,7898$	$Z_{192} - Z_{193} = 70,7536$
$Z_{164} - Z_{165} = 104,8387$	$Z_{196} = Z_{197} = 66,6572$
$Z_{168} - Z_{169} = 99,1956$	

La somme de ces différences est 1529,0038; on aura donc

$$a = \frac{300^{f} \times 1529,0038}{3085,9708}.$$

En effectuant le calcul, on trouvera

$$a = 148^{f},6407.$$

Mais cette rente est la rente trimestrielle; si l'on veut la rente annuelle, il faut multiplier ce résultat par 4, ce qui donne $594^{f},56$.

984. Il faudra employer la formule [8] du n° **980**,

$$a = \frac{Pr.Z_{n-1}}{(1+r).\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]},$$

on aura $P = 500^f$; la valeur de m, et par suite celle de l'expression $\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]$, seront les mêmes qu'au numéro précédent; d'ailleurs r et $1+r$ sont des quantités connues (**960**). Si donc on fait la somme des valeurs de Z_{n-1} pour n égal à 140, 144, 148, etc., jusqu'à 196, ce qui sera d'autant plus facile que ces valeurs de Z sont placées dans une même colonne verticale du tableau du n° **963**, on n'aura plus qu'à multiplier cette somme par la quantité constante

$$\frac{P.r}{(1+r).\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right]}.$$

La somme des valeurs désignées de Z_{n-1} est 88771,943.
On aura donc

$$a = \frac{500^f.r.88771,943}{(1+r).3085,9708}.$$

En effectuant le calcul par logarithmes, on trouvera

$$a = 159^f,13.$$

La rente annuelle sera égale à 4 fois ce nombre, ou $636^f,52$.

985. En se servant de la formule [5] du n° **970**, on trouvera qu'un versement de 1 fr., fait à l'âge de 28 ans 9 mois, produit à 55 ans, et à capital aliéné, une rente de $0^f,410692$.

Au moyen de la formule [8] du n° **980**, on trouvera de même qu'un versement de 1 fr., fait à l'âge indiqué, produit à 55 ans, et à capital réservé, une rente de $0^f,296954$.

Un déposant qui aurait versé 1 fr. à 28 ans 9 mois pour obtenir une rente à capital réservé, et qui plus tard viendrait à faire l'abandon du capital, verrait donc sa rente s'accroître dans le rapport de $0^f,296954$ à $0^f,410692$.

Celui qui a versé la somme nécessaire pour obtenir une rente de 300 fr., à capital réservé, verra donc sa rente s'accroître dans

le même rapport par l'abandon du capital. De sorte que si l'on nomme a la rente demandée, on aura

$$0^f,296954 : 0^f,410692 = 300^f : a,$$

d'où l'on tire $$a = 414^f,90.$$

986. Il obtiendra, d'après l'énoncé, la même rente viagère que s'il était âgé de 65 ans.

Dans ce cas on aurait

$$P = 2000^f, \quad m = n = 65 \times 4 + 1 = 261,$$

d'où $Z_m = Z_n = 711,52454$, et $Z_{m-1} = Z_{n-1} = 733,42060$;

d'où résulte $$\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right] = 718,41541.$$

La formule [5] du n° **970** donnera donc

$$a = \frac{2000^f.(733,42060 - 711,52454)}{718,41541}.$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$a = 60^f,9565....$$

La rente annuelle serait 4 fois plus grande, ou $243^f,83$.

987. Il faut, dans la formule [5] du n° **970**, faire

$$P = 1800^f; \; m = 42 \times 4 + 1 = 169; \; n = 18 \times 4 + 1 + 1 = 74.$$

Le tableau du n° **965** donnera

$$Z_{169} = 5610,4900; \quad Z_{163} = 5709,6856;$$
$$Z_{74} = 24993,196; \quad Z_{73} = 25359,971,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\left[Z_m + \frac{Z_{m-1}}{1+r}\right] = 5628,5028 \text{ et } Z_{n-1} - Z_n = 366,7756.$$

Par suite $$a = \frac{1800^f \times 366,7756}{5628,5028};$$

ou, en effectuant les calculs,

$$a = 117^f,295....$$

La rente annuelle sera 4 fois plus grande, ou $469^f,18$.

§ 7. Des assurances sur les choses.

988. Pour répondre à la question proposée, il faut développer

$$(0,99 + 0,01)^{200}$$

et faire la somme des 8 premiers termes, celle des 9 premiers, celle des 10 premiers, enfin celle des 11 premiers.

Pour cela on calculera chaque terme par logarithmes, en le déduisant du précédent d'après la règle du développement du binôme (*); mais on devra, pour obtenir une approximation suffisante, faire usage de logarithmes à 12 décimales; ces logarithmes sont contenus dans la table I qui, dans Callet, suit immédiatement la table ordinaire des logarithmes des nombres de 1 à 108000.

Le premier terme du développement est $(0,99)^{200}$. On trouvera pour le logarithme de 0,99 le nombre $\bar{1},995635194598$, par conséquent le logarithme de $(0,99)^{200}$ sera le produit de ce logarithme par 200, c'est-à-dire $\bar{1},1270389196$ ... qui répond au nombre 0,133980.

Le second terme se déduira du premier en le multipliant par

$$\frac{200}{1} \cdot \frac{0,01}{0,99} \quad \text{ou} \quad \frac{200}{1} \cdot \frac{1}{99}.$$

Le logarithme du premier facteur est.....	$\bar{2},3010299956$
Le logarithme du second est.....	$\bar{2},0043648054$
Le logarithme du produit est donc.....	$0,3053948010$
En y ajoutant le logarithme du premier terme	$\bar{1},1270389196$
On obtient pour celui du terme cherché.....	$\bar{1},4324337206$

ce qui répond au nombre 0,270667.

Le troisième terme se déduira du second en le multipliant par

$$\frac{199}{2} \cdot \frac{1}{99},$$

et l'on trouvera pour la valeur de ce terme.... 0,272034.

En continuant ainsi, on obtiendra successivement les 12 premiers termes; et, si l'on fait successivement la somme des

(*) Voy. notre *Algèbre élémentaire*, n° 272.

2 premiers, la somme des 3 premiers, et ainsi de suite jusqu'à la somme des 12 premiers, on pourra former le tableau suivant :

Rang.	Termes.	Sommes.
1	0,133980	0,133980
2	0,270667	0,404647
3	0,272034	0,676681
4	0,181355	0,858036
5	0,090220	0,948256
6	0,035723	0,983979
7	0,011727	0,995706
8	0,003283	0,998989
9	0,000800	0,999789
10	0,000172	0,999961
11	0,000033	0,999994
12	0,000005	0,999999

Il résulte de ce tableau qu'il y a plus de 99 contre 1 à parier que l'événement A n'arrivera pas plus de 6 fois; plus de 999 contre 1 qu'il n'arrivera pas plus de 8 fois; plus de 9999 contre 1 qu'il n'arrivera pas plus de 9 fois; plus de 99999 contre 1 q n'arrivera pas plus de 10 fois; enfin qu'il y a plus de 999999 contre 1 à parier qu'il n'arrivera pas plus de 11 fois.

989. Il faut ici faire le développement de

$$(0,99 + 0,01)^{1000},$$

et, pour obtenir une approximation suffisante, on emploiera des ogarithmes à 14 ou 15 décimales (table I de Callet).

On calcule d'abord le premier terme du développement, qui est

$$0,99^{1000}.$$

Le logarithme de 0,99 est $\bar{1},995635194597550$; en le multipliant par 1000 on obtient pour le logarithme du premier terme $\bar{5},635194597550$, qui répond au nombre 0,00004317.

Pour mettre ensuite de l'ordre dans les calculs, on commencera par faire la liste des facteurs successifs par lesquels il faut multiplier chaque terme pour obtenir le suivant; ces facteurs sont :

$$\frac{1000}{1}\cdot\frac{1}{99},\quad \frac{999}{2}\cdot\frac{1}{99},\quad \frac{998}{3}\cdot\frac{1}{99},\quad \frac{997}{4}\cdot\frac{1}{99},\ \text{etc.}$$

On en cherchera les logarithmes; et par des additions successives on obtiendra les logarithmes des termes du développement.

On en déduira ces termes eux-mêmes ; et, par de nouvelles additions successives, on obtiendra les sommes qui expriment les probabilités demandées. On formera ainsi le tableau suivant :

Rang.	Termes.	Sommes.
1	0,00004317	0,00004317
2	0,00043607	0,00047924
3	0,00220019	0,00267943
4	0,00739322	0,01007266
5	0,01861375	0,02868641
6	0,03745311	0,06613952
7	0,06273711	0,12887663
8	0,08998656	0,21886319
9	0,11282405	0,33168724
10	0,12561332	0,45730056
11	0,12574020	0,58304076
12	0,11430926	0,69735002
13	0,09516150	0,79251152
14	0,07305327	0,86556479
15	0,05202280	0,91758759
16	0,03454173	0,95212932
17	0,02147955	0,97360887
18	0,01255845	0,98616732
19	0,00692759	0,99309491
20	0,00361663	0,99671154
21	0,00179188	0,99850342
22	0,00084466	0,99934808
23	0,00037967	0,99972775
24	0,00016307	0,99989082
25	0,00006705	0,99995787
26	0,00002644	0,99998431
27	0,00001002	0,99999433
28	0,00000365	0,99999798
29	0,00000128	0,99999926
30	0,00000043	0,99999969

Il résulte de ce tableau qu'il y a plus de 99 à parier contre 1 que l'événement A n'arrivera pas plus de 18 fois; plus de 999 contre 1 qu'il n'arrivera pas plus de 21 fois; plus de 9999 contre 1 qu'il n'arrivera pas plus de 24 fois; plus de 99999 contre 1 qu'il n'arrivera pas plus de 26 fois; enfin qu'il y a plus de 999999 contre 1 à parier que cet événement n'arrivera pas plus de 28 fois (988).

990. Il faut faire le développement de

$$(0{,}99995 + 0{,}00005)^{1000}.$$

En opérant comme aux deux numéros précédents, on pourra former le tableau qui suit :

Rang.	Termes.	Sommes.
1	0,9512280	0,9512280
2	0,0475638	0,9987918
3	0,0011879	0,9999797
4	0,0000198	0,9999995

Il résulte de ce tableau qu'il y a plus de 99 contre 1 à parier que l'événement A n'arrivera pas plus d'une fois; plus de 9999 contre 1 que cet événement n'arrivera pas plus de deux fois; et plus de 999999 contre 1 qu'il n'arrivera pas plus de trois fois.

991. Le nombre des vaisseaux étant 200, et le risque, ou la probabilité d'un sinistre pour chacun d'eux étant $\frac{1}{100}$, on est dans le cas du tableau du n° 988 Ce tableau montre que pour obtenir une probabilité de plus de 999999 contre 1, il faut aller jusqu'au 12e terme, ce qui répond à 11 fois l'événement A, ou, dans l'exemple qui nous occupe, à 11 sinistres. D'une autre part, la perte pouvant aller jusqu'aux 3 centièmes des valeurs assurées, en appelant V la valeur de chaque vaisseau, cette perte sera représentée par $200\,V \times 0{,}03$ ou par $6\,V$; en désignant donc par a la prime d'assurance, on devra avoir

$$6\,V = 11\,.\,V - 200\,.\,a,$$

d'où $$a = \frac{5V}{200} \quad \text{ou} \quad a = 0{,}025\,V.$$

La prime devrait donc être de $2\,\frac{1}{2}$ pour 100 de la valeur assurée.

992. Le bénéfice serait dans ce cas de $\frac{1}{200}$ de 200 V, c'est-à-dire qu'il serait égal à V; en appelant n le nombre des sinistres, on devrait donc avoir

$$V = 200\,a - n\,.\,V,$$

ou en remplaçant a par sa valeur 0,025 V, ce qui revient à remplacer $200\,a$ par 5 V,

$$V = 5\,V - nV,$$

d'où l'on tire $n = 4$; c'est-à-dire que, pour que l'assureur obtienne le bénéfice dont il s'agit, il faut que le nombre des sinis-

tres soit réduit à 4. Le tableau du n° 988 montre que la probabilité de ne pas dépasser 4 fois l'événement A, ou la somme des 5 premiers termes du développement, est 0,983979. On pourrait donc parier plus de 98 contre 2, ou plus de 49 contre 1 que l'assureur obtiendra le bénéfice dont il s'agit.

993. Il faut ici avoir recours au tableau du n° 989. Le tableau montre que pour obtenir une probabilité supérieure à 0,999999..., il faut aller jusqu'au 29e terme, qui répond à 28 fois l'événement A (988). La perte maximum étant supposée égale aux 0,008 de 1000V ou à 8V, on devra donc avoir

$$8\,V = 28\,V - 1000\,a,$$

d'où $$a = 0{,}02\,.\,V.$$

La prime d'assurance, dans ce cas, devrait donc être fixée à $\frac{2}{100}$.

994. Le bénéfice serait la 1000e partie de 1000V, c'est-à-dire V; en nommant donc n le nombre des sinistres, on aurait

$$V = 1000\,a - nV = 20\,V - nV,$$

d'où l'on tire $$n = 19.$$

Le tableau du n° 989 montre que ce nombre de sinistres, répondant au 20e terme du développement, correspond à une probabilité de 0,99671154. Il y aurait donc plus de 996 contre 4, ou plus de 249 contre 1 à parier que l'assureur obtiendrait le bénéfice dont il s'agit.

Ce bénéfice étant le même qu'au n° 992, on voit que, bien que la prime d'assurance soit moindre, la probabilité de ce bénéfice est beaucoup plus grande pour 1000 vaisseaux que pour 200.

995. Les primes d'assurances s'élèvent dans ce cas à $0{,}015 \times 1000\,V$, c'est-à-dire à 15 V.

1° Pour que le capital de l'assureur ne soit pas entamé, il faut qu'on ait, en désignant par n le nombre des sinistres,

$$nV \leqq 15\,V \quad \text{ou} \quad n \leqq 15.$$

Le tableau du n° 989 montre que la probabilité que le nombre des sinistres ne dépassera pas 15, c'est-à-dire la somme des 16 premiers termes, est 0,95212932. Il y aura donc plus de 95 contre 5, ou plus de 19 contre 1 à parier que l'assureur n'entamera pas son capital.

2° Pour que le capital de l'assureur soit entamé des 0,005 de 1000 V, c'est-à-dire de 5 V, il faut qu'on ait

$$5\,V = n\,V - 15\,V,$$

d'où

$$n = 20.$$

En allant jusqu'au 21e terme du développement, on trouve une probabilité exprimée par 0,99850342. Il y aura donc plus de 998 contre 2, ou plus de 499 contre 1 à parier que l'assureur n'entamera pas son capital au delà de la limite dont il s'agit.

3° Pour qu'il y ait un bénéfice de $\frac{1}{1000}$ de 1000 V, c'est-à-dire égal à V, il faut qu'on ait

$$V = 15\,V - nV,$$

d'où

$$n = 14.$$

En allant jusqu'au 15e terme, on trouve une probabilité de 0,91758759, ou un peu plus de 9 contre 1.

996. 1° Une probabilité de 883 contre 1 revient à la fraction $\frac{883}{883+1}$ ou 0,99886.... D'après les données, il faut aller jusqu'au 61e terme pour obtenir cette probabilité, c'est-à-dire que le nombre des sinistres doit être évalué à 60. En appelant donc a la prime d'assurance, et V la valeur de l'un des vaisseaux assurés, on doit avoir

$$60\,V = 4000.a, \quad \text{d'où} \quad a = 0{,}015.V.$$

La prime doit donc être fixée à $1\frac{1}{2}$ pour 100.

2° C'est au 70e terme qu'on atteint la probabilité 0,99999; ce qui répond à 69 sinistres, ou 69 V; mais la prime couvre la valeur de 60 V; la perte est donc 9 V, ou égale à 9 fois la valeur de l'un des vaisseaux assurés.

3° Si le bénéfice est $\frac{9}{10}$ V, on aura, en désignant par n le nombre des sinistres,

$$0{,}9\,V = 60\,V - nV,$$

d'où

$$n = 59{,}1 \quad \text{ou à peu près} \quad 59.$$

La probabilité correspondante à ce nombre de sinistres est la somme des 60 premiers termes, ou 0,99822. Il y a donc plus de 998 contre 2, ou plus de 499 contre 1 à parier que l'assureur fera un bénéfice égal aux $\frac{9}{10}$ de l'un des vaisseaux assurés.

4° Si le bénéfice est $0{,}003 \times 4000$ V, c'est-à-dire 12 V,

on aura $12\,V = 60\,V - nV$, d'où $n = 48$.

La probabilité correspondante à ce nombre de sinistres est la somme des 49 premiers termes, ou 0,90862.... Il y a donc encore plus de 9 à parier contre 1 que le bénéfice atteindra les $\frac{3}{1000}$ de l'ensemble des valeurs assurées.

997. On cherchera d'abord le total des valeurs assurées :

1150	navires à	750000 fr.	valent	862500000f
3815	—	500000	—	1907500000
5035	—	250000	—	1258750000
			Total ...	4028750000f

Le centième de cette somme, ou 40287500f

exprime l'ensemble des primes payées à la Compagnie.

Il faut maintenant évaluer les sinistres de chaque nature :

7	navires à	750000f	valent	5250000f
21	—	500000	—	10500000
27	—	250000	—	6750000
			Total ...	22500000f

2	navires à	750000f	valent.....	1500000f
8	—	500000	—	4000000
10	—	250000	—	2500000
			Total...	8000000f

Les $\frac{3}{4}$ de cette valeur s'élèvent à..... 6000000f

3	navires à	750000f	valent.....	2250000f
5	—	500000	—	2500000
7	—	250000	—	1750000
			Total...	6500000f

La moitié de cette valeur est..... 3250000f

Enfin	9	navires à	750000f	valent.....	6750000f
	15	—	500000	—	7500000f
	31	—	250000	—	7750000
				Total ...	22000000f

Le quart de cette valeur est..... 5500000f

Les sommes à payer par la Compagnie se composent donc :

1° de.....	22500000f
2° de.....	6000000
3° de.....	3250000
4° de.....	5500000
En tout...	37250000f

Il en résulte pour la Compagnie un bénéfice qui est la différence entre l'ensemble des primes..... 40287500f
et les sommes à rembourser..... 37250000

c'est-à-dire... 3037500f

998. La prime étant de..... 0,015
et le courtage de..... 0,001

C'est en tout... 0,016

que l'armateur devra payer. Or, si l'on multiplie 248500 fr. par 0,016, on obtient pour produit 3976 fr.,

999. 1° D'après le tableau du n° 990, il faut, pour obtenir la probabilité demandée, aller jusqu'au 4e terme du développement de $(0{,}99995 + 0{,}00005)^{1000}$; ce qui répond à 3 sinistres. En nommant donc M la valeur d'une des maisons assurées, 3M exprimera la somme à rembourser par la Compagnie; d'ailleurs la perte qu'elle consent à supporter, et dont la probabilité est 0,999999..., est exprimée par $\frac{1}{1000}$ de 1000M, ou par M; si donc a désigne la prime d'assurance, on devra avoir

$$M = 3M - 1000.a,$$

d'où

$$a = 0{,}002.M.$$

La prime devrait donc être fixée à 2 millièmes.

2° Si la Compagnie fixe la prime à 1 millième, en désignant par n le nombre des sinistres correspondants à la perte que cette Compagnie consent à supporter, on aura

$$M = n.M - 0{,}001.1000M, \quad \text{d'où} \quad n = 2,$$

ce qui répond à la somme des 3 premiers termes du développement, et donne une probabilité de 0,9999797, qui équivaut à 9999797 contre 203, ou à plus de 44333 contre 1.

3° Pour qu'il y ait un bénéfice égal à 0,001.1000 M, ou à M, il faut, dans le cas d'une prime de 0,002, qu'on ait

$$M = 2M - nM, \quad \text{d'où} \quad n = 1.$$

La probabilité correspondante est la somme des 2 premiers termes du développement, ou 0,9987918, probabilité qui équivaut à plus de 826 contre 1.

Dans le cas d'une prime de 0,001, il faut qu'on ait

$$M = M - nM, \quad \text{d'où} \quad n = 0.$$

La probabilité correspondante est le premier terme du développement, c'est-à-dire 0,9512280, probabilité qui répond encore à plus de 95 contre 5, ou à plus de 19 contre 1.

1000. Si des 28 fr. on retranche 2 fr., il reste, pour le montant net de la prime, 26 fr. Le taux de la prime est donc le quotient de 26 fr. par 65000, c'est-à-dire 0,0004 ou 40 centimes pour 1000 francs.

CHAPITRE VII.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES SUR LES SCIENCES APPLIQUÉES.

---

§ 1. Questions de Géométrie appliquée (*).

1001. Les 371 pas font 371 fois $0^m,78$, c'est-à-dire $289^m,38$. En désignant par x la longueur demandée, on doit donc avoir

$$x\sqrt{2} = 289^m,38, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{289^m,38}{\sqrt{2}}$$

ou, en multiplant les deux termes par $\sqrt{2}$,

$$x = \frac{1}{2}.\,289^m,38.\sqrt{2} = 144^m,69.\sqrt{2}.$$

En faisant le calcul à un décimètre près, ce qui est suffisant dans une pareille question, on trouve $x = 204^m,6$.

1002. Les 6 lumières sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de 21 mètres de diamètre. Pour la facilité du discours, nous les supposerons numérotées en faisant le tour du terrain. La distance de la lumière 1 à la lumière 2 est le côté de l'hexagone, c'est-à-dire la moitié du diamètre, ou $10^m,5$. La distance de la lumière 1 à la lumière 3, est le côté du triangle équilatéral inscrit, c'est-à-dire $10^m,5\sqrt{3}$, ou $18^m,186$.... La distance de la lumière 1 à la lumière 4 est le diamètre, ou 21 mètres. La distance de la lumière 1 à la lumière 5 est encore $10^m,5\sqrt{3}$ ou $18^m,186$.... Enfin, la distance de la lumière 1 à la lumière 6 est encore la moitié du diamètre, ou $10^m,5$.

1003. Les 8 lumières seront les sommets d'un octogone ré-

(*) Voy. pour les théorèmes employés dans ce paragraphe, notre *Géométrie théorique et pratique*, 4e édition, chez Hachette et Cie.

gulier inscrit dans un cercle de 21 mètres de diamètre. Nous les supposerons numérotées en faisant le tour du terrain.

La distance de la lumière 1 à la lumière 2 est le côté de l'octogone. Il a pour expression $10^m,5.\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ou, en effectuant le calcul, $10^m,5 \times 0,7654$, c'est-à-dire $8^m,04$ à moins d'un demi-centimètre près, par excès.

La distance de la lumière 1 à la lumière 3 est le côté du carré inscrit, c'est-à-dire $10^m,5.\sqrt{2}$ ou $14^m,85$.

La distance de la lumière 1 à la lumière 4 peut se déduire de celle des lumières 1 et 2 ; car ces deux distances forment les deux côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle. En nommant donc R le rayon et x la distance cherchée, on doit avoir

$$x^2 + R^2(2-\sqrt{2}) = 4R^2;$$

d'où
$$x^2 = R^2(2+\sqrt{2})$$

et
$$x = R\sqrt{2+\sqrt{2}} = 10^m,5.\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

c'est-à-dire
$$x = 19^m,40.$$

La distance de la lumière 1 à la lumière 5 est le diamètre, ou 21 mètres.

Les distances suivantes sont respectivement égales aux précédentes; savoir :

la distance	1 — 6 est égale à la distance		1 — 4, ou . . .	$19^m,40$
—	1 — 7	—	1 — 3, ou . . .	14 ,85
—	1 — 8	—	1 — 2, ou . . .	8 ,04

1004. Soit x la longueur du rectangle et y la largeur. On aura d'abord

$$y = 2^m,22 \times 300 = 666^m.$$

Le chemin parcouru par le cheval de course se compose de $2x$, plus la circonférence d'un cercle qui aurait 666 mètres de diamètre. On a donc

$$2x + 666.\pi = 15,6 \times 300,$$

d'où
$$x = 7,8 \times 300 - 333 \times 3,1416,$$

ou
$$x = 1293^m,85.$$

1005. La superficie demandée équivaut à celle d'un rectangle qui a $1293^m,85$ de base et 666 mètres de hauteur, plus la super-

ficie d'un cercle de 666 mètres de diamètre, ou 333 mètres de rayon.

La superficie du rectangle est $1293{,}85 \times 666$, c'est-à-dire $861704^{mq}{,}10$. La superficie du cercle est $(333)^2.\pi$, c'est-à-dire $348378^{mq}{,}88$. La superficie demandée est la somme de ces deux nombres, c'est-à-dire $1210072^{mq}{,}98$, ou, à très peu près, 1210073^{mq}, qui équivalent à 121 hectares et 73 centiares.

1006. Le contour dont il s'agit est exprimé (**1004**) par $15^m{,}6 \times 300$, c'est-à-dire 4680 mètres. Si R désigne le rayon du cercle ayant le même contour, on devra avoir

$$2\pi R = 4680^m, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{2340^m}{\pi},$$

ou

$$R = 744^m{,}84.$$

La superficie de l'hippodrome a été trouvée (**1005**) de 1210073^{mq}; en nommant R le rayon du cercle équivalent, on devra avoir

$$\pi R^2 = 1210073, \quad \text{d'où} \quad R = \sqrt{\frac{1210073}{\pi}}$$

ou

$$R = 620^m{,}63.$$

1007. 1° Le côté du carré serait la racine carrée de 3419^{mq}, c'est-à-dire $58^m{,}472$....

2° Si l'on désigne par a le côté d'un triangle équilatéral, et par S sa surface, on a

$$S = \frac{1}{4}.a^2\sqrt{3}, \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}.$$

Dans l'exemple actuel on aura donc

$$a = \sqrt{\frac{3419^{mq} \times 4}{\sqrt{3}}},$$

d'où l'on tire par logarithmes

$$a = 88^m{,}858.$$

3° La surface de l'hexagone régulier dont le côté est a, est exprimée par

$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}, \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}.$$

Dans l'exemple actuel on aura donc

$$a = \sqrt{\frac{3419^{mq} \times 2}{3\sqrt{3}}},$$

d'où l'on tire par logarithmes

$$a = 36^{m},276.$$

4° La surface de l'octogone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est R, a pour expression

$$S = 2R^2\sqrt{2};$$

et le côté de cet octogone a pour expression (**1003**)

$$a = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

En élevant cette dernière égalité au carré, on obtient

$$a^2 = R^2(2 - \sqrt{2})$$

et, en divisant celle-ci membre à membre par la première, il vient

$$\frac{a^2}{S} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt{\frac{S(2 - \sqrt{2})}{2\sqrt{2}}},$$

ce qu'on peut écrire

$$a = \sqrt{\frac{S(\sqrt{2} - 1)}{2}}.$$

Dans l'exemple actuel, on aura donc :

$$a = \sqrt{\frac{3419^{mq}.(\sqrt{2} - 1)}{2}}.$$

En effectuant les calculs, on trouve $a = 26^{m},609$.

1008. On sait qu'en appelant p le demi-périmètre, S la surface du triangle, et a, b, c ses trois côtés, on a

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Dans l'exemple actuel, en faisant la somme des trois cotés, on trouve $867^m,8$; d'où résulte $p = 433^m,9$. Par suite,

$$p - a = 433^m,9 - 317^m,6 = 116^m,3,$$
$$p - b = 433^m,9 - 298^m,4 = 135^m,5,$$
$$p - c = 433^m,9 - 251^m,8 = 182^m,1.$$

On aura donc

$$S = \sqrt{433,9.116,3.135,5.182,1}.$$

En opérant par logarithmes, on trouvera aisément

$$S = 25286^{mq},56.$$

1009. Ce terrain a la forme d'un trapèze, dont les bases ont respectivement $598^m,7$ et $623^m,4$, et dont la hauteur est $319^m,5$. La demi-somme des bases est $611^m,05$. La superficie du champ sera donc exprimée par $611^m,05 \times 319^m,50$.

Le prix de l'hectare de ce terrain étant 61500 fr., le prix du mètre carré est donc $6^f,15$; par conséquent la valeur du champ sera exprimée par

$$6^f,15 \times 611,05 \times 319,50.$$

En effectuant les calculs, à un centime près, on trouve $1200667^f,42$.

1010. La hauteur d'un trapèze est la même que celle d'un triangle qui aurait pour côtés les deux côtés non parallèles, et pour base la différence des bases du trapèze; dans le cas actuel, les trois côtés de ce triangle seraient donc 49^m, 63^m, et $238^m - 210^m$, c'est-à-dire 28 mètres. Si l'on cherche, comme au n° **1008**, la superficie de ce triangle, on trouvera qu'elle a pour expression

$$\sqrt{70.42.21.7} \quad \text{ou} \quad 14.21.\sqrt{5}.$$

En divisant cette superficie par la moitié de la base, c'est-à-dire par 14 mètres, on aura la hauteur $21.\sqrt{5}$.

La demi-somme des bases du trapèze est d'ailleurs 224 mètres; sa superficie sera donc exprimée en mètres carrés par

$$224^m.21.\sqrt{5}.$$

En divisant le prix du champ, ou 60000 fr., par le nombre de

mètres carrés qui exprime sa superficie, on aura la valeur du mètre carré de cette terre, c'est-à-dire

$$\frac{60000^f}{224.21.\sqrt{5}},$$

et, en multipliant par 10000, on aura le prix de l'hectare

$$\frac{600000000^f}{224.21.\sqrt{5}}.$$

En effectuant les calculs, par le secours des logarithmes, on trouve $57042^f,54$.

1011. La superficie de la salle est $11^m,4 \times 7^m,4$, c'est-à-dire $85^{mq},10$. Il s'agit d'obtenir la superficie d'un carreau. Si l'on appelle R le rayon du cercle circonscrit, la distance de deux côtés parallèles sera $R\sqrt{3}$; on aura donc $R\sqrt{3} = 0^m,22$, d'où

$$R = \frac{0^m,22}{\sqrt{3}}.$$

La superficie du carreau a d'ailleurs pour expression

$$S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2},$$

et, en mettant pour R sa valeur,

$$S = \frac{(0^m,22)^2.\sqrt{3}}{2} = 0^{mq},0242.\sqrt{3}.$$

Le nombre des carreaux nécessaires sera donc

$$\frac{85^{mq},10}{0^{mq},0242.\sqrt{3}}.$$

En effectuant les calculs à une unité près, on trouve 2031 carreaux, qui, à raison de 90 fr. le mille, valent..... $182^f,79$

Il faut ajouter à cette somme $1^f,55$ par mètre carré, c'est-à-dire $1^f,55 \times 85,10$ ou..... $129,91$

La dépense serait donc..... $312^f,70$

et, en ajoutant 10 pour 100 ou..... $31,27$

on obtient un total de..... $343^f,97$

ou à très-peu près 344 fr.

1012. Ce tuyau a la forme d'un cylindre; sa surface a donc

pour expression $\pi.0^m,60.8^m$ ou $15^{mq},08$ à moins d'un demi-décimètre carré.

1013. Il faut d'abord évaluer la superficie du toit, et, pour cela, calculer son arête dans le sens de la plus grande pente; c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit, d'une part la hauteur, ou $7^m,20$, de l'autre la moitié du diamètre de la base, ou $6^m,85$; en appelant a cette arête, on a donc

$$a = \sqrt{(7,20)^2 + (6,85)^2} = 9^m,94.$$

D'après cela, la superficie du toit a pour expression

$$\frac{\pi.13^m,50.9^m,94}{2}, \quad \text{ou} \quad 210^{mq},79.$$

Le nombre d'ardoises nécessaires sera donc $48 \times 210,79$, c'est-à-dire 10118 à une unité près. Ce nombre divisé par 1040 donne pour quotient 9 et pour reste 758; le prix demandé se composera donc :

1° de 9 fois 21 fr., c'est-à-dire.....	$189^f,00$
2° du produit de 21 fr. par 0,758, c'est-à-dire....	15 ,92
En tout...	$204^f,92$

1014. Le rayon du secteur, qui devient l'arête du cône, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit d'une part la hauteur 3^d, de l'autre la moitié du diamètre de l'ouverture, c'est-à-dire 1^d; en nommant donc R ce rayon exprimé en décimètres, on devra avoir

$$R = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10} = 3^d,162.$$

Quant à l'angle au centre du secteur, il est à 360°, comme l'arc qui sert de base au secteur est à la circonférence entière, ou comme la circonférence de l'ouverture du cône est à la circonférence qui aurait R pour rayon; en appelant x l'angle cherché, on doit donc avoir

$$x : 360^0 = 2\pi.1^d : 2\pi.3^d,162,$$

d'où

$$x = 360^0.\frac{1}{3,162} = 113^0 51'$$

à moins d'une minute près.

1015. Il faut d'abord évaluer la superficie à recouvrir.

Le fond est un cercle de 12^m de diamètre; sa superficie est donc

$$\pi.6^2 \quad \text{ou} \quad 113^{mq},10$$

à moins d'un décimètre carré près, par excès.

La paroi est la surface d'un tronc de cône. Son arête est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'angle droit a pour côtés, d'une part la profondeur 2^m, de l'autre la différence des rayons des bases, c'est-à-dire $8^m - 6^m$ ou 2^m; cette arête a donc pour valeur, en décimètres,

$$\sqrt{4+4}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{8}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2^m,828;$$

la superficie de la paroi a donc pour expression

$$\pi(8^m + 6^m).2^m,828 \quad \text{ou} \quad 124^{mq},38,$$

par conséquent la superficie à recouvrir est $237^{mq},48$.

Le prix de revient, par mètre carré, étant la somme des nombres

$$1^f,80, \quad 0^f,40 \quad \text{et} \quad 0^f,10, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2^f,30,$$

la dépense demandée sera le produit de $2^f,30$ par 237,48, c'est-à-dire $546^f,20$.

1016. On peut calculer d'abord la hauteur du cône dont l'abat-jour fait partie; soit h cette hauteur exprimée en décimètres, on devra avoir, par des similitudes faciles à apercevoir,

$$h : h - 2 = 4 : 1, \quad \text{d'où} \quad h = \tfrac{8}{3} = 2^d,67.$$

L'arête du cône entier, ou le rayon du grand secteur, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit, d'une part la hauteur trouvée $2^d,67$, de l'autre le rayon de la base, ou 2^d; en appelant R ce rayon exprimé en décimètres, on aura donc

$$R = \sqrt{(2,67)^2 + 2^2} = 3^d,336.$$

L'arête du cône retranché, ou le rayon du petit secteur, sera donné par la proportion

$$r : R = 1 : 4, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{3,336}{4} = 0^d,834.$$

Quant à l'angle au centre, il s'obtiendra comme au n° **1014**, par la proportion

$$x : 360^0 = 2\pi . 2^d : 2\pi . 3^d,336,$$

d'où
$$x = 360^0 . \frac{2}{3,336} = 215^0\,49'$$

à moins d'une minute près.

1017. Le rayon de la sphère étant ici de 9^m, la superficie de la demi-sphère formant le dôme est exprimée par

$$2\pi . 9^2 \quad \text{ou} \quad 508^{mq},94$$

à moins d'un décimètre carré près. La dépense demandée sera donc

$$2^f,50 \times 508,94 \quad \text{ou} \quad 1272^f,35.$$

1018. Le volume de la poutre est exprimé par

$$9^m,40 \times 0^m,45 \times 0^m,30 \quad \text{ou} \quad 1^{m.cub},269\,;$$

sa valeur est donc

$$134^f \times 1,269 \quad \text{ou} \quad 170^f,05$$

à moins d'un centime près.

1019. Soit x le côté du carré qui forme la section de la pièce, on devra avoir

$$8\,x^2 \times 114^f = 145^f,95\,,$$

d'où
$$x = \sqrt{\frac{145,95}{8 \times 114}} = 0^m,40.$$

1020. Le volume de la barre est

$$4^m,20 \times 0^m,03 \times 0^m,03 \quad \text{ou} \quad 0^{m.cub},003780\,,$$

son poids est donc

$$7800^k \times 0,00370 \quad \text{ou} \quad 29^k,484.$$

Le prix des 100 kil. étant 45 fr., le prix d'un kilogramme est $0^f,45$. La valeur de la barre est donc

$$0^f,45 \times 29,484 \quad \text{ou} \quad 13^f,27.$$

1021. Le prix de chaque barreau est le quotient de $1429^f,10$ par 72, c'est-à-dire à très-peu près $19^f,85$. On aura le poids de l'un d'eux en divisant ce prix par le prix du kilogramme, qui

est $1^f,20$; on trouve ainsi $16^k,542$. On obtiendra le volume du barreau en divisant ce poids par 7800 kil., poids du mètre cube, ce qui donne $0^{m \cdot cub},002121$. On en déduit l'aire de la section en divisant par la longueur 3^m, ce qui donne $0^{mq},000707$. En divisant par π, on a le carré du rayon $0^{mq},000225$. La racine carrée de ce nombre, ou $0^m,015$, exprime le rayon du cercle; le diamètre demandé est le double de ce rayon ou $0^m,03$.

1022. Le volume de la conduite est la différence entre deux cylindres ayant pour hauteur commune 248^m, et pour diamètre, l'un $0^m,161$, l'autre $0^m,150$; ce volume est donc exprimé par

$$\tfrac{1}{4}.\pi.[(0^m,161)^2 - (0,150)^2].248^m,$$

ou bien, en effectuant la division par 4 sur le dernier facteur, et remarquant que la quantité entre crochets, étant la différence de deux carrés, peut se décomposer en deux facteurs,

$$\pi \times 0^m,311 \times 0,011 \times 62^m;$$

en effectuant les calculs on trouve $0^{m \cdot cub},666339643$.

Le poids de la conduite est le produit de 7200 kil. par ce nombre, c'est-à-dire $4797^k,645$.... Sa valeur est par conséquent

$$0^f,40 \times 4797,645, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1919^f,06.$$

1023. Le rayon de la section du fil étant $0^m,0009$, son volume est exprimé par

$$\pi.(0,0009)^2.2000 \quad \text{ou} \quad 0^{m \cdot cub},005089....$$

Son poids est donc

$$7800^k \times 0,005089... \quad \text{ou} \quad 39^k,694....$$

Le prix des 5 kil. étant $4^f,90$, le prix du kilogramme est $0^f,98$; la valeur des 2000^m de fil serait donc

$$0^f,98 \times 39,694..., \quad \text{c'est-à-dire} \quad 38^f,90.$$

1024. 1° Soit x le diamètre du litre, sa hauteur sera également x, et son volume sera exprimé par $\frac{1}{4}.\pi x^2 \times x$. On devra donc avoir

$$\tfrac{1}{4}\pi x^3 = 0^{m \cdot cub},001, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\frac{0,004}{\pi}};$$

en effectuant le calcul par logarithmes, on trouve $x = 0^m,108$....

2° Pour le décalitre, on devra avoir

$$\tfrac{1}{4}\pi x^3 = 0^{\text{m·cub}},010\,; \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\frac{0,040}{\pi}},$$

ou

$$x = 0^{\text{m}},2335\ldots.$$

3° Pour l'hectolitre, on devra avoir

$$\tfrac{1}{4}\pi x^3 = 0^{\text{m·cub}},100\,; \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[3]{\frac{0,400}{\pi}},$$

ou

$$x = 0^{\text{m}},503\ldots.$$

1025. 1° Soit R le rayon de la base du demi-litre, la hauteur sera 4R; on devra donc avoir

$$\pi R^2 \times 4R = 0^{\text{m·cub}},000500\,, \quad \text{d'où} \quad R = \sqrt[3]{\frac{0,0005}{4\pi}};$$

en effectuant le calcul par logarithmes, on trouve

$$R = 0^{\text{m}},034.$$

Le diamètre de la base est donc $0^{\text{m}},034 \times 2$ ou $0^{\text{m}},068$; et la hauteur est $0^{\text{m}},034 \times 4$ ou $0^{\text{m}},136$.

2° Pour le litre on devra avoir

$$4\pi R^3 = 0^{\text{m·cub}},001\,, \quad \text{d'où} \quad R = \sqrt[3]{\frac{0,001}{4\pi}} = 0^{\text{m}},04301\ldots.$$

Le diamètre de la base est donc $0^{\text{m}},043 \times 2$ ou $0^{\text{m}},086$; et la hauteur est $0^{\text{m}},043 \times 4$ ou $0^{\text{m}},172$.

3° Pour le double litre on devra avoir

$$4\pi R^3 = 0^{\text{m·cub}},002\,, \quad \text{d'où} \quad R = \sqrt[3]{\frac{0,002}{4\pi}} = 0^{\text{m}},05419\ldots.$$

Le diamètre de la base est donc $0^{\text{m}},05419 \times 2$ ou $0^{\text{m}},108\ldots$; et la hauteur est $0^{\text{m}},05419 \times 4$ ou $0^{\text{m}},217$, à moins d'un demi-millimètre près.

1026. On sait que la pièce de 5 fr. pèse 25 grammes, et qu'elle est au titre de 0,900; il y entre par conséquent $25^{\text{gr}} \times 0,9$, c'est-à-dire $22^{\text{gr}},5$ d'argent et $25^{\text{gr}} \times 0,1$ ou $2^{\text{gr}},5$ de cuivre.

Puisque $10^{\text{gr}},474$ est le poids de 1 centimètre cube d'argent,

$22^{gr},5$ sera le poids d'un volume x d'argent donné par la proportion

$$10,474 : 1 = 22,5 : x,$$

d'où $$x = \frac{22,5}{10,474} = 2^{cent.cub},148176....$$

De même, puisque $8^{gr},788$ est le poids de 1 centimètre cube de cuivre, $2^{gr},5$ sera le poids d'un volume y de cuivre donné par la proportion

$$8,788 : 1 = 2,5 : y,$$

d'où $$y = \frac{2,5}{8,788} = 0^{cent.cub},284479....$$

Le volume du flan est la somme de ces deux volumes partiels, c'est-à-dire $2^{cent.cub},432655....$

Le diamètre du cylindre étant de 37 millimètres, la surface de sa base est exprimée par $\frac{1}{4}.\pi(37)^2$ ou $1075^{mm.q},21$, ou encore $10^{cent.q},7521$.

Pour obtenir la hauteur demandée, il suffit de diviser le volume du flan par sa base, ou $2^{c.cub},432655$ par $10^{c.q},7521$, ce qui donne $0^{cent},226...$, ou un peu plus de 2 millimètres $\frac{1}{4}$.

1027. La capacité demandée est celle d'un tronc de cône qui a 2^m de hauteur et dont les bases ont respectivement 8^m et 6^m de rayon; l'expression de cette capacité rapportée au mètre cube est donc

$$\frac{1}{3}.\pi.2[8^2 + 6^2 + 8 \times 6],$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{3}.\pi.2(64 + 36 + 48) \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}\pi.148;$$

en effectuant le calcul, on trouve $309^{m.cub},971$ ou 3099 hectolitres et 71 litres, à moins d'un litre près.

1028. Soit x le diamètre du boulet, exprimé en décimètres; on devra avoir

$$\frac{1}{6}\pi x^3 \times 7^k,2 = 24^k,$$

d'où $$x = \sqrt[3]{\frac{24.6}{\pi.7,2}} = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}};$$

en effectuant le calcul par logarithmes, on trouve $x = 1^d,853...$ ou $x = 0^m,1853...$, c'est-à-dire un peu plus de 185 millimètres.

1029. Soit x le diamètre demandé rapporté au décimètre. Le

poids de la sphère de plomb aura pour expression, en kilogrammes,

$$\tfrac{1}{6}\pi x^3.11,352.$$

Le poids de la sphère creuse de cuivre aura pour expression à son tour,

$$(\tfrac{1}{6}\pi.1^3-\tfrac{1}{6}\pi.x^3).8,788\,;$$

on devra donc avoir

$$\tfrac{1}{6}\pi[x^3.11,352+(1-x^3).8,788]=5,716$$

ou

$$\tfrac{1}{6}\pi[x^3.2,564+8,788]=5,716,$$

d'où l'on tire

$$x^3=\frac{5,716\times 6-8,788\times\pi}{2,564\times\pi}=0,830238,$$

et, par suite,

$$x=\sqrt[3]{0,830238}=0^{\mathrm{d}},9398\ldots,$$

ou, à très-peu près $0^{\mathrm{d}},94$, c'est-à-dire $0^{\mathrm{m}},094$.

Il en résulte que l'épaisseur du cuivre, qui est la moitié de la différence entre le diamètre extérieur $0^{\mathrm{m}},1$ et le diamètre intérieur $0^{\mathrm{m}},094$, c'est-à-dire la moitié de $0^{\mathrm{m}},006$, est égale à $0^{\mathrm{m}},003$.

1030. Soit x le diamètre demandé, on devra avoir

$$\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{6}\pi x^3=0^{\mathrm{m.cub}},100,$$

d'où

$$x=\sqrt[3]{\frac{1,2}{\pi}},\quad\text{ou}\quad x=0^{\mathrm{m}},72556\ldots,$$

c'est-à-dire à très-peu près $0^{\mathrm{m}},726$.

1031. L'eau contenue dans le bassin forme un segment sphérique dont la hauteur est $1^{\mathrm{m}},20-0^{\mathrm{m}},30$, c'est-à-dire $0^{\mathrm{m}},90$. Le volume de cette eau a donc pour expression

$$\pi.(0^{\mathrm{m}},90)^2.[1,20-\tfrac{1}{3}.0,90]$$

ou

$$\pi.(0^{\mathrm{m}},90)^2.0^{\mathrm{m}},90,\quad\text{ou encore}\quad\pi.(0^{\mathrm{m}},90)^3.$$

En effectuant le calcul, on trouve $2^{\mathrm{m.cub}},290221\ldots.$

1032. Soit x le diamètre demandé. La longueur du cylindre sera $3x$, et son volume sera exprimé par

$$\tfrac{1}{4}\pi x^2.3x\quad\text{ou}\quad\tfrac{3}{4}\pi x^3.$$

Les deux demi-sphères, formant une sphère entière, auront pour volume

$$\tfrac{1}{6}\pi x^3.$$

La capacité totale sera donc

$$\tfrac{3}{4}\pi x^3 + \tfrac{1}{6}\pi x^3 \quad \text{ou} \quad \tfrac{11}{12}\pi x^3.$$

On devra donc avoir

$$\tfrac{11}{12}\pi x^3 = 4^{\text{m.cub}},500,$$

d'où l'on tire

$$x = \sqrt[3]{\frac{4,5 \times 12}{11.\pi}} = 1^{\text{m}},160....$$

1033. Soit x le côté du triangle rapporté au décimètre; le secteur compris entre deux côtés et l'arc décrit de leur point de rencontre est le sixième du cercle entier, et a par conséquent pour expression

$$\tfrac{1}{6}\pi x^2.$$

On peut considérer deux autres secteurs pareils; et la somme de ces trois secteurs sera $\frac{3}{6}\pi x^2$ ou $\frac{1}{2}\pi x^2$. Mais cette somme se compose du triangle curviligne dont il s'agit de trouver l'expression, augmenté de 2 fois l'aire du triangle équilatéral, c'est-à-dire de 2 fois $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, ou de $\frac{x^2\sqrt{3}}{2}$. L'aire du triangle curviligne est donc exprimée par

$$\tfrac{1}{2}\pi x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\sqrt{3},$$

c'est-à-dire par $\quad \tfrac{1}{2}x^2(\pi - \sqrt{3}),$

ou $\quad \tfrac{1}{2}x^2(3,1416 - 1,7320) \quad$ ou $\quad 0,7048\,x^2.$

En multipliant par $0^{\text{d}},3$ on aura le volume de la pièce prismatique; on trouve $0,21144\,x^2$. Multipliant $7^{\text{k}},816$ par ce nombre de décimètres cubes, on aura le poids de la pièce exprimé en kilogrammes; on trouve $1,6526\,x^2$. On doit donc avoir

$$1,6526\,x^2 = 1,339,$$

d'où l'on tire $\quad x = \sqrt{\frac{1,339}{1,6526}},$

ou, en effectuant les calculs,

$$x = 0,90013...,$$

ou, à très-peu près,

$$x = 0^{\text{m}},090.$$

§ 2. Questions de Physique appliquée.

1034. Puisque pour élever de 1° la température de 1 kil. de fer il faut 0,1255 unités de chaleur, pour élever de 1° la température de 15 kil. du même métal, il faudra 15 fois plus de chaleur, c'est-à-dire $0,1255 \times 15$ ou 1,8825 unités de chaleur; et pour élever la température de la même pièce de fer de $350 - 10$ ou 340°, il faudra 340 fois plus de chaleur, c'est-à-dire $1,8825 \times 340$ ou 640,05 unités de chaleur.

1035. Avec 640,05 unités de chaleur on pourrait élever de 1° la température de $640^k,05$ d'eau; s'il s'agit d'élever la température de 10° à 35°, c'est-à-dire de 25°, il faudra opérer sur un poids d'eau 25 fois moindre, c'est-à-dire sur $26^k,602$, ce qui représente 26 litres et 6 décilitres environ.

1036. Soit x le nombre de degrés qui exprime la température du foyer, et par conséquent celle du fer au moment où il va être plongé dans l'eau. La chaleur nécessaire pour élever 12 kil. de fer de la température de 26° à la température x serait exprimée par

$$12^k \times 0,1255 \times (x - 26).$$

La chaleur nécessaire pour élever 50 kil. d'eau de la température de 11° à la température de 26°, c'est-à-dire de 15°, est exprimée par

$$50^k.15 \quad \text{ou} \quad 750.$$

Or, ces deux quantités de chaleur doivent être égales, car la chaleur perdue par le fer a été gagnée par l'eau; on doit donc avoir

$$12 \times 0,1255(x - 26) = 750,$$

d'où l'on tire

$$x = 26 + \frac{750}{12 \times 0,1255} = 498^\circ,$$

à moins d'une fraction de degré négligeable.

1037. Le nombre d'unités de chaleur produites par la combustion de 1 kil. de chêne ordinaire est 79×32 ou 2528.

Pour le tilleul desséché, on trouve 79×49 ou 3871 unités de chaleur.

1038. La chaleur dégagée par les 200 kilogrammes de bois est 7180×85 ou 610300 unités de chaleur; la chaleur dégagée

par 1 kil., c'est-à-dire la puissance calorifique demandée, est le quotient de ce nombre par 200, c'est-à-dire 3051,5.

1039. Le nombre demandé s'obtiendra en divisant 3650 par 7200, ce qui donne 0,507, ou environ 51 pour 100.

1040. La puissance calorifique du carbone étant 7200, celle du charbon, qui contient 0,85 de carbone, sera $7200 \times 0,85$ ou 6120 unités de chaleur.

La quantité de chaleur produite par 80 kil. de charbon est exprimée par

$$80 \times 7200 \times 0,85.$$

La quantité de chaleur produite par 375 kil. de bois serait

$$375 \times 3600.$$

Le rapport du premier de ces nombres au second est le rapport demandé, c'est-à-dire

$$\frac{80 \times 7200 \times 0,85}{375 \times 3600} \quad \text{ou} \quad \frac{80 \times 2 \times 0,85}{375},$$

ou enfin, en effectuant les calculs.... 0,3626.... ou un peu plus de 36 pour 100.

1041. D'après l'énoncé, si l'on désigne par x la puissance calorifique du carbone et par y celle de l'hydrogène, on devra avoir

$$0,58.x + 0,02.y = 4870$$

et

$$0,90\ x + 0,04\ y = 7868.$$

Si l'on multiplie la première équation par 2 et qu'on en retranche la seconde membre à membre, on obtient

$$0,26\,x = 1872,$$

d'où $$x = \frac{1872}{0,26} = 7200 \text{ unités de chaleur.}$$

Substituant cette valeur dans la première équation, on en tire

$$0,02\,y = 4870 - 0,58\,.\,7200 = 694,$$

d'où $$y = \frac{694}{0,02} = 34700 \text{ unités de chaleur.}$$

1042. Le poids d'oxygène nécessaire pour convertir 1 kil. de carbone en acide carbonique est, d'après l'énoncé, de $\frac{8}{3}$ de kilogrammes, soit $2^k,6666$. Il faut chercher le volume correspon-

dant. Or, un mètre cube d'air pesant $1^k,3$, un mètre cube d'oxygène pèsera $1^k,3 \times 1,1026$ ou $1^k,4334$ environ; pour faire un poids de $2^k,6666$, il faut donc un nombre de mètres cubes marqués par le quotient de ces deux nombres, c'est-à-dire par

$$\frac{2,6666}{1,4334} \quad \text{ou} \quad 1^{m \cdot cub},8603\ldots.$$

Or, ce volume n'est que les $\frac{21}{100}$ de celui de l'air atmosphérique renfermant cette quantité d'oxygène; on aura donc le volume de l'air en multipliant $1^{m \cdot cub},8603\ldots$ par $\frac{100}{21}$, ce qui donne

$$\frac{186^{m \cdot cub},03}{21} \quad \text{ou} \quad 0^{m \cdot cub},8585\ldots.$$

1043. D'après ce qu'on a vu au n° **1039**, un kilogramme de bois ne renferme que $0^k,51$ de carbone; la quantité d'air nécessaire pour en opérer la combustion sera donc $8^{m \cdot cub},8585 \times 0,51$, c'est-à-dire $4^{m \cdot cub},518$, à moins d'un demi-décimètre cube près.

D'après ce qu'on a vu au n° **1040**, un kilogramme de charbon de bois dur ne renferme que $0^k,85$ de carbone; la quantité d'air nécessaire pour le brûler sera donc $8^{m \cdot cub},8585 \times 0,85$, c'est-à-dire $7^{m \cdot cub},530$, à moins d'un demi-décimètre cube près.

1044. 1° La tourbe considérée contient, par chaque kilogramme, $0^k,58$ de carbone et $0^k,02$ d'hydrogène libre, ce qui exigera

$$0^k,58 \times \tfrac{8}{3} + 0^k,02 \times 8 \quad \text{ou} \quad 1^k,70666\ldots \text{ d'oxygène.}$$

Ce poids d'oxygène représente un volume marqué par

$$\frac{1,70666}{1,4334},$$

et par conséquent un volume d'air représenté par

$$\frac{1,70666 \times 100}{1,4334 \times 21}, \quad \text{ou} \quad 5^{m \cdot cub},670.$$

2° La houille considérée contient, par chaque kilogramme, $0^k,90$ de carbone et $0^k,04$ d'hydrogène libre, ce qui exige

$$0^k,90 \times \tfrac{8}{3} + 0^k,04 \times 8 \quad \text{ou} \quad 2^k,72 \text{ d'oxygène.}$$

Ce poids d'oxygène répond à un volume d'air marqué par

$$\frac{2,72 \times 100}{1,4334 \times 21} \quad \text{ou} \quad 9^{m \cdot cub},036.$$

1045. Pour le bois, puisque le tiers de l'oxygène de l'air

échappe à la combustion, il faut, au volume d'air obtenu plus haut (**1043**), ajouter sa moitié, ce qui donne

$$4^{m\cdot cub},518 + 2^{m\cdot cub},259 \quad \text{ou} \quad 6^{m\cdot cub},777.$$

Pour les autres combustibles, puisque la moitié de l'oxygène échappe à la combustion, il faut doubler le volume d'air obtenu aux n^{os} **1043** et **1044**. On aura donc :

Pour le charbon de bois.	$7^{m\cdot cub},530 \times 2$	ou	$15^{m\cdot cub},060$,
— la tourbe.....	$5^{m\cdot cub},670 \times 2$	—	$11^{m.cub},340$,
— la houille.....	$9^{m\cdot cub},036 \times 2$	—	$18^{m\cdot cub},072$.

1046. 1° Puisque 1 kil. de bois donne 3600 unités de chaleur, pour obtenir 100000 de ces unités, il faudra un nombre de kilogrammes marqué par $\frac{100000}{3600}$; et puisque 375 kil. valent 20 fr., le nombre de kilogrammes dont il s'agit vaudra

$$\frac{100000 \times 20^f}{3600 \times 375} \quad \text{ou} \quad 1^f,48.$$

2° En raisonnant de la même manière, on trouvera que le prix de 100000 unités de chaleur produites par la combustion du charbon de bois est

$$\frac{100000 \times 4^f}{6000 \times 20} \quad \text{ou} \quad 3^f,33.$$

3° Pour le prix de 100000 unités de chaleur produites par la combustion de la houille grasse, on trouvera de même

$$\frac{100000 \times 5^f}{7500 \times 84} \quad \text{ou} \quad 0^f,79.$$

Ainsi le plus cher des trois combustibles, aux prix indiqués, est le charbon de bois, et le plus avantageux est la houille.

1047. Il suffit de faire dans la formule $H = 10$, $T = 170$ et $t = 10$, ce qui donne

$$v = 0,262\sqrt{10.160} = 0,262.40 = 10^m,48.$$

1048. On tire de la formule du numéro précédent

$$T = t + \frac{v^2}{(0,262)^2.H}. \qquad [2]$$

Dans le cas actuel, on a $t = 15^0$, $v = 11^m,50$ et $H = 12$; par conséquent

$$T = 15^0 + \frac{(11,50)^2}{(0,262)^2 . 12} = 175^0,5.$$

1049. On tire de la formule du n° **1047**,

$$H = \frac{v^2}{(0,262)^2 (T - t)}. \qquad [3]$$

Dans le cas actuel, on a $v = 14^m$, et $T - t = 200^0$; par conséquent

$$H = \frac{(14)^2}{(0,262)^2 . 200} = 14^m,276.$$

1050. Soit A l'aire de l'orifice, le volume écoulé par seconde sera Av; mais il est à la température T; à zéro il sera moindre, car en passant de zéro à T degrés, le volume s'est accru dans le rapport de 1 à $1 + 0,00366 . T$. Le volume à zéro est donc $\frac{Av}{1 + 0,00366 T}$; et son poids est le produit de cette expression par $1^k,3$. En nommant donc Q la dépense, on aura

$$Q = \frac{1^k,3 . Av}{1 + 0,00366 T},$$

ou, en mettant pour v sa valeur donnée par la formule du n° **1047**,

$$Q = \frac{1^k,3 . 0,262 . A . \sqrt{H (T - t)}}{1 + 0,00366 . T}. \qquad [4]$$

1051. Il faut, dans la formule précédente, faire

$$A = 0^m,6 \times 0^m,4 = 0^{mq},24, \quad H = 15, \quad T = 200 \quad \text{et} \quad t = 12;$$

on aura donc

$$Q = \frac{1^k,3 . 0,226 . 0,24 \sqrt{15 . 188}}{1 + 0,00366 \times 200}.$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouvera

$$Q = 2^k,506.$$

1052. Si, dans la formule [4] du n° **1050**, on fait

$$Q = 2, \quad A = 0{,}25, \quad H = 10 \quad \text{et} \quad t = 12,$$

on obtient

$$2 = \frac{1{,}3.0{,}262.0{,}25\sqrt{10\,(T-12)}}{1+0{,}00366\,T},$$

relation dans laquelle il n'y a plus que T d'inconnu. Pour obtenir la valeur de cette inconnue, chassons le dénominateur et élevons ensuite les deux membres au carré; il viendra, après que les calculs numériques auront été effectués,

$$4 + 0{,}02928.\,T + 0{,}0000133956\,T^2 = 0{,}056475\,T - 0{,}6777,$$

ou, en ordonnant,

$$0{,}0000133956\,T^2 - 0{,}027195\,T + 4{,}6777 = 0.$$

On pourrait résoudre cette équation du second degré a la manière ordinaire; mais le coefficient de T^2 étant très-petit, on peut d'abord négliger ce terme; l'équation donne alors

$$T = \frac{4{,}6777}{0{,}027195} = 172^0 \ldots.$$

Mettant alors pour T cette valeur dans le terme négligé, on obtient l'équation

$$0{,}039629 - 0{,}027195\,T + 4{,}6777 = 0,$$

d'où l'on tire $\qquad T = 173^0{,}5.$

On peut regarder cette seconde valeur comme suffisamment approchée.

1053. Le seul facteur variable, dans la formule [4] du n° **1050**, est le facteur

$$\frac{\sqrt{(T-t)}}{1+0{,}00366.T};$$

le maximum ou le minimum de la dépense correspondra donc au maximum ou au minimum de ce facteur variable. Désignons-le par m et remplaçons, pour plus de commodité, le coefficient 0,00366 par la lettre a, nous aurons

$$\frac{\sqrt{T-t}}{1+aT} = m.$$

Résolvons cette équation par rapport à T, il viendra, toutes réductions faites,

$$T = \frac{1 - 2m^2a \pm \sqrt{1 - 4m^2a(1 + at)}}{2m^2a^2}.$$

Pour que T soit réel, il faut qu'on ait

$$4m^2a(1 + at) < 1 \quad \text{ou} \quad m^2 < \frac{1}{4a(1 + at)}.$$

La quantité m a donc un maximum qui répond à

$$m^2 = \frac{1}{4a(1 + at)}.$$

En mettant pour m^2 cette valeur dans celle de T, le radical disparaît, et il reste, après réductions,

$$T = 2t + \frac{1}{a}$$

ou, en remettant pour a sa valeur 0,00366,

$$T = 2t + \frac{1}{0{,}00366} = 2t + 273^0{,}2.$$

Quant au maximum de la dépense, on l'obtiendra en remplaçant $\frac{\sqrt{T - t}}{1 + aT}$ par la valeur de m, ou $\frac{1}{2\sqrt{a(1 + at)}}$.

On aura ainsi

$$Q = \frac{1^k{,}3 . 0{,}262 . A}{2} \sqrt{\frac{H}{a(1 + at)}}$$

ou

$$Q = 0{,}17 . A \sqrt{\frac{H}{0{,}00366(1 + 0{,}00366\,t)}}$$

ou encore

$$[5] \qquad Q = 2{,}814 . A \sqrt{\frac{H}{1 + 0{,}00366\,t}}.$$

1054. Il faut, dans la formule qui précède, faire $H = 10^{m}$, $A = 0^{mq}{,}25$ et $t = 10^0$, ce qui donne

$$Q = 2{,}814 . 0{,}25 \sqrt{\frac{10}{1{,}0366}} = 2^k{,}1849.$$

Quant à la température de l'air chaud, on vient de voir qu'elle a pour expression $T = 2t + 273^0{,}9$.

Dans le cas actuel, on a $t = 10^0$, par conséquent

$$T = 20^0 + 273^0,9 = 293^0,9.$$

1055. Les 700 kilog. de toile mouillée se composent du poids de la toile plus des $\frac{3}{4}$ de ce même poids, c'est-à-dire qu'ils représentent les $\frac{7}{4}$ du poids de la toile; le poids de celle-ci, supposée sèche, est donc les $\frac{4}{7}$ de 700 kilog., c'est-à-dire 400 kilog.; et par conséquent, l'eau qu'elle contient pèse 300 kilog.

Puisque, pour dissoudre $28^{gr},5$ de vapeur d'eau à 30^0, il faut 1 mètre cube d'air, pour en dissoudre 300 kilog. ou 300000 gr. il faudrait un nombre de mètres cubes d'air à 30^0 marqué par

$$\frac{300000}{28,5}, \quad \text{c'est-à-dire } 10529^{m \cdot cub},824.$$

Mais l'air dont il s'agit a été pris saturé à 15^0, et il contenait $12^{gr},8$ de vapeur d'eau par mètre cube. En passant de 15^0 à 30^0, son volume s'est accru dans le rapport de $1 + 0,00366 \times 15$ à $1 + 0,00366 \times 30$; la quantité de vapeur d'eau qu'il contient par mètre cube à 30^0 est donc moindre qu'à 15^0, et elle est égale à

$$\frac{12^{gr},8 \times (1 + 0,00366 \times 15)}{1 + 0,00366 \times 30}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 12^{gr},16;$$

il lui restait donc à prendre $28^{gr},5 - 12^{gr},16$, ou $16^{gr},34$ par mètre cube. Par conséquent il faut un volume d'air à 30^0 plus considérable que celui qui a été obtenu plus haut, précisément dans le rapport de 28,5 à 16,34; c'est-à-dire que le volume cherché doit avoir pour expression

$$\frac{10529^{m \cdot cub},824 \times 28,5}{16,34}, \quad \text{ou} \quad 18365^{m \cdot cub},972.$$

Pour avoir le poids de ce volume d'air, il suffit de le ramener à zéro, ce qui donne

$$\frac{18365^{m \cdot cub},972}{1 + 0,00366 \times 30},$$

et de multiplier le résultat par $1^k,3$, ce qui donne

$$\frac{1^k,3 \times 18365,972}{1 + 0,00366 \times 30}, \quad \text{ou} \quad 21513^k,5.$$

1056. Soit x la température cherchée; en passant de cette

température à 30°, l'air abandonne un nombre d'unités de chaleur exprimé par

$$21513^k,5 \times 0,267\,(x - 30).$$

D'un autre côté, pour vaporiser 300 kilog. d'eau, et les faire passer de 15° à 30°, il faut, par kilog., 537 + 15 ou 552 unités de chaleur, en tout 552 × 300 ou 165600 unités de chaleur.

Or, les deux quantités de chaleur que nous venons d'obtenir doivent être égales; on doit donc avoir

$$21513,5 . 0,267\,(x - 30) = 165600,$$

d'où l'on tire $x = 58^\circ,8.$

1057. Le nombre d'unités de chaleur demandé a pour expression

$$21513,5 . 0,267\,(58,8 - 15);$$

en effectuant les calculs, on trouve 251591,8 unités de chaleur.

1058. La chaleur perdue étant les trois quarts de la chaleur produite, la chaleur utilisée n'en est que le quart; et la chaleur à produire doit par conséquent être quadruple de celle qui vient d'être calculée, c'est-à-dire

$$251591,8 \times 4 \quad \text{ou} \quad 1006367,2.$$

Le nombre de kilogrammes de houille à employer sera donc

$$\frac{1006367,2}{7500}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 134^k,18.$$

Ce poids représente un nombre d'hectolitres marqué par

$$\frac{134,18}{84}.$$

La dépense sera donc

$$4^f,90 \times \frac{134,18}{84}, \quad \text{ou} \quad 7^f,83.$$

Cette dépense se rapporte à 700 kilog. de toile séchée; pour 100 kilog. de toile la dépense serait 7 fois moindre, c'est-à-dire $1^f,12$.

1059. La chaleur produite est exprimée par

$$3000 \times 385 \times 640.$$

L'eau des bains, passant de 6° à 30°, sa température était élevée de 24°; la quantité de chaleur nécessaire est donc

$$24 \times 280 \times 35714.$$

Par conséquent le rapport demandé est

$$\frac{24 \times 280 \times 35714}{3000 \times 385 \times 640}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0{,}324....$$

ou un peu moins d'un tiers.

1060. Le prix des 640 stères est de 640 fois 15 fr., ou 9600 fr.; en y ajoutant les 450 fr. pour frais de transport, on obtient un total de 10050 fr. Le prix de revient de chaque bain est le quotient de ce nombre par 35714, c'est-à-dire $0^f{,}281...$ ou un peu plus de 28 centimes.

1061. On a vu plus haut (**1059**) que le nombre d'unités de chaleur produites était exprimé par

$$3000 \times 385 \times 640.$$

Chaque hectolitre de houille produisant 7500×84 unités de chaleur, il eût fallu, pour produire la même chaleur, un nombre d'hectolitres marqué par

$$\frac{3000 \times 385 \times 640}{7500 \times 84}.$$

La dépense totale eût donc été

$$\frac{5^f \times 3000 \times 385 \times 640}{7500 \times 84}$$

et le prix de revient de chaque bain eût été par conséquent

$$\frac{5^f \times 3000 \times 385 \times 640}{7500 \times 84 \times 35714}$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouve $0^f{,}164...$ ou un peu moins de 16 centimes $\frac{1}{2}$.

1062. 1° On a vu au n° **1056** qu'un kilogramme d'eau exige 537 unités de chaleur pour passer de l'état liquide à l'état gazeux sans changer de température; par conséquent, 1 kilog. de vapeur à 100° qui se condense dans un bain à une température inférieure, y abandonne 537 unités de chaleur. Il n'y a pas lieu de tenir compte de la température de la vapeur, puisque c'est celle à laquelle il s'agit d'amener l'eau du bain, et de la vapeur condensée.

Les 1200 litres, ou 1200 kilogrammes d'eau, passant de 10° à 100°, absorberont une quantité de chaleur marquée par

$$1200\,(100 - 10) \quad \text{ou} \quad 108000 \quad \text{unités de chaleur.}$$

En divisant ce nombre par 537, on aura le nombre de kilogrammes de vapeur demandé; on trouve $201^{k},1$.

2° Puisque chaque mètre carré de surface de chauffe produit 18 kilog. de vapeur par heure, la surface de chauffe totale devra être le quotient de 201,1 par 18, c'est-à-dire $11^{mq},17$.

1063. 1° Une roue dont le diamètre est de $1^{m},70$ a une circonférence exprimée par $1^{m},70 \times 3,1416$ ou $5^{m},341$. Cette longueur est contenue dans 60000 mètres 11234 fois, à moins d'une unité près; chaque roue fait donc 11234 tours par heure. A chaque tour, chaque piston fait une allée et une venue; ainsi la quantité de vapeur dépensée par chaque tour est de 4 fois la capacité du cylindre, ou de $4 \times \frac{1}{4}.3,1416.(0,35)^{2}.0,80$, ou en effectuant le calcul, de $3^{m.cub}.078768$. Le volume total dépensé par heure est donc $3^{m.cub}.078768 \times 11234$, c'est-à-dire $34586^{m.cub},880$.

2° Le mètre cube d'air, à zéro, pèse $1^{k},3$; à la température de 150° il ne pèse plus que

$$\frac{1^{k},3}{1 + 0,00366 \times 150}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0^{k},839.$$

Le volume de vapeur considéré a donc un poids exprimé par

$$0^{k},839 \times 34586,880, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 29018^{k},397,$$

ou, à très-peu près, $29018^{k},4$.

3° Le nombre d'unités de chaleur demandé est évidemment

$$650 \times 290184 \quad \text{ou} \quad 18861960.$$

4° On a vu au n° **1058** qu'on peut adopter le nombre 7500 pour le nombre d'unités de chaleur produite par la combustion d'un kilogramme de houille. Le poids de houille demandé s'obtiendra donc en divisant 18861960 par 7500, ce qui donne $2514^{k}92$, ou à peu près 2515 kilog.

5° Les 84 kilog. valant 5 fr., un kilogramme vaudra $\frac{5^{f}}{84}$, et les 2515 kilog. vaudront $\frac{5^{f} \times 2515}{84}$, ou $149^{f},70$ ou à peu près 150 fr.

1064. Si dans la formule de l'énoncé on fait $S = 15$ et $n = 5$, on obtient

$$a = \frac{1,32 \times 15}{5 - 0,412} = \frac{19,8}{4,588} = 4^{c \cdot q},31.$$

L'orifice étant circulaire, si l'on nomme x son diamètre, on devra donc avoir

$$\tfrac{1}{4}\pi x^2 = 4^{c \cdot q},31, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{\frac{4,31 \times 4}{\pi}}.$$

En mettant pour π sa valeur 3,1416, et effectuant par logarithmes les calculs indiqués, on trouve : $x = 5^c,4876...$ ou $5^c,49$, c'est-à-dire très-près de 5 centimètres $\frac{1}{2}$.

1065. Un cercle dont le diamètre a 6^{cent}, ou le rayon 3^{cent}, a une surface exprimée par $\pi \times 3^2$ ou $28^{c \cdot q},27....$ Or, de la formule du numéro précédent on tire

$$n = 0,412 + \frac{1,32.S}{a}.$$

Si l'on fait $S = 30$ et $a = 28,27$, on aura donc

$$n = 0,412 + \frac{1,32 \times 30}{28,27} = 1,813,$$

ou à peu près 1 atmosphère et $\frac{4}{5}$.

1066. La soupape doit être chargée d'un poids tel, que, ajouté à la pression atmosphérique, il fasse une somme égale à la pression de la vapeur dans la chaudière.

Dans le cas du n° **1064**, la pression dans la chaudière est de 5 atmosphères, il faut donc que le poids qui chargera la soupape soit équivalent à une pression de 4 atmosphères. Or, la pression atmosphérique sur 1 centimètre carré est égale au poids d'une colonne d'eau qui aurait 1 centimètre de base et $10^m,33$ ou 1033 centimètres de hauteur; elle représente donc un poids de 1033 grammes, ou de $1^k,033$; une pression de 4 atmosphères sera donc représentée par $1^k,033 \times 4$ ou $4^k,132$. La soupape ayant $4^{c \cdot q},31$, elle devra être chargée d'un poids total exprimé par $4^k,132 \times 4,31$, c'est-à-dire de $17^k,809$.

Dans le cas du n° **1065**, la pression dans la chaudière est de 1,813 atmosphères; le poids devra donc équivaloir à 0,813 d'atmosphère; ce qui donne par centimètre carré $1^k,033 \times 0,813$ ou $0^k,840$; et pour la soupape entière, dont l'aire est de $28^{c \cdot q},27$, le poids devra être $0^k,840 \times 28,27$, ce qui revient à $23^k,747$.

1067. Il faut, pour obtenir la quantité de chaleur demandée, faire dans la formule $T = 15$, $t = -5$ et $e = 0{,}50$, ce qui donne

$$U = \frac{7{,}2 \times 20}{9 \times 0{,}5 + 0{,}8}, \quad \text{ou} \quad U = 27{,}1....$$

ou à peu près 27 unités de chaleur par mètre carré et par heure.

1068. On tire de la formule du numéro précédent

$$e = \frac{0{,}8\,(T - t)}{U} - 0{,}09.$$

Dans le cas actuel, on a encore $T - t = 20$; et d'après l'énoncé on a $U = 20$, par conséquent

$$e = \frac{0{,}8 \times 20}{20} - 0{,}09 = 0^{m}{,}71;$$

telle est l'épaisseur que le mur devrait avoir.

§ 3. Questions de Chimie appliquée.

1069. 1° L'équivalent du chlorure de sodium est

$$23 + 35{,}43 \quad \text{ou} \quad 58{,}43.$$

2° L'équivalent de l'acide sulfurique hydraté est

$$(16 + 8 \times 3) + (1 + 8) \quad \text{ou} \quad 49.$$

3° L'équivalent de l'acide chlorhydrique est

$$1 + 35{,}43 \quad \text{ou} \quad 36{,}43.$$

4° L'équivalent du sulfate de soude est

$$(23 + 8) + (16 + 8 \times 3) \quad \text{ou} \quad 71.$$

1070. 1° Sur $58^{gr}{,}43$ de chlorure de sodium, il y a 23 grammes de sodium et $35^{gr}{,}43$ de chlore. Sur 100 grammes de chlorure de sodium il y aura donc, savoir :

Sodium.....	$100^{gr} \times \frac{23}{58{,}43}$	ou.....	$39^{gr}{,}36$
Chlore.....	$100^{gr} \times \frac{35{,}33}{58{,}43}$	ou.....	$60^{gr}{,}64$
		Total...	$100^{gr}{,}00$

2° Sur 49 grammes d'acide sulfurique hydraté, il y a 16 gram-

mes de soufre, 8 × 4 ou 32 grammes d'oxygène, et 1 gramme d'hydrogène ; sur 100 grammes d'acide il y aura donc, savoir :

Soufre.....	$100^{gr} \times \frac{16}{49}$ ou.....	$32^{gr},65$
Oxygène.....	$100^{gr} \times \frac{32}{49}$ ou.....	$65^{gr},31$
Hydrogène.....	$100^{gr} \times \frac{1}{49}$ ou.....	$2^{gr},04$
	Total...	$100^{gr},00$

3° Sur $36^{gr},43$ d'acide chlorhydrique, il y a 1 gramme d'hydrogène et $35^{gr},43$ de chlore ; sur 100 grammes d'acide chlorhydrique il y aura donc :

Hydrogène.....	$100^{gr} \times \frac{1}{36,43}$ ou.....	$2^{gr},74$
Chlore.....	$100^{gr} \times \frac{35,43}{36,43}$ ou.....	$97^{gr},26$
	Total...	$100^{gr},00$

4° Sur 71 grammes de sulfate de soude, il y a 23 grammes de sodium, 16 grammes de soufre et 32 grammes d'oxygène ; sur 100 grammes de sulfate de soude il y aura donc, savoir :

Sodium.....	$100^{gr} \times \frac{23}{71}$ ou.....	$32^{gr},39$
Soufre	$100^{gr} \times \frac{16}{71}$ ou.....	$22^{gr},54$
Oxygène	$100^{gr} \times \frac{32}{71}$ ou.....	$45^{gr},07$
	Total ...	$100^{gr},00$

1071. 1° La quantité de chlorure de sodium étant représentée par Na Cl ou 58,43, la quantité d'acide sulfurique hydraté à faire agir est SO^3,HO ou 49. Si le poids de chlorure de sodium est 500 kilog., le poids d'acide sulfurique sera le quatrième terme de la proportion

$$58,43 : 49 = 500^k : x, \quad \text{d'où} \quad x = 419^k,31.$$

2° La quantité de sulfate de soude formée étant exprimée par NaO,SO^3 ou 71, en appelant y le poids de ce sel obtenu en agissant sur 500 kilog. de chlorure de sodium, on devra avoir

$$58,43 : 71 = 500^k : y, \quad \text{d'où} \quad y = 607^k,56.$$

3° La quantité d'acide chlorhydrique produit étant exprimée par HCl ou 36,43, en appelant z le poids de cet acide produit par 500 kilog. de chlorure de sodium, on aura

$$58,43 : 36,43 = 500^k : z, \quad \text{d'où} \quad z = 311^k,74.$$

1072. 1° Les poids du carbonate et du sulfate de soude seront dans le rapport de leurs équivalents. On sait déjà que l'équivalent du sulfate de soude est 71; l'équivalent du carbonate de soude représenté par NaO,CO^2 a pour valeur

$$(23 + 8) + (6 + 8 \times 2) \quad \text{ou} \quad 53.$$

En appelant x le poids du carbonate de soude obtenu, on aura donc

$$71 : 53 = 607^k,56 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 453^k,53.$$

2° L'équivalent du carbonate de chaux, représenté par CaO, CO^2, a pour valeur

$$(20 + 8) + (6 + 8 \times 2) \quad \text{ou} \quad 50.$$

En appelant y le poids de carbonate de chaux qu'il a fallu employer, on aura donc

$$71 : 50 = 607^k,56 : y, \quad \text{d'où} \quad y = 427^k,86.$$

1073. 1° L'équivalent du carbonate de soude étant 53, et celui de la soude, représentée par NaO étant 23 + 8 ou 31, en appelant x le poids de soude obtenu, on devra avoir

$$53 : 31 = 453^k,53 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 265^k,27.$$

2° L'équivalent de la chaux, représenté par CaO étant 20 + 8 ou 28, en appelant y le poids de chaux qu'il aura fallu employer, on aura

$$53 : 28 = 453^k,53 : y, \quad \text{d'où} \quad y = 239^k,60.$$

1074. L'équivalent du chlorure de sodium est 58,43 (**1069**) et l'équivalent de la soude est 31 (**1073**); en appelant x le poids de soude qu'on peut fabriquer avec 500 kilog. de chlorure de sodium, on doit donc avoir

$$58,43 : 31 = 500^k : x, \quad \text{d'où} \quad x = 265^k,27,$$

comme au numéro précédent.

1075. Soit x le poids de chlorure de sodium, $60 - x$ sera le poids du chlorure de potassium. Le poids de l'eau dans laquelle ces deux sels sont dissous sera 60×4. Cette eau peut être, par la pensée, divisée en deux parties, l'une dont le poids est $4x$,

l'autre dont le poids est $4(60 - x)$, et qui dissolvent séparément ces deux sels. La première partie perdra une quantité de chaleur marquée par

$$4x.1,9;$$

la seconde perdra une quantité de chaleur marquée par

$$4(60 - x)\,11,4.$$

D'ailleurs, on sait que la perte totale est exprimée par

$$4.60.4,8.$$

On devra donc avoir

$$4x.1,9 + 4(60 - x)\,11,4 = 4.60.4,8,$$

ou $$1,9x + 11,4(60 - x) = 60.4,8;$$

d'où l'on tire $x = 41^{gr},684\ldots$ ou $41^{gr},68$;

par suite $60 - x = 18^{gr},316\ldots$ ou $18^{gr},32$.

Il y avait donc $41^{gr},68$ de chlorure de sodium, et $18^{gr},32$ de chlorure de potassium.

1076. L'équivalent du silicium étant 21,35, celui de la silice sera $21,35 + 8 \times 3$ ou 45,35.

On a vu d'ailleurs précédemment que l'équivalent de la chaux est 28 et celui de la potasse 47,14. Les poids de ces substances qui entrent dans la composition du verre dont il s'agit sont donc proportionnels aux nombres $45,35 \times 2$, 28×3 et $47,14 \times 3$ ou 90,70, 84 et 141,42.

Le problème proposé revient donc à partager 100 grammes proportionnellement à ces trois nombres; en opérant comme au n° **1070**, on trouvera les poids suivants :

Silice	$28^{gr},69$
Chaux	26 ,57
Potasse.	44 ,74
Total . . .	$100^{gr},00$

1077. Les nombres d'équivalents cherchés devant évidemment être entiers, on ne peut supposer moins d'un équivalent de chacun.

Supposons qu'il y ait un équivalent de potasse 47,14; et soit n le nombre des équivalents de chaux; on devra avoir

$$28 \times n : 47{,}14 = 14{,}28 : 24{,}04;$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{47{,}14 \times 14{,}28}{28 \times 24{,}04} = 1{,}00005\ldots,$$

ou, à très-peu près, $n = 1$. C'est-à-dire qu'il faudra prendre 1 équivalent de chaux, ou, plus généralement, autant d'équivalents de chaux que de potasse.

Soit n' le nombre des équivalents de silice; on devra avoir

$$45{,}35 \times n' : 47{,}14 = 61{,}68 : 24{,}04;$$

d'où l'on tire

$$n' = \frac{47{,}14 \times 61{,}68}{45{,}35 \times 24{,}04} = 2{,}6669\ldots$$

ou à très-peu près $2\frac{2}{3}$. Le nombre des équivalents de silice ne pouvant être fractionnaire, il faut multiplier celui-ci par 3 pour le rendre entier, ce qui donne 8 équivalents de silice; et, par suite, il faut multiplier également par 3 les nombres d'équivalents trouvés pour la chaux et pour la potasse. La composition du verre dont il s'agit sera donc représentée par 8 équivalents de silice, 3 de chaux et 3 de potasse.

Et, en effet, ces nombres équivalent respectivement à

$$45{,}35 \times 8, \qquad 28 \times 3 \qquad \text{et} \quad 47{,}14 \times 3$$

ou

$$262{,}80, \qquad 84 \qquad \text{et} \quad 141{,}42.$$

Et si l'on divise le nombre 100 grammes proportionnellement à ces trois nombres, on retrouve, à moins d'un centième près, les trois nombres donnés dans l'énoncé.

1078. L'équivalent de l'argent étant 108, et celui du chlorure de sodium (**1069**) étant 58,43, en désignant par x le poids du chlorure de sodium nécessaire pour précipiter 1 gramme d'argent, on devra avoir

$$108 : 58{,}43 = 1^{gr} : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0^{gr}{,}541.$$

1079. Il faudrait dissoudre un poids d'alliage tel, que la quantité d'argent pur contenue fût précisément 1 gramme. Il faudrait donc que 1 gramme fût les $\frac{9}{10}$ du poids employé, et par conséquent le poids demandé est les $\frac{10}{9}$ de 1 gramme, c'est-à-dire $1^{gr}{,}111\ldots$.

1080. Il faut que le poids d'alliage cherché contienne 1 gramme d'argent pur; il faut donc que 1 gramme soit les $\frac{897}{1000}$ du poids cherché; et par conséquent ce poids est les $\frac{1000}{897}$ d'un gramme, c'est-à-dire $1^{gr},1148$.

1081. Il résulte de l'expérience que $1^{gr},1148$ de l'alliage essayé contient d'abord 1 gramme d'argent pur précipité par la liqueur normale, et de plus 5 fois le millième d'un gramme, précipités par la liqueur décime; en tout $1^{gr},005$. Pour obtenir le titre de l'alliage, il suffit de diviser ce poids d'argent par le poids total de l'alliage employé, ou par $1^{gr},1148$, ce qui donne 0,9015 ou 901 millièmes $\frac{1}{2}$.

Cet alliage serait dans les limites de la tolérance.

1082. La quantité d'argent contenue dans la dissolution eût été $1^{gr},001$; et par conséquent le titre de l'alliage eût été le quotient de $1^{gr},001$ par $1^{gr},1148$, c'est-à-dire 0,8979....

Cet alliage eût été hors des limites de la tolérance, et il eût fallu le refondre.

1083. D'après sa formule, l'équivalent du bi-carbonate de soude est

$$(23 + 8) + 2\,(6 + 8 \times 2) + (1 + 8) \quad \text{ou} \quad 84$$

et la quantité d'acide carbonique qu'il contient, ou $2\,CO^2$, a pour valeur $2\,(6 + 8 \times 2)$ ou 44. Si donc on appelle x le poids d'acide carbonique contenu dans 22 grammes de bi-carbonate de soude,

on aura $$84 : 44 = 22 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 11^{gr},524.$$

On a vu (**1050**) qu'un mètre cube d'air pèse $1^{k},3$ sous la pression ordinaire, et que par conséquent un litre d'air, qui en est la millième partie, pèse $1^{gr},3$. La densité de l'acide carbonique par rapport à l'air étant 1,524, il en résulte qu'un litre d'acide carbonique pèse $1^{gr},3 \times 1,524$, c'est-à-dire $1^{gr},9812$. Par conséquent, en divisant les $11^{gr},524$ par $1^{gr},9812$, on aura le volume qu'occuperait l'acide carbonique du bi-carbonate sous la pression d'une atmosphère; on trouve $5^{lit},816$. Or, d'après l'énoncé, ce gaz n'occupe qu'un volume de 2 litres; si donc on appelle n le nombre d'atmosphères qui exprime la pression supportée par l'acide carbonique, on aura

$$2 : 5,816 = 1 : n, \quad \text{d'où} \quad n = 2^{atm},908$$

ou près de 3 atmosphères.

1084. Il faudrait que le volume de l'acide carbonique, sous la pression d'une atmosphère, fût de 5 fois 1 litre $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire de $7^{lit},50$. Le poids d'un litre d'acide carbonique étant, comme on l'a vu ci-dessus, de $1^{gr},9812$, les $7^{lit},50$ de ce gaz pèseraient $1^{gr},9812 \times 7,5$ ou $14^{gr},859$. On a vu d'ailleurs que, le poids du bi-carbonate de soude étant représenté par 84, celui de l'acide carbonique qu'il contient est représenté par 44. En appelant donc x le poids du bi-carbonate à employer, on devra avoir

$$44 : 84 = 14^{gr},859 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 28^{gr},367.$$

1085. L'accroissement de poids des tubes contenant l'acide sulfurique donne le poids de la vapeur d'eau produite, d'où l'on peut déduire le poids de l'hydrogène contenu dans la matière.

La formule chimique de l'eau étant HO, son équivalent est $1 + 8$, ou 9; en appelant x le poids d'hydrogène contenu dans la matière, on doit donc avoir

$$9 : 1 = 0^{gr},473 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0^{gr},0526.$$

L'accroissement de poids des tubes contenant la potasse caustique donne le poids de l'acide carbonique dégagé, et l'on peut en déduire le poids de carbone que la matière contient. La formule chimique de l'acide carbonique étant CO^2, son équivalent est $6 + 16$ ou 22; en nommant y le poids de carbone contenu dans la matière analysée, on doit donc avoir

$$22 : 6 = 1^{gr},448 : y, \quad \text{d'où} \quad y = 0^{gr},3948.$$

La somme des poids de l'hydrogène et du carbone est

$$0^{gr},0526 + 0^{gr},3948 \quad \text{ou} \quad 0^{gr},4474;$$

en retranchant ce poids de celui de la matière employée, c'est-à-dire de $0^{gr},5$, on obtient $0^{gr},0526$ pour le poids de l'oxygène.

La composition en centièmes s'obtiendra comme au n° **1070**; et l'on trouvera :

Pour l'hydrogène	$100 \times \frac{0^{gr},0526}{0^{gr},5}$, ou	$10^{gr},52$
— le carbone	$100 \times \frac{0^{gr},3948}{0^{gr},5}$, ou	$78^{gr},96$
— l'oxygène, comme pour l'hydrogène		$10^{gr},52$
	Total . . .	$100^{gr},00$

1086. Soient x, y, z les nombres d'équivalents d'hydrogène,

de carbone et d'oxygène qui doivent entrer dans la formule, on devra avoir

$$\frac{x}{10,52} = \frac{6y}{78,96} = \frac{8z}{10,52},$$

puisque les équivalents de ces trois corps sont respectivement 1, 6 et 8.

On tire de ces relations

$$\frac{y}{x} = \frac{78,96}{63,12} \quad \text{et} \quad \frac{z}{x} = \frac{1}{8}.$$

La première fraction réduite en décimales donne 1,2509..., ou, à très-peu près, $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$, ou $\frac{10}{8}$. Les nombres x, y et z devant être entiers, on voit qu'on satisfera à cette condition en prenant $x = 8$, ce qui donne $y = 10$ et $z = 1$. Par conséquent la formule demandée serait

$$C^{10}H^{8}O.$$

(Les chimistes, pour des raisons que nous ne pouvons exposer ici, ont doublé les exposants; et ils écrivent $C^{20}H^{16}O^{2}$, ce qui est la formule chimique du camphre.)

1087. Il faut d'abord ramener le volume d'azote à zéro et à la pression de 76 centimètres; pour cela, il faut se rappeler (**1050**) que les gaz se dilatent des 0,00366 de leur volume à zéro pour chaque degré d'élévation de température et (**1083**) que la pression d'une même masse de gaz est en raison inverse de son volume.

Puisqu'un gaz dont le volume à zéro est 1 subit, en passant à la température de 13°, un accroissement de volume marqué par $0,00366 \times 13$ ou 0,04768, et devient par conséquent $1 + 0,04768$, ou 1,04768, pour ramener le volume d'un gaz de 13° à zéro il suffit de diviser ce volume par 1,04768.

D'autre part, si le volume sous la pression de 75,4 est V, le volume sous la pression de 76 sera $\frac{V \times 75,4}{76}$.

En ayant égard à ces deux remarques, on voit que le volume d'azote, ramené à zéro et à 76 centimètres, sera exprimé par

$$\frac{92^{\text{cent.cub}} \times 75,4}{1,04768 \times 76}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 87^{\text{cent.cub}},119.$$

Il faut maintenant chercher le poids d'un centimètre cube d'azote. Or, un litre d'air pesant $1^{\text{gr}},3$, un centimètre cube d'air

pèsera $0^{gr},0013$; et puisque la densité de l'azote est 0,976, un centimètre cube d'azote pèse

$$0^{gr},0013 \times 0,976\,; \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0^{gr},0012688.$$

Par conséquent le poids d'azote contenu dans la matière analysée est

$$0^{gr},0012688 \times 87,119\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0^{gr},11053\ldots.$$

Il en résulte que 100^{gr} de la même matière contiennent 100 fois plus d'azote, c'est-à-dire $11^{gr},053$, ou un peu plus de 11 pour 100.

1088. La densité de la dissolution d'acide sulfurique étant 1,615, le poids d'un centimètre cube de cette dissolution est $1^{gr},615$, et par conséquent le poids de $10^{cent.cub}$ est un $16^{gr},15$. Le poids d'acide sulfurique monohydraté contenu dans cette dissolution est donc $16^{gr},15 \times 0,70$ ou $11^{gr},3$.

Puisque 95 centimètres cubes de la dissolution sucrée de chaux saturaient les 10 centimètres cubes de dissolution acide, et qu'après l'absorption de l'ammoniaque il n'en faut plus que 91,2, c'est que l'ammoniaque tient lieu des 95 — 91,2 ou $3^{cent.cub},8$ formant la différence. L'ammoniaque sature donc une fraction de l'acide sulfurique total marquée par

$$\frac{3,8}{95} \times 11^{gr},3 \quad \text{ou} \quad 0^{gr},452.$$

Or, la formule de l'acide sulfurique monohydraté étant SO^3, HO, son équivalent est $(16 + 24) + (1 + 8)$ ou 49; d'ailleurs l'équivalent de l'azote est 14; en nommant donc x le poids d'azote contenu dans la matière, on doit avoir

$$49 : 14 = 0^{gr},452 : x\,, \quad \text{d'où} \quad x = 0^{gr},129.$$

Le poids de l'azote sur $0^{gr},5$ de matière étant..... $0^{gr},129$,
le poids de l'azote sur 1^{gr} sera le double ou..... $0^{gr},258$,
et le poids de l'azote sur 100^{gr} sera..... $25^{gr},8$
ou un peu moins de 26 pour 100.

1089. 1° L'équivalent de la glucose est

$$12\,(6 + 1 + 8) \quad \text{ou} \quad 180.$$

L'équivalent de l'alcool est

$$6 \times 4 + 6 + 8 \times 2 \quad \text{ou} \quad 46\,;$$

et, par conséquent, 2 équivalents d'alcool sont représentés par 92.

En appelant x le poids d'alcool demandé, on doit donc avoir

$$180 : 92 = 1^k : x, \quad \text{d'où} \quad x = 0^k,511.$$

2° L'équivalent de l'acide carbonique étant

$$6 + 8 \times 2 \quad \text{ou} \quad 22,$$

4 équivalents de ce corps sont représentés par 44. En nommant donc y le poids d'acide carbonique produit, on doit avoir

$$180 : 44 = 1^k : y, \quad \text{d'où} \quad y = 0^k,244444....$$

Un litre d'air à 15° n'occuperait à zéro qu'un volume exprimé par

$$\frac{1^{lit}}{1 + 0,00366 \times 15}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0^{lit},948.$$

Or, le poids d'un litre d'air à zéro est $1^{gr},3$, par conséquent le poids d'un litre d'air à 15° est

$$1^{gr},3 \times 0,948 \quad \text{ou} \quad 1^{gr},2324.$$

On a vu au n° **1083** que la densité de l'acide carbonique par rapport à l'air est 1,524; le poids d'un litre de cet acide à 15° est donc $1^{gr},2324 \times 1,524$ ou $1^{gr},878....$ Pour avoir le volume demandé, il faut donc chercher combien $1^{gr},878$ est contenu de fois dans $0^k,244...$ ou $244^{gr},444$; on trouve 130,15..., c'est-à-dire 130 litres et 15 centilitres.

1090. Le poids de la pièce est

$$0^k,991 \times 230 \quad \text{ou} \quad 227^k,93.$$

Le poids de l'alcool contenu est par conséquent

$$227^k,73 \times 0,11 \quad \text{ou} \quad 25^k,07....$$

Or, on a vu au numéro précédent que les poids de glucose et d'alcool qui se correspondent sont proportionnels aux nombres 180 et 92; si donc on représente par x le poids de glucose demandé, on aura

$$92 : 180 = 25^k,07 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 49^k,06.$$

1091. Soit x le nombre de litres d'eau de Seine, et y le nombre de litres d'eau de Marne qui entrent dans le mélange analysé. Le poids de carbonate de chaux contenu dans les x litres d'eau de Seine sera exprimé par

$$16^{gr},55 . \frac{x}{100} \quad \text{ou} \quad 0^{gr}.1655.x,$$

et le poids du même sel contenu dans les y litres d'eau de Marne sera exprimé par

$$30^{gr},10 \cdot \frac{y}{100} \quad \text{ou} \quad 0^{gr},3010 \cdot y\,;$$

on devra donc avoir

$$0^{gr},1655\,x + 0^{gr},3010 \cdot y = 20^{gr},465. \qquad [1]$$

On trouvera de même, en se servant des nombres donnés pour le carbonate de magnésie,

$$0^{gr},0027 \cdot x + 0^{gr},1200\,y = 4^{gr},362. \qquad [2]$$

Si l'on multiplie l'équation [1] par 120 et l'équation [2] par 301, et qu'on retranche ensuite la seconde de la première, on obtient

$$19,0473\,x = 1142,8380,$$

d'où l'on tire $\qquad x = 60.$

Portant cette valeur dans l'équation [2], on obtient

$$0,1620 + 0,1200\,y = 4,362,$$

d'où $\qquad 0,120\,y = 4,200$, et, par suite, $y = 35$.

Il y avait donc 60 litres d'eau de la Seine et 35 litres d'eau de la Marne.

1092. Puisque 100^k de farine contiennent $10^k,66$ de matières azotées, 157^k de farine contiendront un poids de matières azotées donné par la proportion

$$100 : 10,66 = 157 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 16^k,7362.$$

Puisque 100^k de pain blanc renferment $7^k,02$ de matières azotées, il faut, pour en contenir $16^k,7362$, un poids de pain blanc donné par la proportion

$$7,02 : 100 = 16,7362 : y, \quad \text{d'où} \quad y = 238^k,4,$$

ou, en nombres ronds, 238^k, qui représentent 119 pains de 2^k. Ce nombre de pains surpasse de 17 le nombre réglementaire.

1093. Puisque 100^k de pain ne contiennent que $7^k,02$ de matières azotées, 104 pains ou 208^k en contiendront une quantité exprimée par

$$\frac{7^k,02 \times 208}{100} \quad \text{ou} \quad 14^k,6016.$$

Cette quantité est celle qui était contenue dans 157^k de farine ; celle-ci en contenait donc par kilogramme

$$\frac{14^k,6016}{157} \quad \text{ou} \quad 0^k,0930,$$

c'est-à-dire 9,3 pour 100.

1094. Puisque 100^k de pain contiennent $7^k,02$ de matières azotées, 1^k de pain contient $0^k,0702$ ou $70^{gr},2$ de ces matières.

D'après l'énoncé, 1^k de viande contient $0^k,210$ ou 210^{gr} de matières azotées. Pour avoir le poids demandé, il suffit donc de diviser 70,2 par 210, ce qui donne $0^k,334$ environ.

1095. 1° Puisque pour fournir 30^{gr} de carbone il faut 100^{gr} de pain, pour fournir 310^{gr} de carbone, il faudrait un poids de pain représenté par le quatrième terme de la proportion

$$30 : 100 = 310 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 1033^{gr} \quad \text{ou} \quad 1^k,033.$$

2° Puisque pour fournir 11^{gr} de carbone il faut 100^{gr} de viande, pour fournir 60^{gr} de carbone, il faudrait un poids y de viande donné par la proportion

$$11 : 100 = 310 : y, \quad \text{d'où} \quad y = 2818^{gr} \text{ environ.}$$

1096. 1° Puisque pour fournir $70^{gr},2$ de matières azotées il faut 1000^{gr} de pain, pour fournir 130^{gr} de matières azotées il faudrait un poids x de pain donné par la proportion

$$70,2 : 1000 = 130 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 1852^{gr} \text{ environ.}$$

2° Puisque, pour fournir 210^{gr} de matières azotées, il faut 1000^{gr} de viande, pour fournir 130^{gr} de matières azotées il faudrait un poids y de viande donné par la proportion

$$210 : 1000 = 130 : y, \quad \text{d'où} \quad y = 619^{gr}.$$

1097. Soit x le poids de pain et y le poids de viande exprimés tous deux en kilogrammes.

Les quantités de carbone fournies par ces poids de pain et de viande seront respectivement

$$x \times 300^{gr} \quad \text{et} \quad y \times 110^{gr};$$

on devra donc avoir

$$300\,x + 110\,y = 310$$

ou

$$30\,x + 11\,y = 31. \qquad [1]$$

Les poids de matières azotées fournies par ces deux aliments seront respectivement

$$x \times 70^{gr},2 \quad \text{et} \quad y \times 210^{gr};$$

on devra donc avoir

$$70,2x + 210y = 130. \qquad [2]$$

On tire des équations [1] et [2]

$$x = 0^{k},9189\ldots \quad \text{et} \quad y = 0^{k},3121,$$

c'est-à-dire $918^{gr},9$ de pain et $312^{gr},1$ de viande.

§ 4. Questions de Mécanique appliquée.

1098. Si la force était de 1^{kil}, son travail se composerait d'autant de kilogrammètres qu'il y a de mètres dans le chemin parcouru par son point d'application ; c'est-à-dire que ce travail serait de $13^{km},80$. La force étant réellement de 65^{kil}, son travail est 65 fois plus grand, c'est-à-dire $13^{km},80 \times 65$ ou 897^{km}.

1099. Puisque, d'après ce qu'on a vu au numéro précédent, le travail d'une force constante, agissant dans la direction du chemin parcouru par son point d'application, s'obtient en multipliant le chemin par la force, pour obtenir le chemin quand on a la force et le travail produit, il faut diviser le travail par la force.

Dans l'exemple actuel, il faut diviser 2000^{km} par 250^{k}, ce qui donne 8^{m}.

1100. Le travail étant le produit du chemin par la force, pour obtenir la force quand on connaît le chemin et le travail, il faut diviser le travail par le chemin.

Dans l'exemple actuel, il faut diviser 500^{km} par 80^{m}, ce qui donne $6^{k},25$.

1101. 1° Le volume devenant 5 fois plus grand, la hauteur finale du cylindre occupé par le gaz sera $0^{m},30 \times 5$ ou $1^{m},50$; et par conséquent le chemin parcouru par le point d'application de la force dans le sens de cette force sera $1^{m},50 - 0^{m},30$ ou $1^{m},20$.

Divisons ce chemin en 8 parties égales; chacune d'elles sera de $0^{m},15$, c'est-à-dire la moitié de la hauteur primitive. Pour abréger l'écriture, désignons par h l'une de ces divisions, et par P_0 la pression primitive du gaz.

Quand le piston aura parcouru la distance h, le volume qui était primitivement $A.2h$, en appelant A la base du cylindre, sera devenu $A.3h$. Par conséquent, la pression, qui varie en raison inverse du volume, sera devenue

$$\frac{P_0 \times A.2h}{A.3h} \quad \text{ou} \quad \frac{2P_0}{3}.$$

Quand le piston aura parcouru la distance $2h$, le volume occupé par le gaz sera devenu $A.4h$; et par conséquent la pression sera

$$\frac{P_0 \times A.2h}{A.4h} \quad \text{ou} \quad \frac{2P_0}{4}.$$

Quand le piston aura parcouru la distance $3h$, le volume du gaz sera devenu $A.5h$, et la pression

$$\frac{P_0 \times A.2h}{A.5h} \quad \text{ou} \quad \frac{2P_0}{5}.$$

En continuant ainsi, on verra de même,

qu'aux distances	$4h$	la pression est devenue	$\frac{2P_0}{6}$,
—	$5h$	—	$\frac{2P_0}{7}$,
—	$6h$	—	$\frac{2P_0}{8}$,
—	$7h$	—	$\frac{2P_0}{9}$,
—	$8h$	—	$\frac{2P_0}{10}$.

Si l'on remplace P_0 par sa valeur $1814^k,40$, et qu'on effectue les calculs, on trouvera pour les valeurs successives de la pression :

Numéros d'ordre.	Pression.
1	$1814^k,40$
2	1209 ,60
3	907 ,20
4	725 ,76
5	604 ,80
6	518 ,40
7	453 ,60
8	403 ,20
9	362 ,88

La somme des valeurs extrêmes est

$$1814^k,40 + 362^k,88 \quad \text{ou} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2177^k,28.$$

La somme des valeurs intermédiaires de rang pair est

$$1209^k,60 + 725^k,76 + 518^k,40 + 403^k,20$$

ou $2856^k,96$, qui, multiplié par 4, donne..... $11427^k,84$

La somme des valeurs intermédiaires de rang impair est

$$907^k,10 + 604^k,80 + 453^k,60$$

ou $1965^k,50$, qui, multiplié par 2, donne..... $3931^k,00$

La somme de ces trois résultats est..... $17536^k,12$

Multiplant cette somme par le tiers de $0^m,15$, c'est-à-dire par $0^m,05$, on obtient pour le travail demandé $876^{km},806$.

2° Le logarithme népérien de 5 s'obtient en divisant son logarithme dans le système dont la base est 10, ou 0,6989700 par le logarithme de e ou 0,4342945, ce qui revient à le multiplier par 2,3025851; on obtient ainsi 1,6094379. Le travail demandé a donc pour expression

$$1814^k,4 \times 0^m,3 \times 1,6094379;$$

en effectuant le calcul, on trouve $876^{km},049$.

La valeur approchée ne diffère de la valeur exacte que de 0,757 sur 876,049 ou de 1 sur 1157 environ; c'est-à-dire que l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{1157}$.

1102. 1° La hauteur due à une vitesse de 1^m sera exprimée par

$$\frac{1}{9^m,8088 \times 2}, \quad \text{ce qui donne} \ldots\ldots \quad 0^m,051.$$

2° La hauteur due à une vitesse de 10^m sera exprimée par

$$\frac{100}{9^m,8088 \times 2}, \quad \text{ce qui donne} \ldots\ldots \quad 5^m,097.$$

3° La hauteur due à une vitesse de 100^m sera exprimée par

$$\frac{10000}{9^m,8088 \times 2}, \quad \text{ce qui donne} \ldots\ldots \quad 509^m,746.$$

4° La hauteur due à une vitesse de 1000^m serait exprimée par

$$\frac{1000000}{9^m,8088 \times 2}, \quad \text{ce qui donne} \ldots \quad 50974^m,623.$$

1103. La force vive demandée a pour expression

$$12^k . \frac{250000}{9^m,8088 \times 2}, \quad \text{ce qui donne} \quad 12^k \times 12743^m,655$$

ou $$152923^{km},86.$$

1104. La hauteur due à une vitesse de 40^m a pour expression

$$\frac{1600}{9^m,8088 \times 2}, \quad \text{ce qui donne.....} \quad 81^m,559.$$

Pour obtenir le poids demandé, il faudra donc diviser 600^{km} par $81^m,559$, ce qui donne..... $7^k,356$....

1105. En divisant la force vive par le poids du mobile, ou 1000^{km} par 250^k, on obtient la hauteur due à sa vitesse, c'est-à-dire 4^m. Soit v la vitesse demandée, on devra avoir

$$\frac{v^2}{9,8088 \times 2} = 4^m, \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{9,8088 \times 2 \times 4}\,;$$

en effectuant le calcul, on trouve $v = 8^m,858$....

1106. A chaque tour, le point situé à 1^m de distance de l'axe parcourt un chemin exprimé par $2\pi \times 1^m$ ou 2π. En 80 tours il fait donc un chemin 80 fois plus grand ou 160π. Mais ce chemin est parcouru en 60 secondes; la vitesse, ou le chemin parcouru dans $1''$, est donc 60 fois moindre, c'est-à-dire

$$\frac{160\pi}{60},$$

ou, en mettant pour π sa valeur 3,1416, et effectuant le calcul, $8^m,3776$....

1107. Soit n le nombre de tours demandé; d'après ce qui vient d'être dit, l'expression de la vitesse angulaire sera

$$\frac{2\pi . n}{60} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi n}{30}.$$

On devra donc avoir

$$\frac{\pi n}{30} = 50^m,$$

d'où $$n = \frac{50^m \times 30}{\pi} \quad \text{ou} \quad n = 477,46,$$

c'est-à-dire à peu près 477 tours $\frac{1}{2}$ par minute, ce qui revient à très-peu près à 8 tours par seconde.

1108. Il faut d'abord calculer le poids du cylindre. Son volume est exprimé par $\pi(0^m,20)^2.0^m,10$ ou $0^{m.cub},012566....$ Le mètre cube de fonte pesant 7200^k, le poids du cylindre est

$$7200^k \times 0,012566 \quad \text{ou} \quad 90^k,475....$$

Il faut en second lieu calculer la vitesse angulaire; elle a pour expression

$$\frac{\pi \times 200}{30} \qquad 20^m,944.$$

Soit maintenant x le rayon de gyration; d'après l'énoncé on doit avoir

$$x^2 = \tfrac{1}{2}.(0^m,20)^2 = 0^{mq},02.$$

Si v désigne la vitesse du point situé à la distance x de l'axe de rotation, le rapport de v à la vitesse angulaire sera le même que celui des circonférences décrites dans un même temps par les points situés à la distance x et à la distance 1 de l'axe, c'est-à-dire qu'il sera le même que le rapport de ces distances, et qu'on aura

$$v : 20^m,944 = x : 1, \quad \text{d'où} \quad v = 20,944.x.$$

La hauteur due à cette vitesse est par conséquent

$$\frac{(20^m,944)^2.x^2}{9^m,8088 \times 2} \quad \text{ou} \quad \frac{(20^m,944)^2.0,02}{9^m,8088 \times 2};$$

en effectuant les calculs, on trouve

$$0^m,44720 \quad \text{ou} \quad 0^m,447.$$

La force vive demandée a donc pour valeur

$$90^k,475 \times 0^m,447, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 40^{km},442....$$

1109. Soit F l'intensité de la force cherchée; son travail serait $F \times 2^m,75$. Et, puisqu'il n'y a pas de forces résistantes et que le boulet part du repos, c'est-à-dire que sa force vive initiale est nulle, il doit y avoir égalité entre le travail moteur et la force vive produite. Or, on a vu au n° **1103** que la force vive du boulet, au moment où il sort de l'âme de la pièce, est $152923^{km},86$; on aura donc

$$F \times 2^m,75 = 152923^{km},86,$$

d'où l'on tire

$$F = \frac{152923^{km},86}{2^m,75} = 55608^k,67....$$

1110. Le travail de chacune des deux forces au bout des

10 tours sera égal au produit de cette force par 10 fois la circonférence décrite par un point de la surface du cylindre, c'est-à-dire par $2\pi \times 0^m,20 \times 10$ ou 4π. La différence entre le travail moteur et le travail résistant sera donc exprimée par

$$(F - 100^k).4\pi,$$

en désignant par F la force motrice cherchée. Mais, d'après le principe énoncé au numéro précédent, puisque le cylindre part du repos, la différence de travaux qu'on vient d'écrire devra être égale à la force vive produite, c'est-à-dire (**1108**) à $40^{km},442$; ainsi on aura

$$(F - 100^k).4^m.\pi = 40^{km},442,$$

d'où l'on tire

$$F - 100^k = \frac{40^{km},442}{4^m.\pi} = 3^k,218,$$

e par suite,

$$F = 103^k,218.$$

1111. Le travail par seconde est $60^k \times 0,15$ ou 9^{km}. Or, dans 8 heures, il y a $8 \times 60 \times 60$ ou 28800 secondes; le travail journalier est donc $9^{km} \times 28800$ ou 259200^{km}.

1112. Soit x la vitesse moyenne demandée, le travail par seconde est $8^k \times x$; et, par conséquent, le travail journalier a pour expression $8^k \times x \times 28800$. On doit donc avoir

$$8^k \times x \times 28800 = 172800^{km},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{172800^{km}}{8^k \times 28800} = 0^m,75.$$

1113. Soit x l'effort moyen demandé; le travail par seconde est $x \times 0^m,90$; et, par conséquent, le travail journalier a pour expression $x \times 0^m,90 \times 28800$. On doit donc avoir

$$x \times 0^m,90 \times 28800 = 1166400^{km},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{1166400^{km}}{0^m,90 \times 28800} = 45^k.$$

1114. Dans une journée de 24 heures, il y a $24 \times 60 \times 60$ ou 86400 secondes. Le travail journalier d'une machine de 10 chevaux serait donc exprimé par

$$75^{km} \times 86400 \times 10 \quad \text{ou} \quad 64800000^{km}.$$

Pour obtenir le nombre de chevaux demandé, il faut diviser

ce nombre par le travail journalier d'un cheval, c'est-à-dire par 1166400, ce qui donne 55,5... ou 56 chevaux effectifs.

1115. On aura d'abord

$$A = 0^m,6 \times 0^m,4 = 0^{mq},24\,;$$

et, par suite,

$$Q = 0,62 \,.\, 0^{mq},24 \sqrt{9^m,8088 \times 2 \times 1^m,75}.$$

En effectuant les calculs, on trouvera $Q = 0^{m.cub},871856$, ou un peu moins de 872 litres par seconde.

1116. On devra avoir, d'après l'énoncé,

$$0^{m.cub},871856 = 0,42 \,.\, 5^m \,.\, h \sqrt{2 \times 9,8088 \,.\, h}\,,$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$h\sqrt{h} = \frac{0^{m.cub},871856}{0,42 \,.\, 5^m \sqrt{2 \times 9,8088}},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$h\sqrt{h} = 0,093735....$$

Élevant les deux membres au carré, on obtient

$$h^3 = (0,093735)^2,$$

d'où

$$h = \sqrt[3]{(0,093735)^2}.$$

En effectuant le calcul par logarithmes, on trouve

$$h = 0^m,206....$$

1117. La vitesse à la surface étant $1^m,05$, la vitesse moyenne a pour valeur $1^m,05 \times \frac{4}{5}$ ou $0^m,84$. L'expression de la dépense est donc $7^{mq},40 \times 0^m,84$ ou $6^{m.cub},216$.

1118. L'aire de la section transversale a pour expression

$$\tfrac{1}{2}(7^m + 4^m) \times 2^m, \text{ c'est-à-dire } 11^{mq}.$$

Pour avoir le périmètre mouillé, il faut connaître la longueur du talus. Or, il est aisé de voir que cette longueur est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est la profondeur du canal, ou 2^m, et dont l'autre côté de l'angle droit est la moitié de la différence entre les deux bases, c'est-à-

dire $\frac{1}{2}(7^m - 4^m)$ ou $1^m,5$; en appelant l la longueur du talus, on a donc

$$l = \sqrt{2^2 + (1,5)^2} = 2^m,50.$$

Il en résulte que le périmètre mouillé a pour valeur la base inférieure du trapèze, ou 4^m, plus 2 fois le talus, ou 2 fois $2^m,50$, ce qui fait en tout 9^m.

La quantité R a donc pour valeur $\frac{11^{mq}}{9^m}$, ou 1,222...; et le produit de cette quantité par 0,0002 est 0,000244.... On a donc l'équation

$$0,000244 = 0,000024\,U + 0,000366\,U^2$$

ou

$$366\,U^2 + 24\,U = 244.$$

On en tire, en ne prenant que la racine positive,

$$U = 0^m,784.$$

Par suite, la dépense demandée a pour expression

$$11^{mq} \times 0^m,784, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 8^{m\cdot cub},624.$$

1119. 1° On a trouvé au n° **1115** que la dépense du cours d'eau considéré était de 872 litres par seconde, ce qui représente un poids de 872^k. La hauteur de chute est d'ailleurs $1^m,75$. La puissance absolue de la chute aura donc pour expression

$$872^k \times 1^m,75 \quad \text{ou} \quad 1526^{km}.$$

2° Pour avoir le nombre de chevaux-vapeur demandé, il faut diviser ce nombre de kilogrammètres par 75^{km}, ce qui se fait commodément en ajoutant au nombre à diviser son tiers, et en divisant ensuite par 100. Le tiers de 1526 est 508...; la somme de ces nombres est 2034; et en divisant par 100 on obtient 20,34, c'est-à-dire 20 chevaux et $\frac{1}{3}$.

1120. Le travail demandé aurait pour valeur

$$20^{ch},34 \times 0,80 \quad \text{ou} \quad 16^{chev},27,$$

c'est-à-dire un peu plus de 16 chevaux et $\frac{1}{4}$.

1121. La vitesse angulaire a, dans ce cas, pour valeur

$$\frac{\pi.30}{30} \quad \text{ou} \quad 3^m,14.$$

La vitesse de l'extrémité de l'aile est donc $3^m,14 \times 8$ ou $25^m,12$.

Par conséquent la vitesse du vent est les $\frac{3}{8}$ de $25^{m},12$, c'est-à-dire $9^{m},42$. On a donc

$$T = 0,13 \times 16^{mq} \times (9,42)^3 = 1738^{km},66.$$

En divisant par 75, on trouve que ce travail revient à $23^{chev},18$.

1122. Dans l'exemple proposé, on a $n = 5$; le logarithme de ce nombre, dans le système dont la base est 10, est 0,6989700, pour avoir le logarithme du même nombre dans le système dont la base est e, il faut diviser 0,6989700 par le logarithme de e ; c'est-à-dire par 0,4342945, ou, ce qui revient au même, le multiplier par 2,3025851 ; on obtient ainsi 1,6094379.

D'ailleurs, le rapport $\frac{p}{P}$ a pour valeur 0,1 ; on a donc

$$T = 110000^{km}.(1 + 1,6094379 - 0,1)$$

ou

$$T = 110000^{km} \times 2,5094379 = 276038^{km},17.$$

1123. La pression p étant égale à P, l'expression entre parenthèses se réduit à 1,6094379 ; on a donc

$$T = 110000^{km} \times 1,6094379 = 177038^{km},17.$$

1124. Calculons d'abord le travail produit à chaque course du piston ; il se compose du travail produit avant la détente, plus le travail pendant la détente, diminué du travail de la pression dans le condenseur.

Le diamètre du piston étant $0^{m},6$, sa surface est $\pi.(0^{m},3)^2$. La pression d'une atmosphère sur 1 mètre carré de surface étant 10334 kilog., une pression de 2 atmosphères $\frac{1}{2}$ équivaudra à $10334^{k} \times 2,5$ ou 25835 kilog. La pression sur la surface du piston a donc pour expression

$$25835^{k} \times \pi \times (0^{m},3)^2$$

Le travail de cette force dans la période qui précède la détente est donc

$$25835^{k} \times \pi \times (0^{m},3)^2 \times 0^{m},35,$$

puisque le piston ne parcourt dans cette période que le quart de $1^{m},40$, c'est-à-dire $0^{m},35$.

Le travail de la détente a pour valeur (**1101**)

$$25835^{k}.\pi.(0^{m},3)^2.0^{m},35.\log' 4$$

ou

$$25835^{k}.\pi.(0^{m},3)^2.0^{m},35.1,3862944,$$

attendu que le logarithme népérien de 4 est $0,6020600 \times 2,3025851$ ou 1,3862944.

La pression en sens contraire exercée par la vapeur qui est en communication avec le condenseur a pour expression

$$10334^k \times 0,1 \times \pi.(0^m,3)^2$$

et son travail est

$$10334^k \times 0,1.\pi.(0^m,3)^2.0^m,35 \times 4,$$

ce qu'on peut écrire :

$$25835^k.\pi.(0^m,3)^2.0^m,35.\frac{0,1 \times 4}{2,5}$$

ou $$25835^k.\pi.(0^m,3)^2.0^m,35.0,16.$$

Le travail total par une course du piston a donc pour valeur

[1] $$25835^k.\pi.(0^m,3)^2.0^m,35.(1 + 1,3862944) - 0,16).$$

Le travail par minute est le produit de cette expression par 90; et le travail par seconde s'obtiendra ensuite en divisant par 60. On voit donc que l'expression du travail en chevaux-vapeur est

[2] $$\frac{25835^k.\pi.(0^m,3)^2.0^m,35(1+1,3862944)-0,16).90}{60 \times 75}.$$

En effectuant les calculs, on trouve $113^{chev},8$.

2° D'après la formule du n° **1122**, le travail produit par 1 kilog. de houille aurait pour valeur

$$110000^{km}.(1 + 1,3862944 - 0,16).$$

Mais, puisque la machine n'utilise que les 0,45 du travail que pourrait donner la vapeur sortant de la chaudière, il faut, pour avoir le travail réel produit par 1 kilog. de houille, multiplier l'expression ci-dessus par 0,45, ce qui donne

[3] $$110000^{km}.(1 + 1,3862944 - 0,16).0,45.$$

D'un autre côté, le travail par course de piston étant donné par l'expression [1] ci-dessus, le travail par heure a pour valeur

[4] $$25835^k.\pi.(0^m,3)^2.0^m,35.(1 + 1,3862944 - 0,16).90.60$$

En divisant donc l'expression [4] par l'expression [3] on aura le poids du combustible brûlé par heure; on trouve

$$\frac{25835^k.\pi.(0^m,3).0^m,35.90.60}{110000^{km}.0,45}$$

ou, en effectuant les calculs, $278^k,905$.

En divisant ce nombre par 113,8, on obtient le poids de combustible brûlé par cheval et par heure; on trouve $2^k,45$.

1125. En divisant 288 kilog. par $4^k,8$ on obtiendra le nombre de chevaux-vapeur qui exprime la force de la machine; on trouve 60 chevaux.

Mais le nombre de chevaux peut être exprimé d'une autre manière.

La pression initiale sur le piston est exprimée par

$$10334^k.5.\pi.(0^m,16)^2.$$

La course du piston étant $0^m,80$, et la détente ayant lieu jusqu'à 5 fois le volume primitif admis dans le cylindre, la portion de la course parcourue par le piston avant la détente est le cinquième de $0^m,80$, c'est-à-dire $0^m,16$. Le travail développé par chaque coup de piston aurait donc pour expression

$$10334^k.5.\pi.(0^m,16)^2.0^m,16\left(1+\log' 5-\frac{p}{P}\right).$$

Mais ici p représente une atmosphère, et P qui est le cinquième de la pression dans la chaudière représente également une atmosphère; en se rappelant donc que $\log' 5 = 1,6094379$, il restera

$$10334^k.5.\pi.(0^m,16)^3.1,6094379$$

pour le travail développé à chaque coup de piston. En multipliant par 4 on aura le travail développé à chaque tour de roue.

Mais si x désigne le chemin parcouru en une heure par la locomotive, le nombre des tours de roue sera exprimé par

$$\frac{x}{1^m,6\pi}.$$

Le travail total aura donc pour expression

$$\frac{10334^k.5.\pi.(0^m,16)^3.1,6094379.4.x}{1^m,6.\pi}.$$

Le travail par seconde s'obtiendra en divisant par 3600, et le nombre de chevaux en divisant de nouveau par 75.

Mais, d'après l'énoncé, pour avoir la force réelle en chevaux, il faudra encore multiplier par 0,32. On devra donc avoir

$$\frac{10334^k.5.\pi.(0^m,16)^3.1,6094379.4.x.0,32}{1^m,6.\pi.3600.75}=60,$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{60\times 1^m,6.\pi.3600.75}{10334.5.\pi.(0.16)^3.1,6094379.4.0,32}$$

ou, en simplifiant

$$x = \frac{30.3600.75}{10334.(0,16)^2.1,6094379.0,32}.$$

En effectuant les calculs, on trouve $x = 59450$ mètres, ou un peu moins de 59 kilomètres $\frac{1}{2}$.

1126. On remarquera d'abord que l est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dans lequel les côtés de l'angle droit sont a et b, on aura donc

$$l = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Par suite

$$F = 3400^k.\frac{8 + 15 \times 0,3}{17} = 3400^k.\frac{12,5}{17}$$

ou enfin $$F = 2500^k.$$

1127. On aura

$$T = 0,1.3,1416.1840^k.0^m,06.\left(1 + \frac{60}{90}\right)$$

En effectuant le calcul, on trouve

$$T = 57^{km},8.$$

1128. Puisque dans une minute la roue conductrice fait 10 tours, et qu'elle a 60 dents, il passe dans ce temps 600 dents au point de contact des deux roues; il en passe par conséquent 10 dans une seconde, ce qui équivaut à un arc de $0^m,06 \times 10$ ou $0^m,6$. Et comme l'effort transmis est de 1840 kilog., le travail par seconde est $1840^k \times 0^m,6$ ou 1104 kilogrammètres, ce qui répond à $14^{chev},72$.

I. Le travail consommé par le frottement dans un tour de la roue conductrice étant $57^{km},8$, sera de 578 kilogrammètres pour 10 tours, c'est-à-dire par minute, et par conséquent de $\frac{578}{60}$ ou $9^{km},63$ par seconde. Le rapport du travail consommé par le frottement au travail moteur est donc celui de 9,63 à 1104, c'est-à-dire 0,00872....

II. On aurait pu obtenir ce rapport d'une autre manière en remarquant que l'expression générale du travail moteur pour un tour de la roue motrice est

$$T' = N.na$$

et que, en vertu de la formule donnée dans l'énoncé, l'expression

générale du rapport entre le travail du frottement et le travail moteur est

$$\frac{T}{T'} = f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

Dans l'exemple proposé on aura donc

$$\frac{T}{T'} = 0{,}1.3{,}1416.\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{90}\right) = \frac{0{,}31416 \times 5}{180} = 0{,}00872$$

comme ci-dessus.

1129. Si l'arbre est en bois, on aura

$$r = \sqrt[3]{\frac{2.2000.6}{3{,}1416.700000}} = 0^m{,}2218\ldots$$

et par conséquent l'arbre devra avoir pour diamètre $0^m{,}4436$ ou simplement $0^m{,}444$.

Si l'arbre est en fonte, on remplacera 700000 par 8000000, et l'on obtiendra $r = 0^m{,}09847\ldots$; par conséquent le diamètre devra avoir $0^m{,}19694\ldots$ ou $0^m{,}197$.

Si l'arbre est en fer forgé, on remplacera 700000 par 14000000, et l'on obtiendra $r = 0^m{,}0817\ldots$; par conséquent le diamètre devra avoir $0^m{,}1634$ ou $0^m{,}164$, en forçant le dernier chiffre pour plus de sûreté.

1130. On tire de la formule du numéro précédent :

$$F = \frac{\pi r^3 R}{2L}.$$

Dans le cas actuel on aura donc

$$F = \frac{3{,}1416.(0{,}1)^3.8000000}{16} = 1570^k{,}8.$$

1131. 1° Puisqu'on a $N = 100$, $R = 2^m{,}50$, $n = 48$ et $k = 40$, la formule donnera

$$a = 9{,}337.\frac{100.40}{(48 \times 2{,}50)^3} = \frac{933{,}7.40}{(120)^3};$$

en effectuant les calculs, on trouve

$$a = 0^m{,}021613\ldots.$$

Si la section est carrée, son côté sera la racine carrée de ce nombre, c'est-à-dire $0^m{,}147$.

2° Le volume du volant a pour expression $2\pi R \times a$

ou $$2.3,1416.2^m,50.0^m,021613.$$

L'expression de son poids est par conséquent

$$2.3,1416.2^m,50.0^m,0216.7207^k$$

ou, en effectuant les calculs, $2446^k,8$.

1132. On devra avoir

$$P = 1^k.30.\tfrac{2}{3} = 20^k.$$

1133. On a dans ce cas

$$\omega = \frac{\pi.60}{30} = 2\pi,$$

par conséquent

$$h = \frac{g}{4\pi^2} = \frac{9^m,8088}{4.(3,1416)^2} = 0^m,2484.$$

1134. Pour élever en 24 heures 43200 mètres cubes d'eau à $12^m,50$, il faut dépenser un travail exprimé par $43200000^k \times 12^m,50$ ou 540000000 kilogrammètres. Dans une seconde, le travail nécessaire sera 86400 fois moindre, puisqu'il y a 86400 secondes en 24 heures; en faisant la division, on obtient 6250 kilogrammètres. Mais puisque les pompes n'utilisent que 60 pour 100 du travail moteur, il faut que celui-ci soit tel qu'en en prenant les 0,60 on obtienne 6250 kilogrammètres; le travail cherché est donc le quotient de 6250 kilogrammètres par 0,6, c'est-à-dire $10416^{km},66$. En divisant par 75 on obtient $138^{chev},88\ldots$, ou 139 chevaux-vapeur, pour la force de la machine.

La consommation journalière en combustible serait

$$2^k \times 24 \times 139 \quad \text{ou} \quad 6672^k.$$

1135. On a à débiter journellement 500 mètres carrés de chêne, et 500 mètres carrés de bois blanc. Le second travail peut, d'après l'énoncé, être représenté par $2^{mq} \times 16 \times x$, en appelant x le nombre de chevaux-vapeur correspondant. On doit donc avoir

$$2 \times 16 \times x = 500, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{500}{32} = 15^{chev},62.$$

Si de 2 mètres carrés on retranche son quart, il reste $1^m,50$; en

appelant donc y le nombre de chevaux nécessaires pour opérer le sciage du bois de chêne, on devra avoir

$$1^{m},50 \times 16 \times y = 500, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{500}{24} = 20^{chev},83.$$

Le travail total nécessaire est donc $15^{ch},62 + 20^{ch},83$, c'est-à-dire $36^{ch},45$. Mais ce nombre de chevaux ne représente que les 0,75 de la puissance absolue de la chute; cette dernière a donc pour valeur en chevaux $\frac{36,45}{0,75}$, c'est-à-dire $48^{ch},60$; ce qui revient à 3645 kilogrammètres. La chute étant de 2 mètres, le volume d'eau qui doit s'écouler dans une seconde est celui dont le poids est de $\frac{3645^{k}}{2}$ ou $1822^{k},5$, c'est-à-dire $1822^{lit},5$.

1136. Les 54 sacs font un poids de $157^{k} \times 54$ ou 8478 kilog. Chaque paire de meules pouvant moudre $75^{k} \times 16$ ou 1200 kilog., le nombre de meules à établir sera le quotient de 8478 par 1200, c'est-à-dire en nombres entiers, 7. Le travail transmis par la roue hydraulique devra donc être celui de 4×7 ou 28 chevaux-vapeur.

D'un autre côté, la puissance absolue de la chute est $1400^{k} \times 2^{m},50$ ou 3500 kilogrammètres, ce qui revient à $46^{chev},66$. Il suffira donc que le rendement de la roue soit de 28 sur 46,66 ou de 0,60 environ.

1137. Si l'on divise 5400 par 450, on obtient pour quotient 12; le récepteur hydraulique transmet donc à l'usine une force de 12 chevaux. Mais ce nombre n'est que les 0,30 de la puissance de la chute; celle-ci a donc pour valeur $\frac{12}{0,30}$, c'est-à-dire 40 chevaux.

1138. D'après la formule de l'énoncé, on aura

$$u = \frac{30.5 + 20.3}{30 + 20} = 4^{m},20.$$

1139. D'après l'énoncé, la perte de force vive sera exprimée en général par

$$\frac{(v - v')^2}{2g} \cdot \frac{p + p'}{p.p'}.$$

Dans le cas actuel, cette expression devient

$$\frac{(5-3)^2}{2\times 9{,}8088}\cdot\frac{30^k{,}20}{50},\quad \text{ou}\quad \frac{4\times 6}{9{,}8088}$$

ou, en effectuant le calcul, $2^{km}{,}446$.

1140. 1° La formule du n° **1138** deviendrait

$$u=\frac{pv-pv}{2p}\quad\text{ou}\quad u=0,$$

c'est-à-dire que les deux corps resteraient immobiles après le choc.

2° La formule du n° **1139** deviendrait

$$\frac{(v+v)^2}{2g}\cdot\frac{p^2}{2p}\quad\text{ou}\quad 2p.\frac{v^2}{2g},$$

c'est-à-dire que la perte serait précisément égale à la somme des forces vives que possédaient les deux corps, ou, en d'autres termes, que toute la force vive serait perdue.

1141. Le travail produit par la pesanteur sur le mouton dans les 30 coups a pour expression $400^k\times 1^m{,}30\times 30=15600^{km}$.

Le travail d'une charge P, produisant un enfoncement de $0^m{,}005$, serait $P\times 0^m{,}005$. On devrait donc avoir

$$P\times 0^m{,}005=15600^{km},\quad\text{d'où}\quad P=\frac{15600^{km}}{0^m{,}005}$$

ou

$$P=3120000^k.$$

1142. I. Le travail de la résistance du sol serait

$$3120000^k\times 0^m{,}001\quad\text{ou}\quad 3120^{km}.$$

Si x désigne la hauteur demandée, le travail de la pesanteur sur le mouton sera $400^k\times x$. On devra donc avoir

$$400^k\times x=3120^{km},\quad\text{d'où}\quad x=\frac{3120^{km}}{400^k}=7^m{,}8.$$

Il faudrait donc que le mouton tombât d'une hauteur de $7^m{,}8$.

II. On aurait pu faire ce calcul d'une manière plus simple en ayant égard aux données du problème précédent. En effet, d'après

ce qui a été dit au n° **1141**, la résistance moyenne du sol a pour expression

$$\frac{400^k \times 1^m,30 \times 30}{0^m,005}.$$

Le travail de cette résistance pour un enfoncement de $0^m,001$ est donc

$$\frac{400^k \times 1^m,30 \times 30 \times 0^m,001}{0^m,005}.$$

Ce travail doit être égal à celui que développe le poids du mouton en tombant de la hauteur x; on doit donc avoir

$$400^k \times x = \frac{400^k \times 1^m,30 \times 30 \times 0^m,001}{0^m,005},$$

d'où

$$x = \frac{1^m,30 \times 30 \times 0,001}{0,005} = 1^m,30 \times 6 = 7^m,80,$$

comme ci-dessus.

Cette seconde méthode montre en outre que le résultat est indépendant du poids du mouton.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

CHAPITRE PREMIER. *Problèmes sur le prix des denrées* 1
§ 1. Farines 1
§ 2. Céréales 10
§ 3. Graines et fourrages 19
§ 4. Bestiaux et viande de boucherie 28
§ 5. Vins, esprits, huiles 32
CHAP. II. *Solutions des problèmes sur le commerce extérieur de la France* ... 46
§ 1. Importations et exportations 46
§ 2. Droits d'entrée et de sortie. — Drawbacks 55
§ 3. Entrepôts. — Transit 65
§ 4. Commerce extérieur du numéraire et des matières précieuses 71
§ 5. Navigation 75
CHAP. III. *Solutions des problèmes sur les opérations de banque* 80
§ 1. Monnaies étrangères 80
§ 2. Des monnaies de compte 125
§ 3. Du change direct 133
§ 4. Des arbitrages, des ordres de banque et des spéculations sur les changes 149
§ 5. Du commerce des métaux précieux 179
§ 6. De l'intérêt simple et des comptes courants et d'intérêts 185
§ 7. De l'escompte 210
CHAP. IV. *Solutions des problèmes sur les opérations de bourse* 225
§ 1. De la rente 225
§ 2. Opérations au comptant 235
§ 3. Opérations à terme. (Marchés fermes.) 244
§ 4. Marchés libres, ou à prime 251
§ 5. Des principales valeurs négociées à la Bourse 270
CHAP. V. *Solutions des problèmes sur les intérêts composés et sur les questions qui s'y rapportent* 300
§ 1. Des intérêts composés 300
§ 2. Des annuités et de l'amortissement 320
§ 3. Du crédit foncier 340

Pages.

CHAP. VI. *Solutions des problèmes sur la population, les tables de mortalité et les établissements de prévoyance* 359
§ 1. Problèmes sur la population 359
§ 2. Des tables de mortalité 368
§ 3. Des rentes viagères 379
§ 4. Des assurances sur la vie 396
§ 5. Des tontines, des caisses dotales et des sociétés de secours mutuels. 407
§ 6. De la caisse d'épargne et de la caisse des retraites pour la vieillesse. 427
§ 7. Des assurances sur les choses 451
CHAP. VII. *Solutions des problèmes élémentaires sur les sciences appliquées*. 460
§ 1. Questions de Géométrie appliquée 460
§ 2. Questions de Physique appliquée 474
§ 3. Questions de Chimie appliquée 486
§ 4. Questions de Mécanique appliquée 498

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Ch. Lahure et Cie, imprimeurs du Sénat et de la Cour de Cassation, rue de Vaugirard, 9, près de l'Odéon.

RETURN TO Astronomy/Mathematics/Statistics Library
100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1 **7 DAYS**	2	3
4	5	6

DUE AS STAMPED BELOW

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

FORM NO. DD3

U. C. BERKELEY LIBRARIES

C042277127

QA
102
S58
V. 2
MATH

MATH-
STAT.
LIBRAF

FEB 2 1993